ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Τμήμα Β

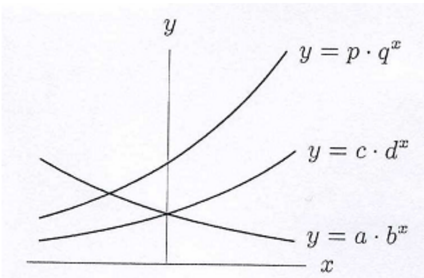
Φυλλάδιο Προβλημάτων 3

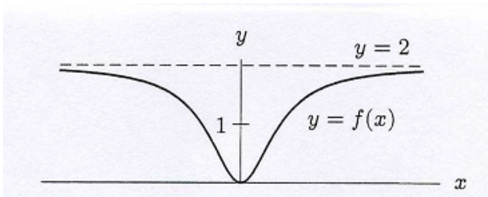
Τρίτη 20/10/2015

Άσκηση 3.1 Βρείτε το k και το a εάν το γράφημα της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = ke^{ax}$ περνάει από τα σημεία $(0,\,1)$ και $(1,\,3)$.
Το ίδιο εάν περνάει από τα σημεία $(2,\,\frac{9}{4})$ και $(-1,\,\frac{2}{3})$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$k = 1,\ a = \log 3.$
$k = 1,\ a = \log \frac{3}{2}.$

Άσκηση 3.2 Στο σχήμα στα αριστερά παρουσιάζονται τα γραφήματα 3 εκθετικών συναρτήσεων. Εξηγήστε τί συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε για τις σταθερές a, c, p και b, d, q.





Απάντηση - Υπόδειξη.
Από το σχήμα παρατηρούμε οτι $ab^0 = cd^0$, $ab^x = cd^{-x}$ και οτι $pq^x = 2cd^x$.

Άσκηση 3.3 Στο σχήμα στα δεξιά παρουσιάζεται το γράφημα μίας ρητής συνάρτησης $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$. Εάν γνωρίζετε οτι g και h είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού 2, βρείτε πιθανούς τύπους για τις g και h. (Δεν χρειάζεται να βρείτε τους πιο γενικούς τύπους για τα g και h. Αναζητήστε τις απλούστερες δυνατές συναρτήσεις, και μόνον αν δεν ικανοποιούνται τα χαρακτηριστικά του γραφήματος από αυτές, εξετάστε πιο γενικές περιπτώσεις.)

Απάντηση - Υπόδειξη.
Μία μορφή της συνάρτησης που έχει τις δεδομένες ιδιότητες είναι $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$.

Άσκηση 3.4 Σχεδιάστε έναν τριγωνομετρικό κύκλο (δηλαδή τον κύκλο με ακτίνα 1 και εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ στο καρτεσιανό επίπεδο), ένα τόξο ϑ μήκους περίπου $\pi/6$ και την αντί-

στοιχη γωνία ϑ. Παρατηρήστε οτι εάν το σημείο στο πέρας του τόξου ϑ έχει συντεταγμένες (x, y), τότε $\sin\vartheta = y$ και $\cos\vartheta = x$.
Κατόπιν σχεδιάστε στον κύκλο τις γωνίες $-\vartheta$, $\pi \pm \vartheta$, $\frac{\pi}{2} \pm \vartheta$ και $\frac{3\pi}{2} \pm \vartheta$.
Γράψτε όλες τις σχέσεις που μπορείτε να βρείτε μεταξύ των τριγωνομετρικών συναρτήσεων sin, cos, tan και cot των γωνιών που σχεδιάσατε.

Ορισμός

Λέμε οτι μία συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι **φραγμένη** στο σύνολο $B \subseteq A$ εάν υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε για κάθε $x \in B$ ισχύει $|f(x)| \leq M$.

Άσκηση 3.5 Εξετάστε **με χρήση του ορισμού** εάν οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι φραγμένες στο $\mathbb{R}$: δηλαδή εξετάστε εάν υπάρχει κάποιο M τέτοιο ώστε η απόλυτη τιμή της συνάρτησης να είναι πάντα μικρότερη ή ίση από M ή δείξτε οτι για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης στο οποίο η συνάρτηση λαμβάνει απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από M.

α΄. $f(x) = \frac{2x^2-4}{x^2-2x+3}$,

β΄. $g(x) = x\cos x$,

γ΄. $h(x) = \frac{\tan x}{x}$,

δ΄. $k(x) = \frac{2^x}{x}$, (πρώτα δείξτε, με επαγωγή, οτι $2^n \geq n^2$ για κάθε $n \geq 4$),

ε΄. $r(x) = e^{-x^2}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α΄. $f(x) = \frac{2x^2-4}{x^2-2x+3}$. Παρατηρούμε οτι ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται. Αναζητούμε M τέτοιο ώστε $\frac{|2x^2-4|}{|x^2-2x+3|} \leq M$. Εξετάζομε πρώτα την ανισότητα $2x^2-4 \leq M(x^2-2x+3)$, δηλαδή $(M-2)x^2 - 2Mx + 3M + 4 \geq 0$. Για να ικανοποιείται αυτή για κάθε x αρκεί να είναι ο συντελεστής του x^2 θετικός, και η διακρίνουσα $4M^2 - 4(M-2)(3M+4)$ αρνητική. Ελέγχουμε οτι $M = 3$ ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες, άρα είναι ένα άνω φράγμα της f. Παρόμοια ελέγχουμε οτι $M = -3$ είναι κάτω φράγμα της f.

β΄. $g(x) = x\cos x$. Γνωρίζουμε οτι $\cos 2k\pi = 1$. Η g δεν είναι φραγμένη: για κάθε M, όταν $k > \frac{M}{2\pi}$ και $x = 2k\pi$, ισχύει $x\cos x = 2k\pi\cos(2k\pi) > M$.

γ΄. $h(x) = \frac{\tan x}{x}$. Χρησιμοποιήστε οτι για κάθε M, υπάρχει $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ τέτοιο ώστε $\tan x = \frac{M\pi}{2}$.

δ΄. $k(x) = \frac{2^x}{x}$, (πρώτα δείξτε, με επαγωγή, οτι $2^n \geq n^2$ για κάθε $n \geq 4$),

ε΄. $r(x) = e^{-x^2}$.

Ορισμός

Λέμε οτι μία συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι **αύξουσα** στο σύνολο $B \subseteq A$ εάν για κάθε $x_1 \in B$ και κάθε $x_2 \in B$, όταν $x_2 > x_1$ τότε $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Λέμε οτι μία συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι **φθίνουσα** στο σύνολο $B \subseteq A$ εάν για κάθε $x_1 \in B$ και κάθε $x_2 \in B$, όταν $x_2 > x_1$ τότε $f(x_2) \leq f(x_1)$.
Λέμε οτι μία συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι **μονότονη** στο σύνολο $B \subseteq A$ εάν η f είναι αύξουσα στο B ή εάν η f είναι φθίνουσα στο B.

Άσκηση 3.6 Με χρήση του ορισμού, εξετάστε εάν είναι μονότονη η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{2} + \sin x$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Υπολογίστε τη συνάρτηση σε κατάλληλα σημεία για να δείξετε οτι δεν είναι αύξουσα, και σε άλλα σημεία για να δείξετε οτι δεν είναι φθίνουσα.

Άσκηση 3.7 Αγνοήστε αυτή την Άσκηση. Βρείτε διαστήματα στα οποία είναι μονότονη η συνάρτηση

$$f(x) = (x-1)(x-5)(x+1)(x+3)\,.$$