ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Τμήμα Β

Φυλλάδιο Προβλημάτων 9

Τρίτη 1/12/2015

Άσκηση 9.1 Δείξτε οτι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{εάν } x \geq 0, \\ -x^2, & \text{εάν } x < 0. \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και οτι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη για $x \neq 0$, αλλά δεν έχει δεύτερη παράγωγο στο 0.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Τα πλευρικά όρια της f' στο 0 είναι ίσα, ενώ τα πλευρικά όρια της f'' είναι διαφορατικά.

Άσκηση 9.2 Εφαρμόστε το κριτήριο δεύτερης παραγώγου για να βρείτε τα σημεία τοπικού ακροτάτου των συναρτήσεων:

α′. $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 3$,

β′. $g(x) = xe^x$,

γ′. $h(x) = x \log x$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α′. $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 3$. Τοπικό ελάχιστο στο $\frac{4+\sqrt{13}}{3}$, τοπικό μέγιστο στο $\frac{4-\sqrt{13}}{3}$.

β′. $g(x) = xe^x$. Τοπικό ελάχιστο στο -1.

γ′. $h(x) = x \log x$. Τοπικό ελάχιστο στο e^{-1}.

Ορισμός

Μία συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή στο διάστημα $[a, b] \subseteq A$ εάν για κάθε x_1, x_2 με $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ και κάθε $x \in [x_1, x_2]$, ισχύει

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \,.$$

Άσκηση 9.3 Για τις ακόλουθες συναρτήσεις βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτές ή κοίλες, καθώς και τα σημεία καμπής:

α′. $p(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$,

β′. $f(x) = x^2(x-1)^2$,

γ′. $g(x) = \frac{x}{x+1}$,

δ′. $h(x) = \frac{1}{\log x}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α′. $p(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$. Σημείο καμπής στο 1, κυρτή για $x > 1$, κοίλη για $x < 1$.

β′. $f(x) = x^2(x-1)^2$. Σημεία καμπής στα $\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$, κυρτή για $x < \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ και $x > \frac{3+\sqrt{3}}{6}$, κοίλη για $\frac{3-\sqrt{3}}{6} < x < \frac{3+\sqrt{3}}{6}$.

γ′. $g(x) = \frac{x}{x+1}$. Σημείο καμπής στο -1, κυρτή για $x < -1$, κοίλη για $x > -1$.

δ′. $h(x) = \frac{1}{\log x}$. Ορίζεται στο $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. Σημείο καμπής στο e^{-2}. Κυρτή για $x > 1$ και $0 < x < e^{-2}$, κοίλη για $e^{-2} < x < 1$.

Άσκηση 9.4 Χρησιμοποιήστε τους κανόνες de l'Hôpital για να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

α′) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$, β′) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2-x}}$,

γ′) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{e^{2x}-1}$, δ′) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\log(\log x)}{\log x}$,

ε′) $\lim_{x\to 0+} \sin x \log x$ ϛ′) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\log x}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α′. $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6} = -1,$$

β′. $$\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2-x}} = 0,$$

γ′. $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{e^{2x}-1} = \frac{1}{2},$$

δ′. $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(\log x)}{\log x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\log x} = 0,$$

ε′. $$\lim_{x\to 0+} \sin x \log x = \lim_{x\to 0+} (-x\cos x(\log x)^2) = -(\lim_{x\to 0+} \cos x)(\lim_{x\to 0+} (x(\log x)^2)) =$$
$$= -\lim_{x\to 0+}(2x\log x) = 0,$$

ϛ′. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\log x} = \lim_{y\to 0+} \frac{e^y-1}{y} = 1.$

Άσκηση 9.5 Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

α′. $\int_{-1}^{2} (2-3x+4x^2)dx,$

β′. $\int_{-2}^{4} (3x-2^x)dx,$

γ′. $\int_{\pi}^{2\pi} (3\cos x - 2\sin x)dx,$

δ′. $\int_{1}^{3} \left(\frac{2}{x} - x^2 + x^{\sqrt{2}} + 3e^x\right) dx,$

ε′. $\int_{0}^{\pi} [x]dx.$

Απάντηση - Υπόδειξη.

ε′. $\int_{0}^{\pi} [x]dx = 0+1+2+3(\pi-3).$

Άσκηση 9.6 Δείξτε οτι για κάθε n, $\int_0^{\pi} (\sin x)^{n+1}dx \leq \int_0^{\pi} (\sin x)^n dx.$
(Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα).

Απάντηση - Υπόδειξη.
Για $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq \sin x \leq 1$.

Άσκηση 9.7 Για τις ακόλουθες συναρτήσεις βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι μονότονες, τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτές ή κοίλες, τα σημεία τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου, τα σημεία καμπής και τις κατακόρυφες και πλάγιες ασύμπτωτες. Χρησιμοποιήστε αυτές τις πληροφορίες για να σχεδιάσετε το γράφημα της συνάρτησης.

