**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**
**Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών**

**Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16**
**Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης**

# ΜΕΜ101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Τμήμα Β

## Φυλλάδιο Προβλημάτων 4

## Τρίτη 27/10/2015

**Άσκηση 4.1** Υπολογίστε τον αριθμό $\sin(\mathrm{Arccos}\,(0,3))$, δηλαδή βρείτε το ημίτονο της γωνίας στο διάστημα $[0,\,\pi]$ της οποίας το συνημίτονο είναι $0,3$.

**Απάντηση - Υπόδειξη.**
$\sin(\mathrm{Arccos}\,(0,3)) = \sqrt{0,91}$.

### Ορισμός

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f\,:A \longrightarrow \mathbb{R}$, ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχουν αριθμοί $a$ και $b$ με $a < x_0 < b$, τέτοιοι ώστε το σύνολο $(a,\,x_0) \cup (x_0,\,b) \subseteq A$, και έναν αριθμό $L$. Λέμε οτι η συνάρτηση $f$ **τείνει στο** $L$ **καθώς το** $x$ **τείνει στο** $x_0$ εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ που ικανοποιεί $0 < |x - x_0| < \delta$ ισχύει $|f(x) - L| < \varepsilon$. Όταν ισχύει αυτό γράφουμε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L\,.$$

**Άσκηση 4.2** Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = |2x|$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ βρείτε θετικό αριθμό $\delta$ τέτοιο ώστε να ισχύει: εάν $|x| < \delta$ τότε $|f(x)| < \varepsilon$.
Υπάρχει το όριο της $f(x)$ καθώς $x$ τείνει στο 0;

**Απάντηση - Υπόδειξη.**
Αρκεί να επιλέξουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

**Άσκηση 4.3** Δίδεται η συνάρτηση $g(x) = |2x - 5|$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ βρείτε θετικό αριθμό $\delta$ τέτοιο ώστε να ισχύει: εάν $|x - 1| < \delta$ τότε $|g(x) - 3| < \varepsilon$.
Υπάρχει το όριο της $g(x)$ καθώς $x$ τείνει στο 1;

**Απάντηση - Υπόδειξη.**
Σχεδιάστε το γράφημα της $g$. Παρατηρήστε οτι η $g$ παίρνει την τιμή 3 όταν $x = 1$ και όταν $x = 4$.
Αναζητούμε $\delta$ τέτοιο ώστε όταν $1 - \delta < x < 1 + \delta$ και $x \neq 1$, να ισχύει $|\,|2x - 5| - 3| < \varepsilon$, δηλαδή $3 - \varepsilon < |2x - 5| < 3 + \varepsilon$. Βγάζοντας την απόλυτη τιμή από την τελευταία ανισότητα έχουμε οτι πρέπει να ισχύει είτε $3 - \varepsilon < 2x - 5 < 3 + \varepsilon$ ή $-3 - \varepsilon < 2x - 5 < -3 + \varepsilon$. (Γράψτε αναλυτικά όλα τα βήματα των μετασχηματισμών των ανισοτήτων!) Αφού ενδιαφερόμαστε για

τιμές του $x$ κοντά στο 1, η ανισότητα που πρέπει να ικανοποιήται είναι η $-3-\varepsilon < 2x-5 < -3+\varepsilon$, απ' όπου προκύπτει οτι $1-\frac{\varepsilon}{2} < x < 1+frac\varepsilon 2$. Άρα αρκεί να επιλέξουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

**Άσκηση 4.4** Με χρήση των ιδιοτήτων των ορίων συναρτήσεων, εξετάστε εάν υπάρχουν τα παρακάτω όρια συναρτήσεων, και εάν υπάρχουν υπολογίστε τα.

α'. $\lim_{x\to 1} x(x-2)(x^3+5)$,

β'. $\lim_{x\to 0} \frac{x+2}{x^3+1}$,

γ'. $\lim_{x\to 2} (x+3)^{625}$,

δ'. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$,

ε'. $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-5x+4}$.

**Απάντηση - Υπόδειξη.**

α'. $\lim_{x\to 1} x(x-2)(x^3+5) = (\lim_{x\to 1} x)(\lim_{x\to 1})((x-2)\lim_{x\to 1}(x^3+5)) = -6$,

β'. $\lim_{x\to 0} \frac{x+2}{x^3+1} = \frac{\lim_{x\to 0}(x+2)}{\lim_{x\to 0}(x^3+1)} = 2$,

γ'. $\lim_{x\to 2} (x+3)^{625}$,

δ'. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2-1} = \frac{3}{2}$,

ε'. $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-5x+4}$.

