ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Τμήμα Β

Φυλλάδιο Προβλημάτων 5

Τρίτη 3/11/2015

Άσκηση 5.1 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = [x]$, όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x, και $g : [2, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

α΄. Σχεδιάστε τα γραφήματα των f και g.

β΄. Δείξτε οτι η σύνθεση $g \circ f$ δεν ορίζεται.

γ΄. Δείξτε οτι η σύνθεση $f \circ g$ ορίζεται. Βρείτε το γράφημά της.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Η $g \circ f$ δεν ορίζεται, γιατί $\operatorname{im} f \not\subseteq [2, 4]$.
Η $f \circ g$ ορίζεται, αφού $\operatorname{im} g = [\frac{1}{3}, 1] \subseteq [0, 2]$.

Ορισμός

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ και ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχουν αριθμοί a και b με $a < x_0 < b$, τέτοιοι ώστε το σύνολο $(a, x_0) \cup (x_0, b) \subseteq A$. Λέμε οτι η συνάρτηση f **τείνει στο** $+\infty$ **καθώς το** x **τείνει στο** x_0 εάν για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ που ικανοποιεί $0 < |x - x_0| < \delta$ ισχύει $f(x) > M$. Όταν ισχύει αυτό γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \,.$$

Ανάλογα ορίζονται τα όρια $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to x_0+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to x_0-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to x_0+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \to x_0-} f(x) = -\infty$.

Άσκηση 5.2 Δείξτε, **χρησιμοποιώντας τον ορισμό**, τα ακόλουθα όρια: δηλαδή για οποιοδήποτε $M \in \mathbb{R}$ βρείτε κατάλληλο δ ώστε να ισχύει η απαιτούμενη για κάθε όριο ιδιότητα.

α΄. $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$,

β΄. $\displaystyle\lim_{x \to 3+} \frac{1}{x-3} = +\infty$, γ'. $\lim_{x\to 3-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$,

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. $\lim_{x\to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2} = +\infty$. Για κάθε $M \in \mathbb{R}$, θέλουμε δ τέτοιο ώστε εάν $3-\delta < x < 3+\delta$ να ισχύει $\frac{1}{(x-3)^2} > M$.
Για $M \leq 0$ μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε $\delta > 0$. Για $M > 0$, για να ισχύει $\frac{1}{(x-3)^2} > M$ αρκεί να ισχύει $|x-3| < \frac{1}{\sqrt{M}}$. Άρα μπορούμε να επιλέξουμε $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$.

β'. $\lim_{x\to 3+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$. Για $M > 0$, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta = \frac{1}{M}$.

γ'. $\lim_{x\to 3-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$. Για $M < 0$, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta = -\frac{1}{M}$.

Άσκηση 5.3 Εξετάστε εάν υπάρχουν τα παρακάτω μονόπλευρα όρια συναρτήσεων, και εάν υπάρχουν υπολογίστε τα.

α'. $\lim_{x\to 3+} \dfrac{1}{x^2-9}$,

β'. $\lim_{x\to 3+} \dfrac{x+3}{x^2-9}$,

γ'. $\lim_{x\to 3-} \dfrac{[x]^2-9}{x^2-9}$.

Ορισμός

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, για την οποία υπάρχει αριθμός N τέτοιος ώστε $(N, +\infty) \subseteq A$, και έναν αριθμό L. Λέμε οτι η συνάρτηση f **τείνει στο** L **καθώς το** x **τείνει στο** $+\infty$ εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $K \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ που ικανοποιεί $x > K$ ισχύει $|f(x) - L| < \varepsilon$. Όταν ισχύει αυτό γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L\,.$$

Ανάλογα ορίζονται τα όρια $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Άσκηση 5.4 Δείξτε, **χρησιμοποιώντας τον ορισμό**, τα ακόλουθα όρια: δηλαδή για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ βρείτε κατάλληλο $K \in \mathbb{R}$, ή για οποιοδήποτε $M \in \mathbb{R}$ βρείτε κατάλληλο $K \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει η απαιτούμενη για κάθε όριο ιδιότητα.

α'. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$,

β'. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$, γ′. $\lim_{x\to+\infty}(-x^3+x^2)=-\infty$,

Απάντηση - Υπόδειξη.

α′. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1$. Για κάθε $\varepsilon>0$ θέλουμε $K\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε εάν $x>K$ να ισχύει $\left|\frac{x-1}{x+1}-1\right|<\varepsilon$. Υποθέτουμε οτι $x>1$, και αφαιρούμε την απόλυτη τιμή, για να πάρουμε την ανισότητα $\frac{2}{x+1}<\varepsilon$. Συνεπώς μπορούμε να επιλέξουμε $K=\max\{1,\frac{2}{\varepsilon}-1\}$. (Ελέγξτε οτι εάν $x>\frac{2}{\varepsilon}-1>1$ τότε ισχύει $\left|\frac{x-1}{x+1}-1\right|<\varepsilon$.)

