Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Προτασιακός Λογισμός

1.1 Εισαγωγή

Με τον όρο Λογική είναι εννοούμε τον κλάδο της φιλοσοφίας που ασχολείται με την μελέτη των συλλογισμών που κάνουν οι άνθρωποι, προσπαθώντας να διατυπώσει κανόνες πότε ένας συλλογισμός είναι έγκυρος και πότε όχι. Ένας συλλογισμός αποτελείται από ένα πεπερασμένο σύνολο προτάσεων της γλώσσας (τίς **υποθέσεις**) και μία τελική πρόταση, το **συμπέρασμα**. Το βασικό σχήμα έγκυρου συλλογισμού που απομονώθηκε από τους αρχαίους χρόνους είναι το παρακάτω:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Αν αληθεύει τό A τότε αληθεύει το B}\\ \text{Το A αληθεύει}\end{array}}{\text{Άρα αληθεύει το B}}$$

Παράδειγμα τέτοιου συλλογισμού είναι το γνωστό:

Αν ο Σωκράτης είναι άνθρωπος τότε είναι θνητός.
Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος.
Άρα: Ο Σωκράτης είναι θνητός.

Εδώ γεννιέται και το εξής πρόβλημα: Ποιές προτάσεις είναι αληθείς και ποιές όχι. Βέβαια ένας συλλογισμός μπορεί να είναι ορθός ακόμα και αν οι υποθέσεις του είναι εντελώς λανθασμένες ή παράλογες. Όμως ένας τέτοιος συλλογισμός (αν και χρήσιμος σε πολλούς ανθρώπους) θα έχει πιθανόν και λανθασμένο συμπέρασμα. Σε αυτές εδώ τις σημειώσεις θα ασχοληθούμε με τέτοια, ζητήματα, δηλαδή τί είναι αλήθεια, τι είναι ψέμμα και τί είναι ένας έγκυρος συλλογισμός (απόδειξη), όχι όμως μέσα σε όλη τη γλώσσα ή σε κάθε κλάδο της ανθρώπινης δραστηριότητας, αλλά μόνο μέσα στα Μαθηματικά.

Είναι φανερό ότι η Λογική απαιτεί περισσότερη προσοχή και ακρίβεια από άλλους φιλοσοφικούς κλάδους.Γι αυτό και αρκετά νωρίς έγιναν απόπειρες για τη μαθηματικοποίησή της. Η πρώτη απόπειρα είναι μια πολύ γενική προσσέγγιση. Σε αυτή δεν θα εξετάσουμε αρχικά τι είναι μία πρόταση. Θα περιοριστούμε να παρατηρήσουμε ότι ότι αν δοθούν κάποιες προτάσεις τότε αυτές μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε (ενώσουμε με κάποιο τρόπο) ώστε να φτιάξουμε νέες ποιό περίπλοκες προτάσεις. Αυτό γίνεται μέσα από τους **συνδέσμους** της γλώσσας. Ένας σύνδεσμος είναι ένα γλωσσικό εργαλείο που συνδέει προτάσεις. Ένας σύνδεσμος μπορεί να συνδέσει ένα συγκεκριμμένο αριθμό προτάσεων κάθε φορά (συνήθως δύο). Αυτός αριθμός λέγεται και το **βάρος** του συνδέσμου. Οι βασικοί σύνδεσμοι που μας ενδιαφέρουν είναι οι παρακάτω:

- Η σύζευξη: ...«και»... που θα συμβολίζεται με το $\wedge$
- Η διάζευξη: ...«ή»... που θα συμβολίζεται με το $\vee$
- Η συνεπαγωγή : «Αν ... τότε....» που θα συμβολίζεται με το $\Rightarrow$
- Η ισοδυναμία: «... είναι ισοδύναμη με την ...» που θα συμβολίζεται με το $\Leftrightarrow$.

Επιπλέον θα θεωρούμε ένα επιπλέον σύμβολο

- Η άρνηση: Όχι... $\neg$, μέσω του οποίου θα παίρνουμε την άρνηση μιας πρότασης.

Έτσι, αν με P, Q συμβολίσουμε τις προτάσεις «Κάνει κρύο», «Φοβάμαι το κρύο» στους συμβολισμούς

$\neg P$, $P \wedge Q$,$P \vee Q$,$P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$

αντιστοιχούν οι προτάσεις:

«Δεν κάνει κρύο.»

