

MEM101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
Τμήμα Β

Φυλλάδιο Προβλημάτων 8

Τρίτη 24/11/2015

Άσκηση 8.1 Βρείτε τα ακρότατα (ολικά ή τοπικά) των συναρτήσεων

α'. $f(x) = 4 - x^2$, στο διάστημα $-3 \leq x \leq 1$.

β'. $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$, στο διάστημα $0 \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$.

γ'. $h(x) = 2x^2 - 8x + 9$, στο \mathbb{R} .

δ'. $k(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$, στο \mathbb{R} .

ε'. $p(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, στο πεδίο ορισμού.

ς'. $q(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, στο πεδίο ορισμού.

ζ'. $r(x) = x^{2/3}(x + 2)$, στο πεδίο ορισμού. (Προσέξτε ότι $x^{2/3}$ ορίζεται σε όλο το \mathbb{R} .)

Άσκηση 8.2 Εάν $f'(x) = (x - 1)^2(x + 2)$, ποιά είναι τα κρίσιμα σημεία, τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f ;

Άσκηση 8.3 Ελέγξτε εάν οι ακόλουθες συναρτήσεις πληρούν τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο αντίστοιχο διάστημα.

α'. $f(x) = x^{2/3}$, στο διάστημα $[-1, 8]$.

β'. $g(x) = x^{4/5}$, στο διάστημα $[0, 1]$.

γ'. $h(t) = \sqrt{t(1 - t)}$, στο διάστημα $[0, 1]$.

Άσκηση 8.4 Χρησιμοποιήστε το ΘΜΤ για να δείξετε ότι

α'. $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$. Ισχύει η γνήσια ανισότητα;

β'. $e^x > x + 1$, για $x > 0$.

γ'. $\log x + 1 < x$, για $x > 1$.

Άσκηση 8.5 Χρησιμοποιήστε πεπλεγμένη παραγωγή για να βρείτε την κλίση της εφαπτομένης των παρακάτω καμπυλών

α'. $(x + y)^3 + (x + y)^4 = x^2 + y^2 + 22$, στο σημείο $(1, 1)$.

β'. $x^2y^2 + 1 = x^2 + y^2$, στο σημείο $(2, 1)$.

γ'. $3x^2 + xy + y^2 = 9$, στο σημείο $(1, 2)$.

δ'. $\cos x + \sin y = xy$, στο σημείο $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Άσκηση 8.6 Θέλουμε να βγάλουμε μια ξύλινη δοκό με ορθογώνια διατομή από έναν κυλινδρικό κορμό ακτίνας 30 cm. Εάν η διατομή έχει πλάτος κ και ύψος λ , τότε η αντοχή της δοκού είναι ανάλογη του $\kappa\lambda^2$.

Ποιές διαστάσεις έχει η δοκός με την μεγαλύτερη αντοχή;

Άσκηση 8.7 Ένα άγαλμα ύψους 35 μέτρων βρίσκεται πάνω σε μια βάση ύψους 25 μέτρων. Η καλύτερη θέση για να φωτογραφίσουμε το άγαλμα είναι αυτή που δίδει τη μεγαλύτερη οπτική γωνία. Σε ποιά απόσταση από τη βάση του αγάλματος πρέπει να τοποθετήσουμε την κάμερα στο έδαφος για να έχουμε την καλύτερη εικόνα.

Άσκηση 8.8 Χρησιμοποιήστε πεπλεγμένη παραγωγή για να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης ευθείας στην καμπύλη με εξίσωση

$$\log(xy) = 2x$$

στο σημείο $(1, e^2)$.

Άσκηση 8.9 Δείξτε ότι οι ακόλουθες εξισώσεις έχουν ακριβώς μία ρίζα στο συγκεκριμένο διάστημα.

α'. $x^4 + 3x + 1 = 0$, στο διάστημα $[-2, -1]$.

β'. $2x^3 - 3x^2 + 12x + 6 = 0$, στο διάστημα $[-1, 0]$.

γ'. $(x + 1)3^{x+1} = 1$, στο διάστημα $[-1, 0]$.