ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Τμήμα Β

Φυλλάδιο Προβλημάτων 2

Τρίτη 13/10/2015

Ορισμός

Λέμε οτι μία ακολουθία a_n **συγκλίνει με όριο** ℓ ή **τείνει στο** ℓ εάν για κάθε θετικό αριθμό $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq k$ ισχύει $|a_n - \ell| < \varepsilon$.
Δηλαδή η ακολουθία a_n συγκλίνει με όριο ℓ εάν και μόνον εάν η ακολουθία $a_n - \ell$ είναι μηδενική.
Μία ακολουθία ονομάζεται **συγκλίνουσα** εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός ℓ τέτοιος ώστε η ακολουθία να συγκλίνει με όριο ℓ. Στην αντίθετη περίπτωση λέμε οτι η ακολουθία **αποκλίνει** ή οτι είναι **αποκλίνουσα**.

Άσκηση 2.1 Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες:

α΄. $a_n = \frac{n^2+3n}{5n^2+1}$,

β΄. $b_n = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^n}$,

γ΄. $c_n = \frac{n^2+n-1}{n^3+1}$,

δ΄. $d_n = \frac{n!}{(n+2)!}$,

ε΄. $e_n = \frac{2n+\sin n}{n+\sin 5n}$,

ϛ΄. $f_n = \frac{n^2-1}{2n^2+n}$,

ζ΄. $g_n = \frac{2^n+1}{4^n+1}$,

η΄. $h_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Σε αυτές τις ακολουθίες εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των ακολουθιών.

α΄. $a_n = \frac{n^2+3n}{5n^2+1} = \frac{1+3/n}{5+1/n^2}$, άρα $\lim \frac{n^2+3n}{5n^2+1} = \frac{1+\lim 3/n}{5+\lim 1/n^2} = \frac{1}{5}$.

β΄. $b_n = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^n} = 2 + \frac{(-1)^n}{2^n}$, άρα $\lim \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^n} = 2 + \lim \frac{(-1)^n}{2^n} = 2$.

γ′. $c_n = \frac{n^2+n-1}{n^3+1} \to 0$.

δ′. $d_n = \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \to 0$.

ε′. $e_n = \frac{2n+\sin n}{n+\sin 5n} = \frac{2+\frac{\sin n}{n}}{1+\frac{\sin 5n}{n}} \to 2$.

ϛ′. $f_n = \frac{n^2-1}{2n^2+n} \to \frac{1}{2}$.

ζ′. $g_n = \frac{2^n+1}{4^n+1} = \frac{2^n+1}{2^{2n}+1} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^{2n}}} \to 0$.

η′. $h_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Άσκηση 2.2 Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες:

α′. $a_n = (2^n+1)^{\frac{1}{n}}$,

β′. $d_n = n - \sqrt{(n+a)(n+b)}$,

γ′. $p_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$,
(Προσοχή: το πλήθος των όρων του αθροίσματος δεν είναι σταθερό. Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα παρεμβολής.)

Απάντηση - Υπόδειξη.

α′. $a_n = (2^n+1)^{\frac{1}{n}} = 2(1+\frac{1}{2^n})^{\frac{1}{n}}$. Αφού $1+\frac{1}{2^n} > 1$ ισχύει $1+\frac{1}{2^n} \geq (1+\frac{1}{2^n})^{\frac{1}{n}} > 1$. Άρα $(1+\frac{1}{2^n})^{\frac{1}{n}} \to 1$ και $a_n \to 2$.

β′. $d_n = n - \sqrt{(n+a)(n+b)}$. Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή έκφραση, και μετά απλοποιούμε: $n - \sqrt{(n+a)(n+b)} = \dfrac{-(a+b)-\frac{ab}{n}}{1+\sqrt{1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}}}$. Αλλά $\sqrt{1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}} \to 1$. Άρα $d_n \to -\frac{a+b}{2}$.

γ′. $p_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$. Παρατηρούμε οτι για $n \geq k \geq 1$, ισχύει $\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$. Άρα έχουμε τις $1 = n \cdot \frac{1}{n} \geq p_n \geq n \cdot \frac{n}{n^2+n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$, και από την ιδιότητα παρεμβολής, $p_n \to 1$.

Ορισμός

Λέμε οτι μία ακολουθία a_n **τείνει στο** $+\infty$ εάν για κάθε αριθμό M υπάρχει φυσικός αριθμός $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq k$ ισχύει $a_n > M$.
Λέμε οτι μία ακολουθία a_n **τείνει στο** $-\infty$ εάν για κάθε αριθμό M υπάρχει φυσικός αριθμός $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq k$ ισχύει $a_n < M$.