«Κάνει κρύο και φοβάμαι το κρύο.»

«Κάνει κρύο ή φοβάμαι το κρύο.»

« Αν κάνει κρύο τότε φοβάμαι το κρύο.»

«Κάνει κρύο ισοδυναμεί με το φοβάμαι το κρύο»

Κάποιες προτάσεις φαίνονται να αληθεύουν από τη συντακτική δομή τους και μόνο. Για παράδειγμα οι Προτάσεις: Ένα ρόδο είναι ένα ρόδο. Είτε θα βρέξει είτε δεν θα βρέξει. Αν είμαι έξυπνος τότε είμαι έξυπνος. Είμαι αυτό που είμαι.

Αυτές οι προτάσεις ονομάζονται ταυτολογίες.

Εκ πρώτης όψεως δεν φαίνεται να παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Ωστόσο φάνηκε ωστόσο η μελέτη μας για τί είναι αλήθεια και τι είναι απόδειξη θα πρέπει να ξεκινήσει από αυτές.

Η προσέγγιση αυτή ονομάζεται Προτασικός λογισμός και θα ασχοληθούμε με αυτόν λίγο παρακάτω.

1.2 Η ανάγκη μιας τυπικής γλώσσας.

Η ιδέα της χρήσης μιας ειδικής γλώσσας, πολύ πιο περιοριστικής από την κοινή γλώσσα (τα ελληνικά) ξεκινά από τις αρχές του αίωνα και σχετίζεται με τα παράδοξα της θεωρίας συνόλων και ιδιαίτερα με το παράδοξο του Russel.

Ο Georg Cantor, ιδρυτής της θεωρίας των συνόλων, ξεκίνησε την θεμελίωση της θεωρίας του πάνω σε μια γενική παραδοχή, που εκ πρώτης όψεως είναι αρκετά προφανής, για να αμφισβητηθεί.

Θεώρησε, ότι μια οποιαδήποτε ιδιότητα I προσδιορίζει κατα μοναδικό τρόπο και ένα σύνολο: Το σύνολο όλων των αντικειμένων που έχουν την ιδιότητα I. Ο B. Russel παρατήρησε όμως πως μια τέτοια πολύ γενική παραδοχή μπορεί να οδηγήσει σε λογικά παράδοξα. Ο συλλογισμός του είναι ιδιαίτερα απλός.

« Ας θεωρήσουμε την ιδιότητα κάτι να είναι σύνολο και να μην είναι στοιχείο του εαυτού του.Συμβολικά:

$$I(x) : \text{Το } x \text{ είναι σύνολο και } x \notin x$$

Αυτή η ιδιότητα θα προσδιορίσει το σύνολο A, όπου το $x \in A$ αν και μόνο αν το x είναι σύνολο και $x \notin x$. Δύο πράγματα μπορεί να συμβαίνουν. Είτε $A \in A$, αλλά τότε θα πρέπει $A \notin A$ και αυτό αποκλείεται.

Είτε $A \notin A$. Σε αυτή την περίπτωση δύπ πράγματα μπορεί να συμβαίνουν:

- Είτε το A δεν είναι σύνολο - αλλά αυτό αντιβαίνει την υπόθεσή μας ότι είναι σύνολο.

- Είτε το A είναι σύνολο. Αλλά στην τελευταία περίπτωση θα έπρεπε να έχει την ιδιότητα $A \in A$ αφού αυτήν την έχει κάθε σύνολο που δεν είναι στο A και αυτό αντιβαίνει την υπόθεσή μας $A \notin A$.

Έγιναν πολλές προτάσεις για να καλυφθεί το κενό στην θεωρία του Cantor. Αυτή που επικρατεί σήμερα είναι η άποψη του Zermelo να απορίψουμε την αρχή ότι κάθε ιδιότητα καθορίζει και σύνολο και να την αντικαταστήσουμε με άλλες αρχές που θα προσδιόριζαν πιο συγκεκριμμένα ποιές ιδιότητες προσδιορίζουν σύνολα και ποιες όχι. Με τις αρχές που έθεσε ο Zermelo η συγκεκριμμένη I δεν προσδιορίζει σύνολο. Αυτή ήταν η αρχή της αξιωματικής θεωρίας των συνόλων.

