ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Τμήμα Β

Φυλλάδιο Προβλημάτων 6

Τρίτη 10/11/2015

Άσκηση 6.1 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 3 & \text{αν } x \in [1,\, 2]\,, \\ -2x + 7 & \text{αν } x \in (2,\, 3]\,. \end{cases}$$

α΄. Σχεδιάστε το γράφημα της f.

β΄. Δείξτε οτι η f δεν είναι μονότονη.

γ΄. Δείξτε οτι η f είναι 1 προς 1.

δ΄. Βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}, δηλαδή βρείτε το πεδίο ορισμού της και τον τύπο που την ορίζει.

Ορισμός

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f\,:\,A \longrightarrow \mathbb{R}$ και ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχουν αριθμοί a και b με $a < x_0 < b$, τέτοιοι ώστε το σύνολο $(a,\, b) \subseteq A$. Λέμε οτι η συνάρτηση f **είναι συνεχής στο** x_0 εάν το όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 υπάρχει και είναι ίσο με $f(x_0)$, δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Άσκηση 6.2 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{|x-4|} & \text{αν } x \neq 4\,, \\ a & \text{αν } x = 4\,. \end{cases}$$

Μπορούμε να δώσουμε τιμή στο a ώστε να είναι η f συνεχής στο $x = 4$;

Άσκηση 6.3 Σε ποιά σημεία είναι συνεχείς οι ακόλουθες συναρτήσεις;

α΄. $f(x) = \left| x - [x] - \dfrac{1}{2} \right|$,

β΄. $g(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \leq 0\,, \\ \frac{1}{x} & \text{αν } x > 0\,, \end{cases}$

γ′. $h(x) = \begin{cases} x^3 & \text{αν } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{αν } x = 0\,. \end{cases}$

Σε ποιές περιπτώσεις μπορεί να αρθεί η ασυνέχεια αλλάζοντας την τιμή της συνάρτησης στο σημείο που δεν είναι συνεχής.

Άσκηση 6.4 Δείξτε οτι οι ακόλουθες εξισώσεις έχουν μία λύση στο $\mathbb{R}$.

α′. $x(x-1)^2 = 1$,

β′. $\sqrt{x} + \sqrt{1+x} = 4$,

Άσκηση 6.5 Έχουν οι συναρτήσεις $f(x) = \sin \pi x$ και $g(x) = \sin 2\pi x$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο (ανοικτό) διάστημα $(0,\, 1)$;

Άσκηση 6.6 Αποδείξτε οτι η εξίσωση $2e^x = 3x + 4$ έχει δύο λύσεις στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 6.7 Βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων:

α′. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 13$,

β′. $g(x) = e^x + x$,

γ′. $h(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$,

Άσκηση 6.8 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1 - 2^{1/x}}{1 + 2^{1/x}}$. Μπορεί να οριστεί η τιμή της f στο 0 έτσι ώστε να είναι συνεχής.

Άσκηση 6.9 Δείξτε οτι

α′. η $f(x) = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}$ δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη στο $(0,\, +\infty)$.

β′. η $g(x) = \dfrac{1}{x+1} \sin \dfrac{1}{x}$ είναι φραγμένη στο $(0,\, +\infty)$ αλλά δεν έχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στο $(0,\, +\infty)$.

Άσκηση 6.10 Υποθέτουμε οτι η f είναι συνεχής στο $(0,\, +\infty)$ και οτι $(f(x))^2 = x$ για κάθε $x > 0$. Δείξτε οτι είτε $f(x) = \sqrt{x}$ για κάθε $x > 0$, είτε $f(x) = -\sqrt{x}$ για κάθε $x > 0$.