ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Τμήμα Β

Φυλλάδιο Προβλημάτων 6

Τρίτη 10/11/2015

Άσκηση 6.1 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 3 & \text{αν } x \in [1,\, 2]\,, \\ -2x + 7 & \text{αν } x \in (2,\, 3]\,. \end{cases}$$

α΄. Σχεδιάστε το γράφημα της f.

β΄. Δείξτε οτι η f δεν είναι μονότονη.

γ΄. Δείξτε οτι η f είναι 1 προς 1.

δ΄. Βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}, δηλαδή βρείτε το πεδίο ορισμού της και τον τύπο που την ορίζει.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α΄. Σχεδιάστε το γράφημα της f.

β΄. Δείξτε οτι η f δεν είναι μονότονη. Με τη βοήθεια και του γραφήματος, επιλέγουμε σημεία στα οποία υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης για να δείξουμε οτι δεν είναι μονότονη. Για παράδειγμα, $f(1) < f(2)$ και $f(\frac{5}{2}) > f(3)$.

γ΄. Δείξτε οτι η f είναι 1 προς 1. Πρέπει να δείξουμε οτι εάν $x_1 \neq x_2$ είναι σημεία στο πεδίο ορισμού της f, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$. Εξετάζουμε διαφορετικές περιπτώσεις:
Εάν $x_1,\, x_2 \in [1,\, 2]$ και $x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)((x_1 + x_2) - 2) < 0$, άρα $f(x_1) \neq f(x_2)$
Εάν $x_1,\, x_2 \in [2,\, 3]$ και $x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) - f(x_2) = -2(x_1 - x_2) > 0$, άρα $f(x_1) \neq f(x_2)$
Εάν $x_1 \in [1,\, 2]$ και $x_2 \in [2,\, 3]$, τότε $f(x_1) \leq -2$ και $f(x_2) \geq 1$, άρα $f(x_1) \neq f(x_2)$.

δ΄. Βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}, δηλαδή βρείτε το πεδίο ορισμού της και τον τύπο που την ορίζει.

Ορισμός

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f\,:A\longrightarrow\mathbb{R}$ και ένα σημείο $x_0\in\mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχουν αριθμοί a και b με $a<x_0<b$, τέτοιοι ώστε το σύνολο $(a,\,b)\subseteq A$. Λέμε οτι η συνάρτηση f **είναι συνεχής στο** x_0 εάν το όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 υπάρχει και είναι ίσο με $f(x_0)$, δηλαδή

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\,.$$

Άσκηση 6.2 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-16}{|x-4|} & \text{αν } x\neq 4\,,\\ a & \text{αν } x=4\,.\end{cases}$$

Μπορούμε να δώσουμε τιμή στο a ώστε να είναι η f συνεχής στο $x=4$;

Απάντηση - Υπόδειξη.
Δεν υπάρχει τέτοιο a.

Άσκηση 6.3 Σε ποιά σημεία είναι συνεχείς οι ακόλουθες συναρτήσεις;

α΄. $f(x)=\left|x-[x]-\dfrac{1}{2}\right|$,

β΄. $g(x)=\begin{cases}x & \text{αν } x\leq 0\,,\\ \frac{1}{x} & \text{αν } x>0\,,\end{cases}$

γ΄. $h(x)=\begin{cases}x^3 & \text{αν } x\neq 0\,,\\ 1 & \text{αν } x=0\,.\end{cases}$

Σε ποιές περιπτώσεις μπορεί να αρθεί η ασυνέχεια αλλάζοντας την τιμή της συνάρτησης στο σημείο που δεν είναι συνεχής.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α΄. $f(x)=\left|x-[x]-\dfrac{1}{2}\right|$, συνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β΄. $g(x)=\begin{cases}x & \text{αν } x\leq 0\,,\\ \frac{1}{x} & \text{αν } x>0\,,\end{cases}$ Συνεχής για κάθε $x\neq 0$. Συνεχής από τα αριστερά στο 0.

γ΄. $h(x)=\begin{cases}x^3 & \text{αν } x\neq 0\,,\\ 1 & \text{αν } x=0\,.\end{cases}$ Συνεχής για κάθε $x\neq 0$. Αιρόμενη ασυνέχεια στο 0.

Άσκηση 6.4 Δείξτε οτι οι ακόλουθες εξισώσεις έχουν μία λύση στο $\mathbb{R}$.