Κάτι άλλο που φάνηκε από αυτή την συζήτηση ήταν ότι θα έπρεπε η έννοια «ιδιότητα» να προσδιοριστεί μέσα στα Μαθηματικά. Για να γίνει αυτό θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί μια πιο περιορισμένη γλώσσα από την κοινή (που λόγω αμφισημειών οδηγείται σε πολλά παράδοξα) κατάλληλη όμως αν όχι για όλα τα Μαθηματικά για ένα κλάδο τους τουλάχιστον. Έτσι θα ορίσουμε «γλώσσες» με λίγες έννοιες κατάλληλες όμως για μια μαθηματική θεωρία.

Για παράδειγμα, όταν θέλουμε να μιλάμε για σύνολα μας αρκεί να έχουμε μόνο μια σχέση στη γλώσσα μας, αυτή που μας λέει πότε κάτι ανήκει σε ένα σύνολο (που εκφράζεται με το σύμβολο $\in$) και μερικά λογικά σύμβολα που όπως θα φανεί παρακάτω μπορούμε να περιορίσουμε σε τρία: την άρνηση, την συνεπαγωγή, και το σύμβολο της ύπαρξης ($\exists$). Γενικά:

Ορισμός 1 *Μια* **γλώσσα** *αποτελείται*

1. *Ένα σύνολο M (συνήθως πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο) του οποίου τα στοιχεία λέγονται* **μεταβλητές**.

2. *Από κάποια λογικά σύμβολα που συνδέουν προτάσεις, συνήθως είναι τα $\vee$ (και), $\wedge$ (ή).*

3. *Το λογικό σύμβολο $\neg$, της άρνησης.*

   $\Longrightarrow$ (συνεπαγωγή), $\Longleftrightarrow$ (ισοδυναμία).Επίσης συνήθως έχουμε και ένα σύμβολο για την ισότητα ($=$). Μπορούμε βέβαια να έχουμε και άλλα, όπως κόμματα, τελείες, κενό χώρο κλπ...

4. *Ποσοδείκτες. Αυτοί είναι κυρίως το $\exists$ (υπάρχει) και το $\forall$, το «για κάθε...».*

5. *Σύμβολα στίξης ή διαχωρισμού. Συνήθως αρκούμαστε στις δύο παρενθέσεις (την αριστερή «) », την δεξιά «) »).*

6. *Κάποια ειδκά σύμβολα συναρτήσεων.Αυτά εξαρτώνται από τη θεωρία που θέλουμε να ασχοληθούμε. Για παράδειγμα στη αριθμητική χρειαζόμαστε τα σύμβολα των πράξεων $+, \cdot$, Στη θεωρία συνόλων δεν χρειαζόμαστε κανένα.*

7. *Κάποια ειδικά σύμβολα για να εκφράζουμε σχέσεις. Και αυτά εξαρτώνται από τη θεωρία που θέλουμε να ασχοληθούμε. Για παράδειγμα η θεωρία συνόλων χρησιμοποιεί τη σχέση του «ανήκειν σε ένα σύνολο», η αριθμητική τη σχέση « ένας αριθμός να είναι μικρότερος από έναν άλλο», κλπ...*

8. *Κάποια ειδικά σύμβολα σταθερών (π.χ το 0 στην αριθμητική, το κενό σύνολο $\emptyset$, στη θεωρία συνόλων.)*

Τα απολύτως απαραίτητα σύμβολα είναι οι μεταβλητές, οι λογικοί σύνδεσμοι, οι παρενθέσεις.

Μια **έκφραση της γλώσσας** θα είναι μια πεπερασμένη ακολουθία από στοιχεία της γλώσσας.

Για παράδειγμα:

$$\Rightarrow))))PQx\Rightarrow)()(\vee\wedge\vee\wedge xyz$$

,όπου $x, y, z, P, Q \in M$. Στην επόμενη παράγραφο θα εξετάσουμε την απλούστερη δυνατή γλώσσα.