β′. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1$. Για κάθε $\varepsilon>0$ θέλουμε $K\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε εάν $x<K$ να ισχύει $\left|\frac{x-1}{x+1}-1\right|<\varepsilon$. Παρόμοια βρίσκουμε οτι $K=\min\{-1,\frac{2}{\varepsilon}-1\}$.

γ′. $\lim_{x\to+\infty}(-x^3+x^2)=-\infty$. Για κάθε $M\in\mathbb{R}$ θέλουμε $K\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε εάν $x>K$ να ισχύει $-x^3+x^2<M$. Μπορούμε να επιλέξουμε $K=\max\{1,1-M\}$.

Άσκηση 5.5 Υπολογίστε, εάν υπάρχουν, τα όρια:

α′. $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+1\right)\left(\dfrac{5x^2-1}{x^2}\right)$,

β′. $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\cos\dfrac{1}{x}\right)$,

γ′. $\lim_{x\to-1-}\dfrac{1}{x+1}$,

δ′. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sin x}{x}$,

ε′. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2+1}{x^3+x^2+2}$,

ϛ′. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x}+x^2-1}$,

ζ′. $\lim_{\vartheta\to0}\dfrac{\vartheta^2\sin(1/\vartheta)}{\sin\vartheta}$,

η′. $\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{(x+a)^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)$, $a\neq0$,

ϑ′. $\lim_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$,

ι′. $\lim_{x\to0+}\dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x}$,

ια′. $\lim_{x\to0}\dfrac{x}{x^5+x^2}$,

ιβ′. $\lim_{x\to 1} \dfrac{|5-2x|+|1-2x|-4|x|}{x^2-1}$,

ιγ′. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}$,

ιδ′. $\lim_{x\to +\infty} \left(x+2-\sqrt{x^2-5x+1}\right)$,

ιε′. $\lim_{x\to -\infty} \left(x+2-\sqrt{x^2-5x+1}\right)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α′. $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}+1\right)\left(\dfrac{5x^2-1}{x^2}\right)=5$,

β′. $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\cos\dfrac{1}{x}\right)=2$,

γ′. $\lim_{x\to -1-} \dfrac{1}{x+1}=\lim_{y\to 0-}\dfrac{1}{y}=-\infty$,

δ′. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sin x}{x}=0$,

ε′. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{5x^2+1}{x^3+x^2+2}=0$,

ϛ′. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x}+x^2-1}=1$,

ζ′. $\lim_{\vartheta\to 0} \dfrac{\vartheta^2\sin(1/\vartheta)}{\sin\vartheta}=\lim_{\vartheta\to 0}\dfrac{\vartheta}{\sin\vartheta}\cdot\lim_{\vartheta\to 0}\vartheta\sin(1/\vartheta)=1\cdot 0=0$,

η′. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{(x+a)^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)=-\lim_{x\to 0}\dfrac{x+2a}{a^2(x+a)^2}=-\dfrac{2}{a^3}$,

ϑ′. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}=1$,

ι′. $\lim_{x\to 0+} \dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x}=0$,

ια′. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{x^5+x^2}$ δεν υπάρχει,

ιβ′. $\lim_{x\to 1} \dfrac{|5-2x|+|1-2x|-4|x|}{x^2-1}$. Υποθέτουμε οτι $\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$ και αφαιρούμε τις απόλυτες τιμές.

ιγ′. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}$. Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με το συζυγή, και απλοποιούμε σε $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}=1$.

ιδ′. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2-\sqrt{x^2-5x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x+3}{x+2+\sqrt{x^2-5x+1}}=\dfrac{9}{2}$,

ιε′. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2-\sqrt{x^2-5x+1}\right)=-\infty$.

Άσκηση 5.6 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται από $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ όταν $x\neq 0$ και $f(0)=0$, και τη συνάρτηση $g(y)$ που ορίζεται από $g(y)=|y|$ όταν $y\neq 0$ και $g(0)=1$.

α′. Δείξτε οτι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

β′. Δείξτε οτι $\lim\limits_{y\to 0} g(y)=0$.

γ′. Δείξτε οτι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$.

δ′. Ποιά από τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Αντικατάστασης δεν ικανοποιείται;

Απάντηση - Υπόδειξη.

α′. Δείξτε οτι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

β′. Δείξτε οτι $\lim\limits_{y\to 0} g(y)=0$.

γ′. Δείξτε οτι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$. Για $x_k=\frac{1}{k\pi}$, $g\circ f(x_k)=1$, ενώ για $w_n=\frac{2}{(2n+1)\pi}$, $g\circ f(w_n)\to 0$.

δ′. Ποιά από τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Αντικατάστασης δεν ικανοποιείται;