α΄. $x(x-1)^2=1$,

β΄. $\sqrt{x}+\sqrt{1+x}=4$,

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. $x(x-1)^2 = 1$. Η συνάρτηση $f(x) = x(x-1)^2 - 1$ είναι συνεχής. $f(0) = -1$, $f(2) = 1$. Άρα η εξίσωση έχει μία λύση στο διάστημα $[0,\, 2]$. (Αυτή δεν είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης.)

β'. $\sqrt{x} + \sqrt{1+x} = 4$. Η εξίσωση έχει μία λύση στο διάστημα $[0,\, 4]$.

Άσκηση 6.5 Έχουν οι συναρτήσεις $f(x) = \sin \pi x$ και $g(x) = \sin 2\pi x$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο (ανοικτό) διάστημα $(0,\, 1)$;

Απάντηση - Υπόδειξη.
Η f έχει μέγιστη τιμή 1 στο $x = \frac{1}{2}$. Δεν έχει ελάχιστη τιμή στο $(0,\, 1)$.
Η g έχει μέγιστη τιμή 1 στο $x = \frac{1}{4}$ και ελάχιστη τιμή -1 στο $x = \frac{3}{4}$.

Άσκηση 6.6 Αποδείξτε οτι η εξίσωση $2e^x = 3x + 4$ έχει δύο λύσεις στο $\mathbb{R}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Η συνάρτηση $f(x) = 2e^x - 3x - 4$ είναι συνεχής. $f(-2) > 0$, $f(0) < 0$ και $f(9) > 0$. Άρα η εξίσωση έχει (τουλάχιστον) δύο λύσεις.

Άσκηση 6.7 Βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων:

α'. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 13$,

β'. $g(x) = e^x + x$,

γ'. $h(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$,

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 13$. Η συνάρτηση είναι πολυωνυμική, άρτιου βαθμού, με θετικό το συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου. Άρα το σύνολο τιμών είναι διάστημα της μορφής $[m,\, +\infty)$, όπου m είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης. Εξετάζοντας το τριώνυμο $y^2 - 6y + 13$ βρίσκουμε οτι η ελάχιστη τιμή λαμβάνεται όταν $x = \pm\sqrt{3}$ και είναι 4. Άρα το πεδίο τιμών είναι $[4,\, +\infty)$.

β'. $g(x) = e^x + x$. Σύνολο τιμών $\mathbb{R}$.

γ'. $h(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$. Σύνολο τιμών $(0,\, 1)$.

Άσκηση 6.8 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1 - 2^{1/x}}{1 + 2^{1/x}}$. Μπορεί να οριστεί η τιμή της f στο 0 έτσι ώστε να είναι συνεχής.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Όχι. Τα μονόπλευρα όρια στο 0 είναι διαφορετικά.

Άσκηση 6.9 Δείξτε οτι

α'. η $f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη στο $(0, +\infty)$.

β'. η $g(x) = \frac{1}{x+1}\sin\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη στο $(0, +\infty)$ αλλά δεν έχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στο $(0, +\infty)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. η $f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη στο $(0, +\infty)$. Αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες αριθμών x_i και y_j τέτοιες ώστε $\lim_{i\to\infty} f(x_i) = +\infty$ και $\lim_{j\to\infty} f(y_j) = -\infty$.

β'. η $g(x) = \frac{1}{x+1}\sin\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη στο $(0, +\infty)$ αλλά δεν έχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στο $(0, +\infty)$. Είναι φραγμένη, αφού $\left|\frac{1}{x+1}\sin\frac{1}{x}\right| = \left|\frac{1}{x+1}\right| \left|\sin\frac{1}{x}\right| < 1$.
Για να δείξουμε οτι η συνάρτηση δεν λαμβάνει μέγιστη τιμή, αρκεί να δείξουμε οτι για κάθε $x_1 > 0$ υπάρχει $x_2 > 0$ τέτοιο ώστε $g(x_2) > g(x_1)$. Γνωρίζουμε οτι $g(x_1) < \frac{1}{x+1}$. Θεωρούμε $n \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $x_2 = \frac{2}{(4n+1)\pi} < x_1$. Τότε $g(x_2) = \frac{1}{x_2+1} > \frac{1}{x_1+1} \geq f(x_1)$.

Άσκηση 6.10 Υποθέτουμε οτι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και οτι $(f(x))^2 = x$ για κάθε $x > 0$. Δείξτε οτι είτε $f(x) = \sqrt{x}$ για κάθε $x > 0$, είτε $f(x) = -\sqrt{x}$ για κάθε $x > 0$.