1.3 Η γλώσσα του Προτασιακού λογισμού

Η πιο απλή γλώσσα είναι αυτή που δεν περιέχει ειδικά σύμβολα παρά μόνο τα απαραίτητα λογικά σύμβολα. Την γλώσσα αυτή την ονομάζουμε **γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού**.

Αυτή αποτελείται από

1. Ένα σύνολο M, που τα στοιχεία του θα τα χρησιμοποιούμε για σύμβολα «προτάσεων».

2. Σύμβολα συνδέσμων: $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

3. Το σύμβολο της άρνησης $\neg$

4. Σύμβολα διαχωρισμού εκφράσεων της γλώσσας: Παρενθέσεις $(,)$, αγκύλες $[,]$.

Από όλες τις τυχαίες εκφράσεις της γλώσσας θα διακρίνουμε αυτές που είναι **συντακτικά ορθές**, και θα τις ονομάζουμε **τύπους** της γλώσσας.

Οι τύποι (που αντιστοιχούν στις «σωστές» προτάσεις της φυσικής γλώσσας, που μπορούν να προκύψουν αν ξέρουμε κάποιες στοιχειώδεις πρωταρχικές προτάσεις) αποτελούν ένα υποσύνολο των εκφράσεων της γλώσσας. Η κατασκευή τους (που αποτελεί και τον ορισμό τους) προκύπτει μέσα από μια σειρά κανόνες, που τους ονομάζουμε **συντακτικούς κανόνες**. Τέτοιου είδους ορισμοί ονομάζονται αναδρομικοί ορισμοί.

Ορισμός 2 *1. Τα στοιχεία του M (οι μεταβλητές) είναι τύποι.*

2. Αν Φ, Ψ είναι τύποι τότε η έκφραση $(\Phi) \star (\Psi)$ είναι επίσης τύπος, όπου το $\star$ είνει ένα οποιοδήποτε από τα σύμβολα $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

3. Αν Φ είναι τύπος τότε η έκφραση $\neg(\Phi)$ είναι τύπος.

Σαν παράδειγμα εφαρμογής του προηγούμενου Ορισμού θα δώσουμε μια διαδικασία παραγωγής ενός τύπου:

Ένας εναλλακτικός ορισμός του τύπου είναι ο εξής:

Μια διαδικασία παραγωγής ενός τύπου Φ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία $E_1, \ldots, E_n$ από εκφράσεις της γλώσσας ώστε

- $E_n = \Phi$
- Για κάθε $i \leq n$, είτε
  - το E_i είναι μεταβλητή, είτε
  - υπάρχει $j < i$ με $E_i = (\neg E_j)$, είτε
  - υπάρχουν $j, k < i$ με $E_i = (E_j) \star (E_k)$, με $\star \in \{\vee, \wedge, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow\}$.

Παράδειγμα

1. Έστω X, Y, Z μεταβλητές. Τα X, Y, Z είναι τύποι από Ορισμό 2.
2. Οι εκφράσεις $\neg(X)$, $(X) \vee (Y)$ είναι τύποι από Ορισμό 2 και το 1.
3. Οι εκφράσεις $(\neg(X)) \Rightarrow ((X) \vee (Y))$ και $(Z) \Leftrightarrow ((X) \vee (Y))$ είναι τύποι 2 και το 2.
4. Η έκφραση

$$((\neg(X)) \Rightarrow ((X) \vee (Y))) \wedge ((Z) \Leftrightarrow ((X) \vee (Y)))$$

είναι τύπος από Ορισμό 2 και τα 2, 3.

Για να διευκολυνθούμε στη μελέτη των προτάσεων είναι χρήσιμο χωρίσουμε τις προτάσεις ανάλογα με την περιπλοκότητά τους. Για το σκοπό αυτό θα ορίσουμε την **τάξη** (περιπλοκότητας) ενός τύπου.

