

## MEM 101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

### Παρατηρήσεις

1. Διαβάστε προσεκτικά τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και αιτιολογημένες.
2. Γράψτε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).
3. Πρέπει να παραδώσετε τα θέματα και όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε.
4. Η εξέταση διαρκεί 150 λεπτά. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ ΝΑ ΕΧΕΤΕ ΚΙΝΗΤΑ ΤΗΛΕΦΩΝΑ Ή ΑΡΙΘΜΟΜΗΧΑΝΕΣ ΜΕΣΑ ΣΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ. Κατά τη διάρκεια της εξέτασης ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ Η ΕΞΟΔΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ. Στα πρώτα 30 λεπτά της εξέτασης απαγορεύεται η έξοδος ή η αποχώρηση από την εξέταση.
5. Οι βαθμοί δίδονται σε παρένθεση. Ο μέγιστος βαθμός είναι 100.

### ΘΕΜΑ 1 (20)

1. Αντικαταστήστε το  $M$  με τον αριθμό μητρώου σας. Βρείτε το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \sqrt[n]{(M)^n + 2015^n}.$$

2. Αποδείξτε ότι η ακολουθία  $b_n$ , με

$$b_1 = 5 \quad \text{και} \quad b_{n+1} = 3\sqrt{b_n} - 1,$$

συγκλίνει, και βρείτε το όριό της.

### ΘΕΜΑ 2 (20)

1. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x + \sqrt{x+1}}{\log(x+1) + \sqrt{x}}.$$

2. Αποδείξτε ότι η εξίσωση  $\sin^2 x = \cos x$  έχει μοναδική λύση στο διάστημα  $[0, \pi]$ .  
Βρείτε ένα διάστημα με μήκος μικρότερο από  $1/3$  στο οποίο η εξίσωση έχει λύση.

**ΘΕΜΑ 3** (25)

1. Ορίζουμε τη συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} e^x - x & \text{όταν } x \geq 0, \\ 1 - x^2 & \text{όταν } x < 0. \end{cases}$   
Εξετάστε εάν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο 0;
2. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = \frac{\log|x+2|}{x+2}$ . Σχεδιάστε το γράφημα της συνάρτησης. Πρέπει να προσδιορίσετε, εάν υπάρχουν, τα ακόλουθα στοιχεία:
- (α') τις τομές με τους άξονες,
  - (β') τις ασύμπτωτες ευθείες,
  - (γ') τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα,
  - (δ') τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη

**ΘΕΜΑ 4** (20)

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

1.  $\int \frac{\log x}{x^{2015}} dx$
2.  $\int_0^1 \frac{x+11}{x^2+6x+11} dx$

**ΘΕΜΑ 5** (20)

1. Βρείτε το όριο της σειράς  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2} + 4}{5^n}$ .
2. Διατυπώστε το Θεώρημα Taylor με τη μορφή Lagrange για το υπόλοιπο, και χρησιμοποιήστε το για να υπολογίσετε την τιμή του  $\sin \frac{3}{10}$  με σφάλμα μικρότερο από  $10^{-3}$ . (Πρέπει να αποδείξετε ότι το σφάλμα είναι μικρότερο από  $10^{-3}$ .)