ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Τμήμα Β

Φυλλάδιο Προβλημάτων 11
Τρίτη 15/12/2015

Άσκηση 11.1 Εξετάστε εάν συγκλίνουν οι ακόλουθες σειρές, συγκρίνοντάς τις με κατάλληλο ολοκλήρωμα.

α΄. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, β΄. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$, γ΄. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^n}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α΄. $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}} > \int_1^k \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$. Η σειρά τείνει στο $+\infty$.

β΄. $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^3} < 1 + \int_1^k \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$. Η σειρά συγκλίνει.

γ΄. $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{n}{e^n} < \frac{1}{e} + \int_1^k te^{-t}\mathrm{d}t$. Η σειρά συγκλίνει.

Άσκηση 11.2 Εξετάστε εάν συγκλίνουν οι ακόλουθες σειρές, συγκρίνοντάς τις με σειρές της μορφής $\sum \frac{1}{n^p}$ ή $\sum p^n$.

α΄. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{3^n}$, β΄. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3+3n+1}$, γ΄. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

δ΄. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$, ε΄. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n\sqrt{n+1}}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α′. $\dfrac{|\cos n|}{3^n} \leq \dfrac{1}{3^n}$. Η σειρά συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει.

β′. $\dfrac{n+1}{n^3+3n+1} \leq \dfrac{2}{n^2}$. Η σειρά συγκλίνει.

γ′. $\dfrac{1}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Η σειρά συγκλίνει.

δ′. $\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1} < \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Η σειρά συγκλίνει.

ε′. $\dfrac{\log n}{n\sqrt{n+1}} < \dfrac{\log n}{n^{\frac{3}{2}}}$. Αλλά $\dfrac{\log n}{n^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\log n}{n^{\frac{1}{4}}}\dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$, και για αρκετά μεγάλο n, $\dfrac{\log n}{n^{\frac{1}{4}}} < 1$. Άρα για αρκετά μεγάλο n, $\dfrac{\log n}{n^{\frac{3}{2}}} < \dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ Η σειρά συγκλίνει.

Άσκηση 11.3 Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου για να εξετάσετε εάν συγκλίνουν οι σειρές

α′. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

β′. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{e^n}$

γ′. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-15n+2}{n^4}$ (είναι όλοι οι όροι της σειράς μη αρνητικοί;)

Απάντηση - Υπόδειξη.

α′. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ συγκλίνει.

β′. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{e^n}$ δεν συγκλίνει.

γ′. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-15n+2}{n^4}$ δεν βγαίνει συμπέρασμα από το κριτήριο λόγου, αλλά συγκλίνει από σύγκριση με $\frac{1}{n^p}$.

Άσκηση 11.4 Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας για να εξετάσετε εάν συγκλίνουν οι σειρές

α′. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n}$

β΄. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$

γ΄. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}$

Απάντηση - Υπόδειξη.

α΄. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n}$ συγκλίνει.

β΄. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$ συγκλίνει.

γ΄. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}$ συγκλίνει.

Άσκηση 11.5 Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών και εξετάστε τη σύγκλιση στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης

α΄. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n x^n$

β΄. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n^2}$

γ΄. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$

δ΄. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} x^n$

Απάντηση - Υπόδειξη.

α΄. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n x^n$, ακτίνα σύγκλισης $\frac{1}{2}$. Για $x = \frac{1}{2}$ η σειρά τείνει στο $+\infty$, για $x = -\frac{1}{2}$ η σειρά δεν συγκλίνει.

β΄. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n^2}$, ακτίνα σύγκλισης $\frac{1}{2}$. Για $x = \pm\frac{1}{2}$ η σειρά συγκλίνει.

γ΄. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$, ακτίνα σύγκλισης 1. Για $x=1$ η σειρά τείνει στο $+\infty$, για $x=-1$ η σειρά δεν συγκλίνει.

δ΄. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} x^n$, ακτίνα σύγκλισης 1. Για $x=1$ η σειρά τείνει στο $+\infty$, για $x=-1$ η σειρά δεν συγκλίνει.

Άσκηση 11.6 Βρείτε τα πολυώνυμα Taylor βαθμού 5 με κέντρο 0 για τις συναρτήσεις

α΄. $f(x) = \frac{1}{1-x}$

β΄. $g(x) = \frac{1}{2x+1}$

γ΄. $h(x) = x^6 + 3x^4 + x - 1$

Απάντηση - Υπόδειξη.

α΄. $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Υπολογίζετε τις παραγώγους $f'(x), \ldots, f^{(5)}(x)$, ή δείχνετε με επαγωγή οτι $f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}$.
$\hat{f}_5(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$.

β΄. $g(x) = \frac{1}{2x+1}$. Υπολογίζετε τις παραγώγους $g'(x), \ldots, g^{(5)}(x)$, ή δείχνετε με επαγωγή οτι $g^{(n)}(x) = 2^n(-1)^n n!(2x+1)^{-(n+1)}$.
$\hat{g}_5(x) = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 - 32x^5$.

γ΄. $h(x) = x^6 + 3x^4 + x - 1$. Υπολογίστε $h'(0) = 1$, $h''(0) = 0$, $h^{(3)}(0) = 0$, $h^{(4)}(0) = 72$, $h^{(5)}(0) = 0$.
$\hat{h}_5 = 3x^4 + x - 1$.

Άσκηση 11.7 Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Taylor για να υπολογίσετε το $\sqrt{1,02}$ με σφάλμα μικρότερο από 10^{-2}.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = \frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}}$.
$\hat{f}_1(1+t) = f(1) + f'(1)t$, και από το Θεώρημα Ταψλορ $f(1+t) = \hat{f}_1(1+t) + \frac{1}{2}\delta t^2$, όπου δ είναι τιμή της $f''(x)$ στο $(1,\ 1+t)$. Αλλά $|f''(x)| \leq \frac{1}{4}$ στο $(1,\ 1+t)$, άρα $f(1+t) - \hat{f}_1(1+t) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot t^2$.
Για $t = \frac{1}{50}$, $f(\frac{51}{50}) - \hat{f}_1(\frac{51}{50}) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{50^2} = \frac{1}{2 \cdot 10^4}$.
Άρα $\sqrt{1,02} = \sqrt{1 + \frac{1}{50}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{50} \pm \frac{1}{2 \cdot 10^4} = 1,01 \pm 0,00005$.

Άσκηση 11.8 Βρείτε τη σειρά Taylor με κέντρο $\frac{\pi}{2}$ της συνάρτησης $\sin x$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \sin\frac{\pi}{2} + x\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}x^2\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{6}x^3\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{24}x^4\sin\frac{\pi}{2} + \cdots =$
$1 + 0 - \frac{1}{2}x^2 - 0 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots = \cos x.$