Ορισμός 3 1. *Οι μεταβλητές εχουν τάξη ίση με 0.*

2. *Αν οι τύποι* Φ, Ψ *έχουν τάξεις* $\tau(\Phi), \tau(\Psi)$ *και* $\star \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ *τότε η τάξη του* $(\Phi) \star (\Psi)$ *δίνεται από τον τύπο*

$$\tau\left((\Phi) \star (\Psi)\right) = \max\left\{\tau(\Phi), \tau(\Psi)\right\} + 1$$

3. *Αν ο τύπος* Φ *έχει τάξη* $\tau(\Phi)$ *τότε η τάξη του* $\neg((\Phi))$ *δίνεται από τον τύπο*

$$\tau\ (\ \neg(\Phi)\ ) = \tau(\Phi) + 1$$

1.4 Η ανάλυση ενός τύπου-Δέντρα- Υποτύποι.

Είναι διαισθητικά προφανές ότι κάθε τύπος θα είναι σύνθεση απλούστερων και αυτοί μια σύνθεση ακόμα απλούστερων, μέχρις ότου η ανάλυσή μας να μη μπορεί να προχωρήσει άλλο γιατί θα συναντήσουμε μόνο μεταβλητές (τους απλούστατους τύπους).

Σχήμα 1

$$(\neg\,(X)) \Longrightarrow (((\neg\,(Y)) \vee (Z)) \wedge ((X) \Longrightarrow (Y)))$$

$$\neg\,(X) \qquad\qquad ((\neg\,(Y)) \vee (Z)) \wedge ((X) \Longrightarrow (Y))$$

$$X \qquad\qquad (\neg\,(Y)) \vee (Z) \qquad\qquad (X) \Longrightarrow (Y)$$

$$\neg\,(Y) \quad Z \qquad\qquad X \quad Y$$

$$Y$$

Οι τύποι αυτοί που εμφανίζονται σε μια τέτοια διαδικασία ανάλυσης θα λέγονται οι **υποτύποι** του τύπου. Θα δώσουμε παρακάτω μια αυστηρή μορφή στις έννοιες: ανάλυση και υποτύπος ενός τύπου.

Η έννοια της ανάλυσης σχετίζεται με την έννοια του **δέντρου**, η οποία είναι μια γενίκευση των φυσικών αριθμών. Η αναλογια φαίνεται αν συγκρίνουμε τον παρακάτω ορισμό με τα αξιώματα του Peano για το σύνολο των φυσικών αριθμών. (Εκεί υπάρχει ένα αρχικό στοιχείο το 0 και για κάθε στοιχείο x υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $E(x)$, ο άμεσα επόμενος του x).

Ορισμός 4 *Ένα δέντρο είναι ένα σύνολο $\mathfrak{D}$ στο οποίο ισχύουν τα εξής:*

1. *Υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο ϱ το οποίο λέγεται η* **αρχή** *ή η* **ρίζα** *του $\mathfrak{D}$.*

2. *Για κάθε στοιχείο x του δέντρου υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $E(x)$ που λέγεται το σύνολο των άμεσα επόμενων του x. Το σύνολο αυτό μπορεί και να είναι κενό.*

3. *Αν $x, y \in \mathfrak{D}$ και $x \neq y$ τότε τα $E(x), E(y)$ είναι ξένα μετάξύ τους σύνολα (δεν έχουν κοινό στοιχείο).*

4. *Δεν υπάρχει $x \in \mathfrak{D}$ ώστε $0 \in E(x)$.*

5. *Αν $\mathfrak{A}$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathfrak{D}$ τέτοιο ώστε $0 \in \mathfrak{A}$ και για κάθε $x \in \mathfrak{A}$ ισχύει $E(x) \subset \mathfrak{A}$ τότε $\mathfrak{A} = \mathfrak{D}$*

Σε κάθε στοιχείο ενός δέντρου μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα φυσικό αριθμό , την τάξη του στοιχείου στην ιεραρχία του δέντρου, ως εξής.

1. $\tau(\varrho) = 0$

2. Αν $\tau(x) = n$ και $y \in E(x)$ τότε $\tau(y) = n + 1$

Κάθε στοιχείο του δέντρου έχει κάποια τάξη. Πράγματι, αν συμβολίσουμε με A το σύνολο όλων των στοιχείων του δέντρου που έχουν κάποια τάξη. Τότε εξ ορισμού $\varrho \in A$ και αν $x \in A$ θα έχουμε επίσης ότι κάθε $y \in E(x)$ θα έχει τάξη (την τάξη του $x + 1$). Άρα, $E(x) \subset A$ και από την ιδιότητα 5 του ορισμού 4 θα έχουμε ότι $A = \mathfrak{D}$.

