ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Τμήμα Β

Φυλλάδιο Προβλημάτων 2

Τρίτη 13/10/2015

Ορισμός

Λέμε οτι μία ακολουθία a_n **συγκλίνει με όριο** ℓ ή **τείνει στο** ℓ εάν για κάθε θετικό αριθμό $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq k$ ισχύει $|a_n - \ell| < \varepsilon$.
Δηλαδή η ακολουθία a_n συγκλίνει με όριο ℓ εάν και μόνον εάν η ακολουθία $a_n - \ell$ είναι μηδενική.
Μία ακολουθία ονομάζεται **συγκλίνουσα** εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός ℓ τέτοιος ώστε η ακολουθία να συγκλίνει με όριο ℓ. Στην αντίθετη περίπτωση λέμε οτι η ακολουθία **αποκλίνει** ή οτι είναι **αποκλίνουσα**.

Άσκηση 2.1 Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες:

α΄. $a_n = \frac{n^2+3n}{5n^2+1}$,

β΄. $b_n = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^n}$,

γ΄. $c_n = \frac{n^2+n-1}{n^3+1}$,

δ΄. $d_n = \frac{n!}{(n+2)!}$,

ε΄. $e_n = \frac{2n+\sin n}{n+\sin 5n}$,

ϛ΄. $f_n = \frac{n^2-1}{2n^2+n}$,

ζ΄. $g_n = \frac{2^n+1}{4^n+1}$,

η΄. $h_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Άσκηση 2.2 Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες:

α΄. $a_n = (2^n+1)^{\frac{1}{n}}$,

β΄. $d_n = n - \sqrt{(n+a)(n+b)}$,

γ′. $p_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$,
(Προσοχή: το πλήθος των όρων του αθροίσματος δεν είναι σταθερό. Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα παρεμβολής.)

Ορισμός

Λέμε οτι μία ακολουθία a_n **τείνει στο** $+\infty$ εάν για κάθε αριθμό M υπάρχει φυσικός αριθμός $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq k$ ισχύει $a_n > M$.
Λέμε οτι μία ακολουθία a_n **τείνει στο** $-\infty$ εάν για κάθε αριθμό M υπάρχει φυσικός αριθμός $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq k$ ισχύει $a_n < M$.

Άσκηση 2.3 Μελετήστε ως προς την σύγκλιση, συμπεριλαμβανομένης και της περίπτωσης να τείνουν στο άπειρο, τις ακολουθίες

α′. $a_n = \sqrt{n+5} + \sqrt{n}$,

β′. $b_n = \sqrt{n+5} - \sqrt{n}$,

γ′. $c_n = \frac{\sqrt{n^2+5} - \sqrt{n}}{n}$,

δ′. $d_n = \frac{\sqrt{n+5} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n}}$,

ε′. $e_n = \frac{\sqrt{2n+5} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

Άσκηση 2.4 Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση την αναδρομική ακολουθία που δίδεται από τον τύπο $a_{n+1} = \frac{2a_n+1}{3}$, με $a_1 = 2$.

Άσκηση 2.5 Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία $q_n = \sqrt[n]{a}$.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Bernoulli για να δείξετε οτι η $s_n = \sqrt[n]{a} - 1$ είναι μηδενική.)

Άσκηση 2.6 Για a και b θετικούς αριθμούς, εξετάστε τη σύγκλιση των ακολουθιών

$$\alpha'.\ \ a_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \quad \text{και} \quad \beta'.\ \ b_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}\,,$$

κατά περίπτωση εάν $a > b$, $a = b$ ή $a < b$.

Άσκηση 2.7 Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση την αναδρομική ακολουθία που δίδεται από τον τύπο $a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} + 1$, με

$$\alpha'.\ \ a_1 = 5 \quad \text{και} \quad \beta'.\ \ a_1 = 6\,.$$