α′. $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2},$

β′. $g(x) = e^{-x^2},$

γ′. $h(x) = e^{\frac{1}{x}},$

δ′. $s(x) = x^{\frac{1}{x}},$

ε′. $t(x) = x^x.$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις υπολογίζουμε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης. Εξετάζουμε τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος για να βρούμε τα τοπικά ακρότατα, το πρόσημο της παραγώγου για να βρούμε τα διαστήματα μονοτονίας και το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου για να βρούμε την κυρτότητα του γραφήματος.
Στη συνέχεια δίνουμε τις λεπτομέρειες για τις (α′) και (β′), ενώ για τις υπόλοιπες μόνο την τελική περιγραφή. Συμπληρώστε την αιτιολόγηση και σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων.

α′. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = x - 2 + \dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$. Η συνάρτηση δεν ορίζεται όταν $x = -1$ και μηδενίζεται μόνον όταν $x = 0$. Η ευθεία $y = x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη καθώς $x \to \pm\infty$, και η ευθεία $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη καθώς $x \to -1-$ και $x \to -1+$.
$f'(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2}{(x+1)^3}$. Η παράγωγος μηδενίζεται στο $x = -3$ και στο $x = 0$, είναι θετική για $-\infty < x < -3$, για $-1 < x < 0$ και για $0 < x < +\infty$ και αρνητική για $-3 < x < -1$. Η συνάρτηση είναι αύξουσα για $-\infty < x < -3$ και $-1 < x < +\infty$, ενώ είναι φθίνουσα για $-3 < x < -1$.
$f''(x) = \dfrac{6x}{(x+1)^4}$, η οποία είναι θετική για $x > 0$ και αρνητική για $x < 0$.
Συμπεραίνουμε οτι η f έχει τοπικό μέγιστο στο -3 και σημείο καμπής στο 0, είναι κοίλη για $-\infty < x < -1$ και $-1 < x < 0$, ενώ είναι κυρτή για $x > 0$.

β′. $g(x) = e^{-x^2}$. Η g είναι θετική για κάθε x, και έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$ καθώς $x \to \pm\infty$.
$g'(x) = -2xe^{-x^2}$. Η παράγωγος μηδενίζεται στο $x = 0$, είναι θετική για $x < 0$ και αρνητική για $x > 0$. Άρα η συνάρτηση g είναι αύξουσα για $x < 0$, φθίνουσα για $x > 0$ και έχει μέγιστο στο $x = 0$.
$g''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$. Η δεύτερη παράγωγος μηδενίζεται στα $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, είναι θετική για $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ και αρνητική για $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Άρα η συνάρτηση g είναι κυρτή για $-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$, και είναι κοίλη για $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

γ′. $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$.
$h'(x) = -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.
$h''(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}(\dfrac{1}{x} + 2)$.
Η h έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y = 1$ καθώς $x \to \pm\infty$, και την ευθεία $x = 0$ καθώς $x \to 0+$. Είναι κοίλη για $-\infty < x < -\frac{1}{2}$ και κυρτή για $-\frac{1}{2} < x < 0$ και $0 < x < +\infty$. Είναι φθίνουσα για $-\infty < x < 0$ και για $0 < x < +\infty$, έχει ολικό ελάχιστο 0 στο $x = 0$, και τείνει στο $+\infty$ καθώς $x \to 0+$.

δ′. $s(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\log x}$, ορίζεται για $x > 0$.
$s'(x) = e^{(\frac{1}{x}-2)\log x}(1 - \log x)$.
$s''(x) = e^{(\frac{1}{x}-4)\log x}(1 - 2\log x + (\log x)^2 + 2x\log x - 3x)$.
Η s έχει ασύμπτωτη την ευθεια $y = 1$ καθώς $x \to +\infty$ και ολικό μέγιστο $e^{\frac{1}{e}}$ στο

$x = e$. Η δεύτερη παράγωγος μηδενίζεται σε δύο σημεία x_1 και x_2 που βρίσκονται στα διαστήματα $\frac{1}{e} < x_1 < e$ και $e < x_2 < e^2$. Η s είναι κυρτή για $0 < x < x_1$ και $x_2 < x < +\infty$ και κοίλη για $x_1 < x < x_2$.

ε′. $t(x) = x^x = e^{x \log x}$, ορίζεται για $x > 0$.
$t'(x) = e^{x \log x}(1 + \log x)$.
$t''(x) = e^{x \log x}(1 + 2\log x + (\log x)^2 + \dfrac{1}{x})$.
Η t είναι κυρτή για $x > 0$ και έχει ελάχιστο $e^{-\frac{1}{e}}$ στο $x = \frac{1}{e}$. Καθώς $x \to 0+$, $t(x) \to 1$.