

MEM101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Τμήμα Β

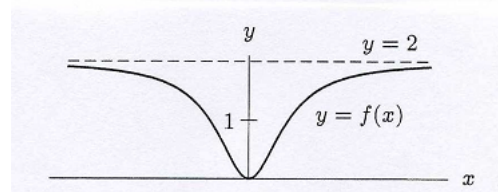
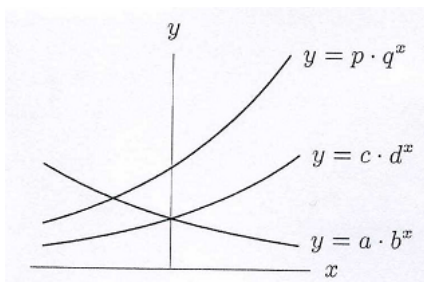
Φυλλάδιο Προβλημάτων 3

Τρίτη 20/10/2015

Άσκηση 3.1 Βρείτε το k και το a εάν το γράφημα της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = ke^{ax}$ περνάει από τα σημεία $(0, 1)$ και $(1, 3)$.

Το ίδιο εάν περνάει από τα σημεία $(2, \frac{9}{4})$ και $(-1, \frac{2}{3})$.

Άσκηση 3.2 Στο σχήμα στα αριστερά παρουσιάζονται τα γραφήματα 3 εκθετικών συναρτήσεων. Εξηγήστε τί συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε για τις σταθερές a, c, p και b, d, q .



Άσκηση 3.3 Στο σχήμα στα δεξιά παρουσιάζεται το γράφημα μίας ρητής συνάρτησης $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$. Εάν γνωρίζετε ότι g και h είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού 2, βρείτε πιθανούς τύπους για τις g και h . (Δεν χρειάζεται να βρείτε τους πιο γενικούς τύπους για τα g και h . Αναζητήστε τις απλούστερες δυνατές συναρτήσεις, και μόνον αν δεν ικανοποιούνται τα χαρακτηριστικά του γραφήματος από αυτές, εξετάστε πιο γενικές περιπτώσεις.)

Άσκηση 3.4 Σχεδιάστε έναν τριγωνομετρικό κύκλο (δηλαδή τον κύκλο με ακτίνα 1 και εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ στο καρτεσιανό επίπεδο), ένα τόξο ϑ μήκους περίπου $\pi/6$ και την αντίστοιχη γωνία ϑ . Παρατηρήστε ότι εάν το σημείο στο πέρας του τόξου ϑ έχει συντεταγμένες (x, y) , τότε $\sin \vartheta = y$ και $\cos \vartheta = x$.

Κατόπιν σχεδιάστε στον κύκλο τις γωνίες $-\vartheta, \pi \pm \vartheta, \frac{\pi}{2} \pm \vartheta$ και $\frac{3\pi}{2} \pm \vartheta$.

Γράψτε όλες τις σχέσεις που μπορείτε να βρείτε μεταξύ των τριγωνομετρικών συναρτήσεων \sin, \cos, \tan και \cot των γωνιών που σχεδιάσατε.

Ορισμός

Λέμε ότι μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **φραγμένη** στο σύνολο $B \subseteq A$ εάν υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε για κάθε $x \in B$ ισχύει $|f(x)| \leq M$.

Άσκηση 3.5 Εξετάστε με χρήση του ορισμού εάν οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι

φραγμένες στο \mathbb{R} : δηλαδή εξετάστε εάν υπάρχει κάποιο M τέτοιο ώστε η απόλυτη τιμή της συνάρτησης να είναι πάντα μικρότερη ή ίση από M ή δείξτε ότι για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης στο οποίο η συνάρτηση λαμβάνει απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από M .

$$\alpha'. f(x) = \frac{2x^2-4}{x^2-2x+3},$$

$$\beta'. g(x) = x \cos x,$$

$$\gamma'. h(x) = \frac{\tan x}{x},$$

$$\delta'. k(x) = \frac{2^x}{x}, \text{ (πρώτα δείξτε, με επαγωγή, ότι } 2^n \geq n^2 \text{ για κάθε } n \geq 4),$$

$$\epsilon'. r(x) = e^{-x^2}.$$

Ορισμός

Λέμε ότι μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **αύξουσα** στο σύνολο $B \subseteq A$ εάν για κάθε $x_1 \in B$ και κάθε $x_2 \in B$, όταν $x_2 > x_1$ τότε $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Λέμε ότι μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **φθίνουσα** στο σύνολο $B \subseteq A$ εάν για κάθε $x_1 \in B$ και κάθε $x_2 \in B$, όταν $x_2 > x_1$ τότε $f(x_2) \leq f(x_1)$.

Λέμε ότι μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **μονότονη** στο σύνολο $B \subseteq A$ εάν η f είναι αύξουσα στο B ή εάν η f είναι φθίνουσα στο B .

Άσκηση 3.6 Με χρήση του ορισμού, εξετάστε εάν είναι μονότονη η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{2} + \sin x$.

Άσκηση 3.7 Βρείτε διαστήματα στα οποία είναι μονότονη η συνάρτηση

$$f(x) = (x-1)(x-5)(x+1)(x+3).$$

Ορισμός

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχουν αριθμοί a και b με $a < x_0 < b$, τέτοιοι ώστε το σύνολο $(a, x_0) \cup (x_0, b) \subseteq A$, και έναν αριθμό L . Λέμε ότι η συνάρτηση f **τείνει στο L καθώς το x τείνει στο x_0** εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ που ικανοποιεί $0 < |x - x_0| < \delta$ ισχύει $|f(x) - L| < \varepsilon$. Όταν ισχύει αυτό γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Άσκηση 3.8 Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = |2x|$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ βρείτε θετικό αριθμό δ τέτοιο ώστε να ισχύει: εάν $|x| < \delta$ τότε $|f(x)| < \varepsilon$.

Υπάρχει το όριο της $f(x)$ καθώς x τείνει στο 0;

Άσκηση 3.9 Δίδεται η συνάρτηση $g(x) = |2x - 5|$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ βρείτε θετικό αριθμό δ τέτοιο ώστε να ισχύει: εάν $|x - 1| < \delta$ τότε $|g(x) - 3| < \varepsilon$.

Υπάρχει το όριο της $g(x)$ καθώς x τείνει στο 1;