ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Τμήμα Β

Φυλλάδιο Προβλημάτων 7

Τρίτη 17/11/2015

Ορισμός

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f\ : A \longrightarrow \mathbb{R}$ και ένα σημείο $x_0 \in A$ για το οποίο υπάρχουν a και b τέτοια ώστε $a < x < b$ και $(a,\, b) \subseteq A$. Υποθέτουμε οτι υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lambda$. Η **εφαπτομένη** στο γράφημα της f στο σημείο $(x_0,\, f(x_0))$ είναι η ευθεία με εξίσωση

$$y = f(x_0) + \lambda(x - x_0)\,.$$

Άσκηση 7.1 Βρείτε τις εφαπτόμενες στο γράφημα της συνάρτησης $f(x) = x^2$ που διέρχονται από το σημείο $(4,\, 1)$.

Άσκηση 7.2 Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x+1}$, στο σημείο $(a,\, \sqrt{a+1})$ για $a > -1$.
Βρείτε τις εφαπτόμενες στο γράφημα της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x+1}$ που διέρχονται από το σημείο $(2,\, 2)$.

Ορισμός

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f\ : A \longrightarrow \mathbb{R}$ και ένα σημείο $x_0 \in A$ για το οποίο υπάρχουν a και b τέτοια ώστε $a < x < b$ και $(a,\, b) \subseteq A$. Εάν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (ή $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$) λέμε οτι η f είναι **παραγωγίσιμη** στο x_0. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος** της f στο x_0 και συμβολίζεται $f'(x_0)$ ή $Df(x_0)$ ή $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0}$.
Εάν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, λέμε οτι η f είναι **παραγωγίσιμη**, και η συνάρτηση $f'\ : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται **παράγωγος συνάρτηση** της f.
Με ανάλογο τρόπο, όταν το πεδίο ορισμού της f περιέχει ένα διάστημα $(a,\, x_0]$ ορίζεται η **παράγωγος από τα αριστερά** στο x_0, $f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, και όταν το πεδίο ορισμού της f περιέχει ένα διάστημα $[x_0,\, b)$ ορίζεται η **παράγωγος από τα δεξιά** στο x_0, $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Άσκηση 7.3 Βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

α΄. $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$,

β′. $g(x) = \cos\sqrt{x^2+1}$,

γ′. $h(x) = \cot x = \dfrac{1}{\tan x}$,

δ′. $k(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$,

ε′. $\ell(x) = \sin(x^n)$,

ϛ′. $p(x) = (\sin x)^n$,

ζ′. $q(x) = (\tan x)^n$,

η′. $r(x) = \tan(x^n)$,

ϑ′. $s(y) = \dfrac{y^3 - y + 4\sin y}{y^2 + \sin y + 2}$,

ι′. $t(y) = \sqrt[n]{1+\cos y}$,

ια′. $w(u) = \dfrac{(\sin u)^3 - 3(\sin u)^2 + 1}{(\sin u)^2 + 4\sin u + 4}$.

Άσκηση 7.4 Βρείτε την παράγωγο από τα αριστερά και την παράγωγο από τα δεξιά της συνάρτησης $f(x) = |\sin x|$. Είναι η f παραγωγίσιμη στο 0;
Εξετάστε εάν είναι παραγωγίσιμες στο 0 οι συναρτήσεις $g(x) = |x\sin x|$ και $h(x) = |x^2 \sin x|$.

Άσκηση 7.5 Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{εάν } x \neq 0, \\ 0, & \text{εάν } x = 0. \end{cases}$$

Υπολογίστε την παραγωγο της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι η παράγωγος συνεχής στο 0;

Άσκηση 7.6 Αποδείξτε οτι η παράγωγος μίας άρτιας συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση. (Άρτια είναι μία συνάρτηση όταν για κάθε x, $f(-x) = f(x)$, περιττή όταν $f(-x) = -f(x)$.)

Άσκηση 7.7 Κάποια χρονική στιγμή η ακτίνα ενός κυκλικού δίσκου έχει μήκος r και ρυθμό μεταβολής ως προς το χρόνο s. Υπολογίστε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του κύκλου την ίδια χρονική στιγμή.

Άσκηση 7.8 Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1, & \text{εάν } x \leq 0, \\ ax + b, & \text{εάν } x > 0. \end{cases}$$

Βρείτε τιμή του b ώστε η $f(x)$ να είναι συνεχής στο 0. Βρείτε τιμή του a ώστε η $f(x)$ να είναι παραγωγίσιμη στο 0.