ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Τμήμα Β

Φυλλάδιο Προβλημάτων 5

Τρίτη 3/11/2015

Άσκηση 5.1 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f:[0,\,2]\longrightarrow\mathbb{R}$, με $f(x)=[x]$, όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x, και $g:[2,\,4]\longrightarrow\mathbb{R}$ με $g(x)=\frac{1}{x-1}$.

α΄. Σχεδιάστε τα γραφήματα των f και g.

β΄. Δείξτε οτι η σύνθεση $g\circ f$ δεν ορίζεται.

γ΄. Δείξτε οτι η σύνθεση $f\circ g$ ορίζεται. Βρείτε το γράφημά της.

Ορισμός

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ και ένα σημείο $x_0\in\mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχουν αριθμοί a και b με $a<x_0<b$, τέτοιοι ώστε το σύνολο $(a,\,x_0)\cup(x_0,\,b)\subseteq A$. Λέμε οτι η συνάρτηση f **τείνει στο** $+\infty$ **καθώς το** x **τείνει στο** x_0 εάν για κάθε $M\in\mathbb{R}$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in A$ που ικανοποιεί $0<|x-x_0|<\delta$ ισχύει $f(x)>M$. Όταν ισχύει αυτό γράφουμε

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty\,.$$

Ανάλογα ορίζονται τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=-\infty$.

Άσκηση 5.2 Δείξτε, **χρησιμοποιώντας τον ορισμό**, τα ακόλουθα όρια: δηλαδή για οποιοδήποτε $M\in\mathbb{R}$ βρείτε κατάλληλο δ ώστε να ισχύει η απαιτούμενη για κάθε όριο ιδιότητα.

α΄. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}=+\infty,$

β΄. $\displaystyle\lim_{x\to 3+}\frac{1}{x-3}=+\infty,$

γ΄. $\displaystyle\lim_{x\to 3-}\frac{1}{x-3}=-\infty,$

Άσκηση 5.3 Εξετάστε εάν υπάρχουν τα παρακάτω μονόπλευρα όρια συναρτήσεων, και εάν υπάρχουν υπολογίστε τα.

α΄. $\lim\limits_{x\to 3+} \dfrac{1}{x^2-9}$,

β΄. $\lim\limits_{x\to 3+} \dfrac{x+3}{x^2-9}$,

γ΄. $\lim\limits_{x\to 3-} \dfrac{[x]^2-9}{x^2-9}$.

Ορισμός

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f\ :\ A \longrightarrow \mathbb{R}$, για την οποία υπάρχει αριθμός N τέτοιος ώστε $(N, +\infty) \subseteq A$, και έναν αριθμό L. Λέμε οτι η συνάρτηση f **τείνει στο** L **καθώς το** x **τείνει στο** $+\infty$ εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $K \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ που ικανοποιεί $x > K$ ισχύει $|f(x) - L| < \varepsilon$. Όταν ισχύει αυτό γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L\,.$$

Ανάλογα ορίζονται τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Άσκηση 5.4 Δείξτε, **χρησιμοποιώντας τον ορισμό**, τα ακόλουθα όρια: δηλαδή για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ βρείτε κατάλληλο $K \in \mathbb{R}$, ή για οποιοδήποτε $M \in \mathbb{R}$ βρείτε κατάλληλο $K \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει η απαιτούμενη για κάθε όριο ιδιότητα.

α΄. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$,

β΄. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$,

γ΄. $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^3 + x^2) = -\infty$,

Άσκηση 5.5 Υπολογίστε, εάν υπάρχουν, τα όρια:

α΄. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x} + 1\right)\left(\dfrac{5x^2-1}{x^2}\right)$,

β΄. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \cos\dfrac{1}{x}\right)$,

γ΄. $\lim\limits_{x\to-1-} \dfrac{1}{x+1}$,

δ΄. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin x}{x}$, ε′. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2+1}{x^3+x^2+2}$,

ϛ′. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x}+x^2-1}$,

ζ′. $\lim_{\vartheta\to 0} \dfrac{\vartheta^2 \sin(1/\vartheta)}{\sin\vartheta}$,

η′. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{(x+a)^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)$, $a \neq 0$,

ϑ′. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$,

ι′. $\lim_{x\to 0+} \dfrac{\sin(x^2)}{x}$,

ια′. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{x^5+x^2}$,

ιβ′. $\lim_{x\to 1} \dfrac{|5-2x|+|1-2x|-4|x|}{x^2-1}$,

ιγ′. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}$,

ιδ′. $\lim_{x\to+\infty} \left(x+2-\sqrt{x^2-5x+1}\right)$,

ιε′. $\lim_{x\to-\infty} \left(x+2-\sqrt{x^2-5x+1}\right)$.

Άσκηση 5.6 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται από $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ όταν $x \neq 0$ και $f(0)=0$, και τη συνάρτηση $g(y)$ που ορίζεται από $g(y)=|y|$ όταν $y \neq 0$ και $g(0)=1$.

α′. Δείξτε οτι $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

β′. Δείξτε οτι $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$.

γ′. Δείξτε οτι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 0} g(f(x))$.

δ′. Ποιά από τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Αντικατάστασης δεν ικανοποιείται;