ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Τμήμα Β

Φυλλάδιο Προβλημάτων 8

Τρίτη 24/11/2015

Άσκηση 8.1 Βρείτε τα ακρότατα (ολικά ή τοπικά) των συναρτήσεων

α′. $f(x) = 4 - x^2$, στο διάστημα $-3 \leq x \leq 1$.

β′. $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$, στο διάστημα $0 \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$.

γ′. $h(x) = 2x^2 - 8x + 9$, στο $\mathbb{R}$.

δ′. $k(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$, στο $\mathbb{R}$.

ε′. $p(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, στο πεδίο ορισμού.

ϛ′. $q(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, στο πεδίο ορισμού.

ζ′. $r(x) = x^{2/3}(x + 2)$, στο πεδίο ορισμού. (Προσέξτε οτι $x^{2/3}$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.)

Απάντηση - Υπόδειξη.

α′. $f(x) = 4 - x^2$, στο διάστημα $-3 \leq x \leq 1$. Ολικό ελάχιστο $f(-3) = -5$. Ολικό μέγιστο $f(0) = 4$.

β′. $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$, στο διάστημα $0 \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$. Μέγιστο 1 στο $x = \frac{\pi}{4}$, ελάχιστο -1 στο $x = \frac{5\pi}{4}$.

γ′. $h(x) = 2x^2 - 8x + 9$, στο $\mathbb{R}$. Ελάχιστο στο $x = 2$, δεν υπάρχει μέγιστο.

δ′. $k(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$, στο $\mathbb{R}$. Δεν υπάρχουν ακρότατες τιμές.

ε′. $p(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, στο πεδίο ορισμού. Πεδίο ορισμού $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$. Ελάχιστο στα $x = \pm 1$. Δεν υπάρχει μέγιστο.

ϛ′. $q(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, στο πεδίο ορισμού. Πεδίο ορισμού $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$. Ελάχιστο στα $x = 0$. Δεν υπάρχει μέγιστο.

ζ'. $r(x) = x^{2/3}(x+2)$, στο πεδίο ορισμού. (Προσέξτε οτι $x^{2/3}$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.) Κρίσιμα σημεία στο $x = 0$ και $x = -\frac{4}{5}$. Τοπικό ελάχιστο στο $x = 0$ και τοπικό μέγιστο στο $x = -\frac{4}{5}$. Δεν έχει ολικά ακρότατα.

Άσκηση 8.2 Εάν $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$, ποιά είναι τα κρίσιμα σημεία, τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f;

Απάντηση - Υπόδειξη.
Η f' μηδενίζεται για $x = 1$ και $x = -2$. Στο $x = -2$ η f έχει τοπικό ελάχιστο. Στο $x = 1$ έχει σημείο καμπής. Η f είναι φθίνουσα στο $(-\infty, -2)$ και αύξουσα στο $(-2, +\infty)$.

Άσκηση 8.3 Ελέγξτε εάν οι ακόλουθες συναρτήσεις πληρούν τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο αντίστοιχο διάστημα.

α'. $f(x) = x^{2/3}$, στο διάστημα $[-1, 8]$.

β'. $g(x) = x^{4/5}$, στο διάστημα $[0, 1]$.

γ'. $h(t) = \sqrt{t(1-t)}$, στο διάστημα $[0, 1]$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. $f(x) = x^{2/3}$, στο διάστημα $[-1, 8]$. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 8]$, και η παράγωγος υπάρχει σε κάθε σημείο του $(-1, 8)$, $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. Προσέξτε οτι η παράγωγος στο 0 είναι $+\infty$, αλλά αυτή η δυνατότητα περιλαμβάνεται στις προϋποθέσεις του ΘΜΤ, Σημειώσεις Παπαδημητράκη, σελ. 195. Συχνά το ΘΜΤ διατυπώνεται με την ισχυρότερη προϋπόθεση οτι η f είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα, δηλαδή η παράγωγος σε κάθε σημείο *υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός*.

β'. $g(x) = x^{4/5}$, στο διάστημα $[0, 1]$. Τις πληροί.

γ'. $h(t) = \sqrt{t(1-t)}$, στο διάστημα $[0, 1]$. Τις πληροί.

Άσκηση 8.4 Χρησιμοποιήστε το ΘΜΤ για να δείξετε οτι

α'. $|\sin b - \sin a| \leq |b-a|$. Ισχύει η γνήσια ανισότητα;

β'. $e^x > x+1$, για $x > 0$.

γ'. $\log x + 1 < x$, για $x > 1$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. $|\sin b - \sin a| \leq |b-a|$. Ισχύει η γνήσια ανισότητα; Από το ΘΜΤ στο διάστημα $[a, b]$ έχουμε $\frac{|\sin b - \sin a|}{|b-a|} = \cos\xi \leq 1$.
Ισχύει και η γνήσια ανισότητα: Εάν $b - a > 2$ τότε ισχύει $|\sin b - \sin a| < |b-a|$. Εάν $b - a \leq 2$ υπάρχει το πολύ ένας φυσικός αριθμός k για τον οποίο $k\pi \in (a, b)$.