Άσκηση 2.3 Μελετήστε ως προς την ύπαρξη ορίου, συμπεριλαμβανομένης και της περίπτωσης να τείνουν στο άπειρο, τις ακολουθίες α′. $a_n = \sqrt{n+5} + \sqrt{n} > \sqrt{n} \to +\infty$. Άρα $a_n \to +\infty$.

β′. $b_n = \sqrt{n+5} - \sqrt{n} = \frac{5}{\sqrt{n+5}-\sqrt{n}} \to 1$.

γ′. $c_n = \frac{\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n}}{n} = \sqrt{1+\frac{5}{n^2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \to \lim\sqrt{1+\frac{5}{n^2}} - \lim\frac{1}{\sqrt{n}} = 1 - 0 = 1$.

δ′. $d_n = \frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n}} \to -\infty$.

ε′. $e_n = \frac{\sqrt{2n+5}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

Άσκηση 2.4 Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση την αναδρομική ακολουθία που δίδεται από τον τύπο $a_{n+1} = \frac{2a_n+1}{3}$, με $a_1 = 2$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Δείχνουμε με επαγωγή οτι η ακολουθία είναι φθίνουσα, $a_{n+1} \leq a_n$:

- Για $n = 1$, $a_2 = \frac{2\cdot 2+1}{3} \leq 2 = a_1$.
- Υποθέτουμε οτι $a_{k+1} \leq a_k$. Τότε $a_{k+2} = \frac{2a_{k+1}+1}{3} \leq \frac{2a_k+1}{3} = a_{k+1}$.
- Άρα, $a_{n+1} \leq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Κατόπιν δείχνουμε με επαγωγή οτι η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη.

- Από τον ορισμό, $a_1 \geq 1$.
- Υποθέτουμε οτι $a_k \geq 1$. Τότε $a_{k+1} = \frac{2a_k+1}{3} \geq \frac{2+1}{3} = 1$.
- Άρα, $a_n \geq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αφού η ακολουθία είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό, έστω ℓ. Αλλά $\lim a_{n+1} = \frac{2\lim a_n+1}{3}$ και συνεπώς $\ell = \frac{2\ell+1}{3}$. Άρα $\ell = 1$.

Άσκηση 2.5 Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία $q_n = \sqrt[n]{a}$.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Bernoulli για να δείξετε οτι η $s_n = \sqrt[n]{a} - 1$ είναι μηδενική.)

Απάντηση - Υπόδειξη.
Υποθέτουμε οτι $a > 1$, ώστε να ορίζεται η ακολουθία για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εάν $a = 1$, η ακολουθία είναι σταθερή. Υποθέτουμε οτι $a > 1$ και θέτουμε $\sqrt[n]{a} = 1 + s_n$. Από την ανισότητα Bernoulli, $a = (1+s_n)^n \geq 1 + ns_n$, δηλαδή $s_n \leq \frac{a-1}{n}$. Τότε από την ιδιότητα παρεμβολής $0 < s_n \leq \frac{a-1}{n}$ και $s_n \to 0$. Άρα $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.
Τώρα υποθέτουμε οτι $0 < a < 1$. Τότε $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$, και αφού $\frac{1}{a} > 1$, $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1$. Άρα $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

Άσκηση 2.6 Για a και b θετικούς αριθμούς, εξετάστε τη σύγκλιση των ακολουθιών

$$\alpha'.\ \ a_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \quad \text{και} \quad \beta'.\ \ b_n = \sqrt[n]{a^n + b^n},$$

κατά περίπτωση εάν $a > b$, $a = b$ ή $a < b$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α΄. Εάν $a = b$, $a_n = 0$.
Εάν $a > b$, $a_n = \frac{1-(\frac{b}{a})^n}{1+(\frac{b}{a})^n}$, και αφού $\frac{b}{a} < 1$, $(\frac{b}{a})^n \to 0$. Άρα $\lim a_n = 1$.
Εάν $a < b$, $a_n = \frac{(\frac{a}{b})^n-1}{(\frac{a}{b})^n+1} \to -1$.

β΄. Εάν $a = b$, $b_n = \sqrt[n]{2a^n} \to 1$.
Εάν $a > b$, $b_n = a\sqrt[n]{1+\frac{b}{a})^n}$. Αλλά $\lim \sqrt[n]{1+\frac{b}{a})^n} = 1$ και συνεπώς $\lim b_n = a$.
Εξετάστε τι συμβαίνει όταν $a < b$.

Άσκηση 2.7 Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση την αναδρομική ακολουθία που δίδεται από τον τύπο $a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} + 1$, με

$$\text{α΄.}\ \ a_1 = 5 \quad \text{και} \quad \text{β΄.}\ \ a_1 = 6\,.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\lim a_n = (1+\sqrt{2})^2$.