

MEM101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
Τμήμα Β

Φυλλάδιο Προβλημάτων 9

Τρίτη 1/12/2015

Άσκηση 9.1 Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{εάν } x \geq 0, \\ -x^2, & \text{εάν } x < 0. \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ότι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη για $x \neq 0$, αλλά δεν έχει δεύτερη παράγωγο στο 0.

Άσκηση 9.2 Εφαρμόστε το κριτήριο δεύτερης παραγώγου για να βρείτε τα σημεία τοπικού ακροτάτου των συναρτήσεων:

α'. $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 3$,

β'. $g(x) = xe^x$,

γ'. $h(x) = x \log x$.

Ορισμός

Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή στο διάστημα $[a, b] \subseteq A$ εάν για κάθε x_1, x_2 με $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ και κάθε $x \in [x_1, x_2]$, ισχύει

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Άσκηση 9.3 Για τις ακόλουθες συναρτήσεις βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτές ή κοίλες, καθώς και τα σημεία καμπής:

α'. $p(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$,

β'. $f(x) = x^2(x - 1)^2$,

γ'. $g(x) = \frac{x}{x+1}$,

δ'. $h(x) = \frac{1}{\log x}$.

Άσκηση 9.4 Χρησιμοποιήστε τους κανόνες de l'Hôpital για να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

$$\begin{aligned} \alpha') \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}, & \quad \beta') \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \log x}{1 - \sqrt{2 - x}}, \\ \gamma') \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x)}{e^{2x} - 1}, & \quad \delta') \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\log x)}{\log x}, \\ \epsilon') \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \log x & \quad \zeta') \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\log x}. \end{aligned}$$

Άσκηση 9.5 Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned} \alpha'. & \int_{-1}^2 (2 - 3x + 4x^2) dx, \\ \beta'. & \int_{-2}^4 (3x - 2^x) dx, \\ \gamma'. & \int_{\pi}^{2\pi} (3 \cos x - 2 \sin x) dx, \\ \delta'. & \int_1^3 \left(\frac{2}{x} - x^2 + x^{\sqrt{2}} + 3e^x \right) dx, \\ \epsilon'. & \int_0^{\pi} [x] dx. \end{aligned}$$

Άσκηση 9.6 Δείξτε ότι για κάθε n , $\int_0^{\pi} (\sin x)^{n+1} dx \leq \int_0^{\pi} (\sin x)^n dx$.
(Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα).

Άσκηση 9.7 Για τις ακόλουθες συναρτήσεις βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι μονότονες, τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτές ή κοίλες, τα σημεία τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου, τα σημεία καμπής και τις κατακόρυφες και πλάγιες ασύμπτωτες. Χρησιμοποιήστε αυτές τις πληροφορίες για να σχεδιάσετε το γράφημα της συνάρτησης.

$$\begin{aligned} \alpha'. & f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}, \\ \beta'. & g(x) = e^{-x^2}, \\ \gamma'. & h(x) = e^{\frac{1}{x}}, \\ \delta'. & s(x) = x^{\frac{1}{x}}, \\ \epsilon'. & t(x) = x^x. \end{aligned}$$