

## MEM101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι Τμήμα Β

### Φυλλάδιο Προβλημάτων 7

Τρίτη 17/11/2015

#### Ορισμός

Θεωρούμε μία συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  και ένα σημείο  $x_0 \in A$  για το οποίο υπάρχουν  $a$  και  $b$  τέτοια ώστε  $a < x < b$  και  $(a, b) \subseteq A$ . Υποθέτουμε ότι υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda$ . Η **εφαπτομένη** στο γράφημα της  $f$  στο σημείο  $(x_0, f(x_0))$  είναι η ευθεία με εξίσωση

$$y = f(x_0) + \lambda(x - x_0).$$

**Άσκηση 7.1** Βρείτε τις εφαπτόμενες στο γράφημα της συνάρτησης  $f(x) = x^2$  που διέρχονται από το σημείο  $(4, 1)$ .

#### Απάντηση - Υπόδειξη.

Η εφαπτομένη στο  $(a, a^2)$  έχει εξίσωση  $y = a^2 + 2a(x - a)$ . Για να περνάει από το σημείο  $(4, 1)$  πρέπει  $a = 4 \pm \sqrt{15}$ .

**Άσκηση 7.2** Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{x+1}$ , στο σημείο  $(a, \sqrt{a+1})$  για  $a > -1$ .

Βρείτε τις εφαπτόμενες στο γράφημα της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{x+1}$  που διέρχονται από το σημείο  $(2, 2)$ .

#### Απάντηση - Υπόδειξη.

$y = \sqrt{a+1} + \frac{1}{2\sqrt{a+1}}(2 - a)$ , Διέρχεται από το  $(2, 2)$  για  $a = 0$  ή  $a = 8$ .

#### Ορισμός

Θεωρούμε μία συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  και ένα σημείο  $x_0 \in A$  για το οποίο υπάρχουν  $a$  και  $b$  τέτοια ώστε  $a < x < b$  και  $(a, b) \subseteq A$ . Εάν υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  (ή  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ ) λέμε ότι η  $f$  είναι **παραγωγίσιμη** στο  $x_0$ . Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος** της  $f$  στο  $x_0$  και συμβολίζεται  $f'(x_0)$  ή  $Df(x_0)$  ή  $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0}$ .

Εάν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, λέμε ότι η  $f$  είναι **παραγωγίσιμη**, και η συνάρτηση  $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$  ονομάζεται **παράγωγος συνάρτηση** της  $f$ .

Με ανάλογο τρόπο, όταν το πεδίο ορισμού της  $f$  περιέχει ένα διάστημα  $(a, x_0]$  ορίζεται η **παράγωγος από τα αριστερά** στο  $x_0$ ,  $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , και όταν το πεδίο

ορισμού της  $f$  περιέχει ένα διάστημα  $[x_0, b)$  ορίζεται η παράγωγος από τα δεξιά στο  $x_0$ ,  $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

**Άσκηση 7.3** Βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

$$\alpha'. f(x) = \frac{x}{1 - x^2},$$

$$\beta'. g(x) = \cos \sqrt{x^2 + 1},$$

$$\gamma'. h(x) = \cot x = \frac{1}{\tan x},$$

$$\delta'. k(x) = \left( \frac{x + 1}{x - 1} \right)^2,$$

$$\epsilon'. \ell(x) = \sin(x^n),$$

$$\varphi'. p(x) = (\sin x)^n,$$

$$\zeta'. q(x) = (\tan x)^n,$$

$$\eta'. r(x) = \tan(x^n),$$

$$\theta'. s(y) = \frac{y^3 - y + 4 \sin y}{y^2 + \sin y + 2},$$

$$\iota'. t(y) = \sqrt[n]{1 + \cos y},$$

$$\omega\alpha'. w(u) = \frac{(\sin u)^3 - 3(\sin u)^2 + 1}{(\sin u)^2 + 4 \sin u + 4}.$$

**Άσκηση 7.4** Βρείτε την παράγωγο από τα αριστερά και την παράγωγο από τα δεξιά της συνάρτησης  $f(x) = |\sin x|$ . Είναι η  $f$  παραγωγίσιμη στο 0; Εξετάστε εάν είναι παραγωγίσιμες στο 0 οι συναρτήσεις  $g(x) = |x \sin x|$  και  $h(x) = |x^2 \sin x|$ .

**Απάντηση - Υπόδειξη.**

Υπολογίστε τις παραγώγους από τα δεξιά και από τα αριστερά. Η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Η  $g$  και η  $h$  είναι.

**Άσκηση 7.5** Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{εάν } x \neq 0, \\ 0, & \text{εάν } x = 0. \end{cases}$$

Υπολογίστε την παράγωγο της  $f$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Είναι η παράγωγος συνεχής στο 0;

**Απάντηση - Υπόδειξη.**

Για  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ .  
 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ , το όριο δεν υπάρχει, άρα η παράγωγος δεν είναι συνεχής στο 0.

**Άσκηση 7.6** Αποδείξτε ότι η παράγωγος μίας άρτιας συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση. (Άρτια είναι μία συνάρτηση όταν για κάθε  $x$ ,  $f(-x) = f(x)$ , περιττή όταν  $f(-x) = -f(x)$ .)

**Απάντηση - Υπόδειξη.**

Παραγωγίστε τις σχέσεις  $f(-x) = f(x)$  και  $f(-x) = -f(x)$ .

**Άσκηση 7.7** Κάποια χρονική στιγμή η ακτίνα ενός κυκλικού δίσκου έχει μήκος  $r$  και ρυθμό μεταβολής ως προς το χρόνο  $s$ . Υπολογίστε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του κύκλου την ίδια χρονική στιγμή.

**Απάντηση - Υπόδειξη.**

$E'(t) = 2\pi r s$ .

**Άσκηση 7.8** Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1, & \text{εάν } x \leq 0, \\ ax + b, & \text{εάν } x > 0. \end{cases}$$

Βρείτε τιμή του  $b$  ώστε η  $f(x)$  να είναι συνεχής στο 0. Βρείτε τιμή του  $a$  ώστε η  $f(x)$  να είναι παραγωγίσιμη στο 0.

**Απάντηση - Υπόδειξη.**

Συνεχής όταν  $b = 1$ . Παραγωγίσιμη όταν  $b = 1$  και  $a = 1$ .