**Πρόταση 1** *Μία συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Δηλαδή εάν $a_n$ συγκλίνει με όριο $\ell$, υπάρχει πραγματικός αριθμός $M$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|a_n| < M$.*

**Απόδειξη.**

Θέτουμε $\varepsilon = 1$. Αφού η $a_n$ συγκλίνει με όριο $\ell$ υπάρχει φυσικός αριθμός $k$ τέτοιος ώστε για κάθε $n > k$ ισχύει $|a_n - \ell| < 1$, δηλαδή $-1 < a_n - \ell < 1$ και συνεπώς $\ell - 1 < a_n < \ell + 1$.

Αλλά $\ell + 1 \leq |\ell + 1|$, και από τη τριγωνική ανισότητα $|\ell + 1| \leq |\ell| + 1$. Άρα $\ell + 1 \leq |\ell| + 1$.

Επίσης, $\ell \geq -|\ell|$, άρα $\ell - 1 \geq -|\ell| - 1$.

Συμπεραίνουμε οτι

$$-|\ell| - 1 \leq \ell - 1 < a_n < \ell + 1 \leq |\ell| + 1\,.$$

Δηλαδή για κάθε $n > k$ ισχύει $|a_n| < |\ell| + 1$.

Έστω $N = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots\}$ και $M = \max\{N + 1, |\ell| + 1\}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| < M$, δηλαδή η ακολουθία $a_n$ είναι φραγμένη.