**Άσκηση 4.5** Εξετάστε εάν υπάρχουν τα παρακάτω όρια συναρτήσεων, και εάν υπάρχουν υπολογίστε τα.

α'. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x+1}$,

β'. $\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)\sin x}{x}$,

γ'. $\lim_{x\to 0} [x]$ και $\lim_{x\to 0} x[x]$.

**Απάντηση - Υπόδειξη.**

α′. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x+1} = 0$,

β′. $\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)\sin x}{x} = 1$,

γ′. $\lim_{x\to 0}[x]$ δεν υπάρχει: Παρατηρούμε οτι για κάθε $\delta > 0$ τα $x_1 = \frac{\delta}{2}$ και $x_2 = -\frac{\delta}{2}$ ικανοποιούν $|x - 0| < \delta$ αλλά $[x_1] - [x_2] = 1$. Αυτό σημαίνει οτι για $\varepsilon < \frac{1}{2}$ δεν υπάρχει $\delta$ που να ικανοποιεί τη συνθήκη ύπαρξης ορίου.
Το αποδεικνύουμε με απαγωγή σε άτοπο: Υποθέτουμε οτι το όριο υπάρχει και είναι $\ell$. Για $\varepsilon = \frac{1}{3}$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε εάν $|x - 0| < \delta$ ισχύει $|[x] - \ell| < \frac{1}{3}$. Ειδικότερα για τα $x_1 = \frac{\delta}{2}$ και $x_2 = -\frac{\delta}{2}$ ισχύει $|[x_1] - [x_2]| \leq |[x_1] - \ell| + |x_2] - \ell| < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Αλλά είδαμε οτι $[x_1] - [x_2] = 1$. Άτοπο. Άρα το όριο δεν υπάρχει.
Αντιθέτως, το δεύτερο όριο υπάρχει: $\lim_{x\to 0} x[x] = 0$.

### Ορισμός

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχει αριθμός $b > x_0$ τέτοιος ώστε $(x_0, b) \subseteq A$, και έναν αριθμό $L$. Λέμε οτι η συνάρτηση $f$ **τείνει στο $L$ καθώς το $x$ τείνει στο $x_0$ από τα δεξιά** εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ που ικανοποιεί $x_0 < x < \delta$ ισχύει $|f(x) - L| < \varepsilon$. Όταν ισχύει αυτό γράφουμε

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = L\,.$$

**Άσκηση 4.6** Εξετάστε εάν υπάρχουν τα παρακάτω μονόπλευρα όρια συναρτήσεων, και εάν υπάρχουν υπολογίστε τα.

α′. $\lim_{x\to 2-} \frac{x}{[x]}$,

β′. $\lim_{x\to 0+} \frac{x}{|x|}$ και $\lim_{x\to 0-} \frac{x}{|x|}$,

γ′. $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{|x|}$ και $\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{|x|}$.

### Απάντηση - Υπόδειξη.

α′. $\lim_{x\to 2-} \frac{x}{[x]} = 2$,

β′. $\lim_{x\to 0+} \frac{x}{|x|} = 1$ και $\lim_{x\to 0-} \frac{x}{|x|} = -1$,

γ′. $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{|x|} = 1$ και $\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{|x|} = -1$.

**Άσκηση 4.7** Υπολογίστε τους αριθμούς:

α′. $\sin(\mathrm{Arctan}\,\sqrt{5})$, (το τόξο εφαπτομένης παίρνει τιμές στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$, β′. $\tan(\mathrm{Arccos}\,(-1/3))$,

γ′. $\cos(\mathrm{Arctan}\,\sqrt{2})$.

**Απάντηση - Υπόδειξη.**

α′. $\sin(\mathrm{Arctan}\,\sqrt{5}) = \sqrt{\frac{5}{6}}$, (το τόξο εφαπτομένης παίρνει τιμές στο διάστημα $(-\pi/2,\,\pi/2)$,

β′. $\tan(\mathrm{Arccos}\,(-1/3)) = -2\sqrt{2}$,

γ′. $\cos(\mathrm{Arctan}\,\sqrt{2})$.

**Άσκηση 4.8** Δίδεται αριθμός $x$ τέτοιος ώστε $0 \leq x \leq 1$. Δείξτε οτι

$$\mathrm{Arcsin}\,x + \mathrm{Arccos}\,x = \frac{\pi}{2}\,.$$