Σημειώνουμε ότι ένα δέντρο είναι (όπως το ορίσαμε) ένα το πολύ αριθμήσιμο σύνολο.

Πράγματι, ας συμβολίσουμε για κάθε φυσικό αριθμό n με $\mathfrak{D}(n) = \{x \in \mathfrak{D} : \tau(x) = n\}$.

Το σύνολο $\mathfrak{D}(n)$ θα το λέμε και το $n-$**επίπεδο** του δέντρου $\mathfrak{D}$.

Επειδή για κάθε n

$$\mathfrak{D}(n+1) = \bigcup \{E(x) : x \in \mathfrak{D}(n)\}$$

επαγωγικά δείχνουμε ότι κάθε $\mathfrak{D}(n)$ είναιπεπερασμένο σύνολο, άρα το $\mathfrak{D}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο σύνολο σαν αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων.

Σημειώστε ότι το $\mathfrak{D}$ δεν είναι αναγκαστικά άπειρο γιατό επιτρέπουμε στο σύνολο των αμέσων επόμενων ενός στοιχείου του δέντρου να είναι κενό, άρα μπορεί από κάποιο n και πέρα τα επίπεδα $\mathfrak{D}(n)$ να είναι κενά.

Η έννοια του **άμεσα επόμενου υποτύπου** ενός τύπου δίνεται επαγωγικά από τους παρακάτω κανόνες:

Ορισμός 5 *1. Οι μεταβλητές δεν έχουν άμεσα επόμενους υποτύπους.*

2. *Ο $\neg(\Phi)$ έχει άμεσα επόμενο υπότυπο τον Φ και κανένα άλλο.*

3. *Οι $(\Phi) \vee (\Psi)$, $(\Phi) \wedge (\Psi)$, $(\Phi) \Longrightarrow (\Psi)$ $(\Phi) \Longleftrightarrow (\Psi)$ έχουν σαν άμεσους επόμενους τους Φ, Ψ και μόνο αυτούς.*

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε τι είναι το δέντρο ενός τύπου.

Ορισμός 6 *Αν Φ είναι ένας τύπος το* **δέντρο ή η ανάλυση** *του Φ είναι το δέντρο $\mathfrak{D}(\Phi)$ που ορίζεται ως εξής:*

1. *Ο Φ είναι η ρίζα του δέντρου.*

2. *Αν $\Psi \in \mathfrak{D}(\Phi)$ τότε οι άμεσα επόμενοι του Ψ είναι οι άμεσοι υποτύποι του Ψ.*

Παρατηρείστε ότι στο δέντρο ενός τύπου κάθε στοιχείο έχει το πολύ δύο επόμενους. Επίσης ότι το δέντρο ενός τύπου είναι πεπερασμένο δέντρο.

Ορισμός 7 *Τα στοιχεία του δέντρου ενός τύπου Φ λέγονται* **υποτύποι** *του Φ.*

Ασκήσεις

1. Να δείξετε ότι κάθε τύπος έχει τάξη και ότι η τάξη αυτή είναι φυσικός αριθμός.

2. Να δείξετε ότι σε κάθε τύπο εμφανίζεται άρτιος αριθμός παρενθέσεων.

3. Να σχεδιάσετε το δέντρο του τύπου

   $((\neg(X)) \Rightarrow ((X) \vee (Y))) \wedge ((Z) \Leftrightarrow ((X) \vee (Y)))$

   και να βρείτε την τάξη του.

4. Αν τύπος Φ στον οποίο εμφανίζονται οι μεταβλητές $X_1, \ldots, X_k$ και $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ τύποι. Να δείξετε πως αν αντικαταστήσετε ταυτόχρονα τις μεταβλητές $X_1, \ldots, X_k$ με τους τύπους $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ αντίστοιχα τότε προκύπτει τύπος.

1.5 Το Λήμμα μοναδικής ανάγνωσης

Αν προσέξουμε τον ορισμό του τύπου θα παρατηρήσουμε ότι σε κάθε βήμα γίνεται χρήση παρενθέσεων. Αυτό δεν είναι άσκοπο. Η αιτία της χρήσης των παρενθέσεων γίνεται ώστε να μην προκαλούνται ασάφειες στον τρόπο με τον οποίο έχει παραχθεί ένας τύπος. Ο «μοναδικός τρόπος ανάγνωσης» ενός τύπου είναι το περιεχόμενο του παρακάτω λήμματος.