Πρέπει να δείξουμε οτι και σε αυτή την περίπτωση ο ξ που δίδει το ΘΜΤ δεν είναι ο $k\pi$, και συνεπώς οτι $|\cos\xi| < 1$. Για να το δείξουμε αυτό εφαρμόζουμε το ΘΜΤ στα διαστήματα $[a,\, k\pi]$ και $[k\pi,\, b]$.

β΄. $e^x > x + 1$, για $x > 0$. Δείχνουμε οτι $e^x - x - 1$ είναι γνήσια αύξουσα για $x > 0$.

γ΄. $\log x + 1 < x$, για $x > 1$. Δείχνουμε οτι $\log x - x + 1$ είναι γνήσια φθίνουσα για $x > 1$.

Άσκηση 8.5 Χρησιμοποιήστε πεπλεγμένη παραγώγιση για να βρείτε την κλίση της εφαπτομένης των παρακάτω καμπυλών

α΄. $(x + y)^3 + (x + y)^4 = x^2 + y^2 + 22$, στο σημείο $(1,\, 1)$.

β΄. $x^2y^2 + 1 = x^2 + y^2$, στο σημείο $(2,\, 1)$.

γ΄. $3x^2 + xy + y^2 = 9$, στο σημείο $(1,\, 2)$.

δ΄. $\cos x + \sin y = xy$, στο σημείο $(\frac{\pi}{2},\, 0)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α΄. $(x + y)^3 + (x + y)^4 = x^2 + y^2 + 22$, στο σημείο $(1,\, 1)$. -1.

β΄. $x^2y^2 + 1 = x^2 + y^2$, στο σημείο $(2,\, 1)$. 0.

γ΄. $3x^2 + xy + y^2 = 9$, στο σημείο $(1,\, 2)$. $-\frac{8}{5}$.

δ΄. $\cos x + \sin y = xy$, στο σημείο $(\frac{\pi}{2},\, 0)$. $-\frac{2}{\pi-2}$.

Άσκηση 8.6 Θέλουμε να βγάλουμε μια ξύλινη δοκό με ορθογώνια διατομή από έναν κυλινδρικό κορμό ακτίνας 30 cm. Εάν η διατομή έχει πλάτος κ και ύψος λ, τότε η αντοχή της δοκού είναι ανάλογη του $\kappa\lambda^2$.
Ποιές διαστάσεις έχει η δοκός με την μεγαλύτερη αντοχή;

Απάντηση - Υπόδειξη.
Για δεδομένο πλάτος $\kappa \in (0,\, 60)$ η μέγιστη τιμή του ύψους λ δίδεται από τη σχέση $\kappa^2 + \lambda^2 = 3600$. Συνεπώς θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $\kappa(3600 - \kappa^2)$ για $\kappa \in (0,\, 60)$. Βρίσκουμε $\kappa = 20\sqrt{3}$ και $\lambda = 20\sqrt{6}$.

Άσκηση 8.7 Ένα άγαλμα ύψους 35 μέτρων βρίσκεται πάνω σε μια βάση ύψους 25 μέτρων. Η καλύτερη θέση για να φωτογραφίσουμε το άγαλμα είναι αυτή που δίδει τη μεγαλύτερη οπτική γωνία. Σε ποιά απόσταση από τη βάση του αγάλματος πρέπει να τοποθετήσουμε την κάμερα στο έδαφος για να έχουμε την καλύτερη εικόνα.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Εάν ο φωτογράφος βρίσκεται σε απόσταση x από τη βάση, η γωνία από τον φωτογράφο στην κορυφή του αγάλματος είναι $\operatorname{Arctan}\frac{60}{x}$ (αγνοούμε το ύψος του φωτογράφου). Η γωνία από τον φωτογράφο στη βάση του αγάλματος είναι $\operatorname{Arctan}\frac{25}{x}$. Συνεπώς θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $\operatorname{Arctan}\frac{60}{x} - \operatorname{Arctan}\frac{25}{x}$. Βρίσκουμε $x = 10\sqrt{15}$.

Άσκηση 8.8 Χρησιμοποιήστε πεπλεγμένη παραγώγιση για να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης ευθείας στην καμπύλη με εξίσωση

$$\log(xy) = 2x$$

στο σημείο $(1,\, e^2)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Εφαπτομένη $y = 1 + e^2(x-1)$, κάθετος $y = 1 - \frac{1}{e^2}(x-1)$.

Άσκηση 8.9 Δείξτε οτι οι ακόλουθες εξισώσεις έχουν ακριβώς μία ρίζα στο συγκεκριμένο διάστημα.

α΄. $x^4 + 3x + 1 = 0$, στο διάστημα $[-2,\, -1]$.

β΄. $2x^3 - 3x^2 + 12x + 6 = 0$, στο διάστημα $[-1,\, 0]$.

γ΄. $(x+1)3^{x+1} = 1$, στο διάστημα $[-1,\, 0]$.