

MEM101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ I

Τμήμα Β

Φυλλάδιο Προβλημάτων 4

Τρίτη 27/10/2015

Άσκηση 4.1 Υπολογίστε τον αριθμό $\sin(\arccos(0,3))$, δηλαδή βρείτε το ημίτονο της γωνίας στο διάστημα $[0, \pi]$ της οποίας το συνημίτονο είναι $0,3$.

Ορισμός

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχουν αριθμοί a και b με $a < x_0 < b$, τέτοιοι ώστε το σύνολο $(a, x_0) \cup (x_0, b) \subseteq A$, και έναν αριθμό L . Λέμε ότι η συνάρτηση f **τείνει στο L καθώς το x τείνει στο x_0** εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ που ικανοποιεί $0 < |x - x_0| < \delta$ ισχύει $|f(x) - L| < \varepsilon$. Όταν ισχύει αυτό γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Άσκηση 4.2 Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = |2x|$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ βρείτε θετικό αριθμό δ τέτοιο ώστε να ισχύει: εάν $|x| < \delta$ τότε $|f(x)| < \varepsilon$.
Υπάρχει το όριο της $f(x)$ καθώς x τείνει στο 0 ;

Άσκηση 4.3 Δίδεται η συνάρτηση $g(x) = |2x - 5|$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ βρείτε θετικό αριθμό δ τέτοιο ώστε να ισχύει: εάν $|x - 1| < \delta$ τότε $|g(x) - 3| < \varepsilon$.
Υπάρχει το όριο της $g(x)$ καθώς x τείνει στο 1 ;

Άσκηση 4.4 Με χρήση των ιδιοτήτων των ορίων συναρτήσεων, εξετάστε εάν υπάρχουν τα παρακάτω όρια συναρτήσεων, και εάν υπάρχουν υπολογίστε τα.

α'. $\lim_{x \rightarrow 1} x(x - 2)(x^3 + 5)$,

β'. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2}{x^3 + 1}$,

γ'. $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)^{625}$,

δ'. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$,

ε'. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - 5x + 4}$.

Άσκηση 4.5 Εξετάστε εάν υπάρχουν τα παρακάτω όρια συναρτήσεων, και εάν υπάρχουν υπολογίστε τα.

$$\alpha'. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x + 1},$$

$$\beta'. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 1) \sin x}{x},$$

$$\gamma'. \lim_{x \rightarrow 0} [x] \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} x[x].$$

Ορισμός

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχει αριθμός $b > x_0$ τέτοιος ώστε $(x_0, b) \subseteq A$, και έναν αριθμό L . Λέμε ότι η συνάρτηση f **τείνει στο L καθώς το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά** εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ που ικανοποιεί $x_0 < x < x_0 + \delta$ ισχύει $|f(x) - L| < \varepsilon$. Όταν ισχύει αυτό γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L.$$

Άσκηση 4.6 Εξετάστε εάν υπάρχουν τα παρακάτω μονόπλευρα όρια συναρτήσεων, και εάν υπάρχουν υπολογίστε τα.

$$\alpha'. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{[x]},$$

$$\beta'. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|},$$

$$\gamma'. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{|x|} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|}.$$

Άσκηση 4.7 Υπολογίστε τους αριθμούς:

$$\alpha'. \sin(\text{Arctan } \sqrt{5}), \text{ (το τόξο εφαπτομένης παίρνει τιμές στο διάστημα } (-\pi/2, \pi/2),$$

$$\beta'. \tan(\text{Arccos } (-1/3)),$$

$$\gamma'. \cos(\text{Arctan } \sqrt{2}).$$

Άσκηση 4.8 Δίδεται αριθμός x τέτοιος ώστε $0 \leq x \leq 1$. Δείξτε ότι

$$\text{Arcsin } x + \text{Arccos } x = \frac{\pi}{2}.$$