Λήμμα 1 (Το Λήμμα της μοναδικής ανάγνωσης.) *Για οποιοδήποτε τύπο Φ ισχύει ένα και μόνο από τα παρακάτω:*

1. *Ο Φ είναι μεταβλητή.*

2. *Υπάρχει μοναδικός τύποι Ψ ώστε $\Phi = \neg(\Psi)$*

3. *Υπάρχουν μοναδικοί τύποι Φ_1, Φ_2 και μοναδικό $\star \in \{\vee, \wedge, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow\}$ ώστε $\Phi = (\Phi_1) \star (\Phi_2)$.*

Παρατηρείστε ότι κάθε τύπος γράφεται σε μια από τις παραπάνω μορφές είναι άμεση συνέπεια του ορισμού των τύπων. Αυτό που δεν είναι προφανές είναι η μοναδικότητα της γραφής. Για την απόδειξη του Λήμματος παρατηρούμε τα εξής. Κάθε τύπος είναι μια πεπερασμένη ακολουθία από σύμβολα της γλώσσας $a_1, a_2, \ldots, a_n$ κάποια από τα οποία είναι παρενθέσεις. Τον αριθμό n θα τον ονομάσουμε το **μήκος** του τύπου (και γενικότερα μιας έκφρασης). Ας θεωρήσουμε τα εξής δύο ξένα υποσύνολα P, Q του $\{1, 2, \ldots, n\}$. Το P αποτελείται από εκείνα τα $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ που το a_i είναι αριστερή παρένθεση ενώ το Q

αποτελείται από εκείνα τα $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ που το a_i είναι δεξιά παρένθεση. Με επαγωγή πάνω στην τάξη των τύπων είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ισχύει το παρακάτω:

Λήμμα 2 *Σε κάθε τύπο τα σύνολα P, Q των αριστερών και δεξιών παρενθέσων του τύπου έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων και επιπλέον υπάρχει μια 1-1 απεικόνιση $f : P \longrightarrow Q$ με τις παρακάτω ιδιότητες*

- *$i < f(i)$ για κάθε $i \in P$.*
- *Για κάθε $i, j \in P$, $i \leq j \leq f(i)$ αν και μόνο αν $i \leq f(j) \leq f(i)$.*

Θα ονομάζουμε μια τέτοια απεικόνιση έναν **ισομορφισμό παρενθέσεων**.

Απόδειξη.

Πράγματι, αν έχει οριστεί ένας τουλάχιστον ισομορφισμός παρενθέσεων για κάθε τύπο με τάξη $\leq n$ και ο Φ έχει τάξη $n+1$ τότε είτε $\Phi = \neg(\Psi)$ είτε $\Phi = (\Phi_1) \star (\Phi_2)$, με την τάξη των Ψ, Φ_1, Φ_2 να είναι $\leq n$. Ας υποθέσουμε ότι είμαστε στην περίπτωση $\Phi = (\Phi_1) \star (\Phi_2)$ και ότι τα μήκη των Φ_1, Φ_2 είναι n_1, n_2, αντίστοιχα. Επιλέγω μονομορφισμούς παρενθέσεων $f_1 : P_1 \longrightarrow Q_1$, $f_2 : P_2 \longrightarrow Q_2$ για τους Φ_1, Φ_2, αντίστοιχα χρησιμοποιώντας την επαγωγική μου υπόθεση. Τα αντίστοιχα σύνολα αριστερών και δεξιών παρενθέσεων για την Φ είναι $P = \{1\} \cup (1 + P_1) \cup ((n_1 + 4) + P_2) \cup \{n_1 + n_2 + 5 + P_2\}$, $Q = (1 + Q_1) \cup \{n_1 + 2\} \cup ((n_1 + 4) + Q_2) \cup \{n_1 + n_2 + 5\}$.

Εδώ χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $k + P = \{x + k : x \in P\}$.

Η $f : P \longrightarrow Q$ θα δίνεται από τις σχέσεις $f(1) = n_1 + 2$, $f(i) = f_1(i-1)$, όταν $i \in 1 + P_1$, $f(n_1 + 4) = n_1 + n_2 + 5$, και $f(i) = f_2(i - (n_1 + 4)$, όταν $i \in (n_1+4)+P_2$. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι η f είναι πράγματι ισομορφισμός παρενθέσεων. ■ Το λήμμα μοναδικής ανάγνωσης θα έχει αποδειχθεί μόλις αποδειχθεί το επόμενο συνδυαστικό λήμμα:

Λήμμα 3 *Αν P, Q είναι ξένα υποσύνολα του $\{1, \ldots, n\}$ ώστε να υπάρχει ισομορφισμός παρενθέσεων $f : P \longrightarrow Q$, αυτός είναι μοναδικός.*

Απόδειξη. Οι κανόνες που ορίζουν τον ισομορφισμό παρενθέσεων μας λένε ότι σε κάθε αριστερή παρένθεση που εμφανίζεται στη θέση i αντιστοιχεί μια μοναδική δεξιά παρένθεση σε μεταγενέστερη θέση $f(i)$, αφού $f(i) > i$. Επίσης η συνθήκη « Για κάθε $i, j \in P$, $i \leq j \leq f(i)$ αν και μόνο αν $i \leq f(j) \leq f(i)$» μας λέει ότι αν μεταξύ της αριστερής παρένθεσης στην θέση i και της αντίστοιχης δεξιάς παρένθεσης στη θέση $f(i)$ εμφανίζεται μια αριστερή παρένθεση, στη θέση j, ας πούμε, τότε η αντίστοιχη δεξιά της παρένθεση θα είναι σε θέση $f(j)$ μεταξύ των $i, f(i)$. Ας ορίσουμε την εξής συνάρτηση $\sigma : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, -1, 0\}$ με

$$\sigma(i) = \begin{cases} 1 & \text{αν } i \in P \\ -1 & \text{αν } i \in P \\ 0 & \text{αν } i \notin P \cup Q \end{cases}$$

τότε οι συνθήκες μας δίνουν για κάθε $i \in P, k < i$,

$$\sum_{j=1}^{f(i)} \sigma(i) = 0, \quad \sum_{j=1}^{f(i)-k} \sigma(i) > 0 \tag{1.1}$$

Η πρώτη σχέση προκύπτει από την παρατήρηση που κάναμε ότι στε κάθε διάστημα $[i, f(i)]$ αν $j \in [i, f(i)] \bigcap P$, τότε $f(j) \in [i, f(i)]$. Η δεύτερη ανισότητα αποδεικνύεται ως εξής. Ας υποθέσουμε ότι για κάποια i, k ισχύει $\sum_{j=1}^{f(i)-k} \sigma(i) \leq 0$. Τότε, τα στοιχεία του Q στο διάστημα $[i+1, f(i)-k]$ είναι περισσότερα από αυτά του P στο ίδιο διάστημα. Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $f(j_0)$ στο διάστημα αυτό που το j_0 δεν θα ανήκει. Αλλά τότε $j_0 < i$ δηλαδή $j_0 \notin [i, f(i)]$ και $f(j_0) \in [i, f(i)]$, άτοπο. Οι σχέσεις 1.1 προσδιορίζουν μονοσήμαντα την f. Πράγματι, πρέπει να πάρουμε σαν $f(i)$ το μικρότερο $k > i$ που ικανοποιεί την $\sum_{j=i}^{k} \sigma(j) = 0$.

■ Η παρακάτω έκφραση δεν είναι τύπος. Η απόδειξη αυτού του γεγονότος

φαίνεται άμεσα από το ότι δεν έχουμε ποτέ άθροισμα ίσο με 0.

(	X	$\Leftrightarrow$	(	Y	)	$\vee$	Y	)	)
1	0	0	1	0	-1	0	0	-1	-1

Άσκηση: Προσδιορίστε αν υπάρχει ισομορφισμός παρενθέσεων για την έκφραση

$$(P((P))PQ)YY(Y)(fff(gggoooo)k((kl(kk)))$$

.

1.6 Τιμές αληθείας

Κάθε πρόταση είναι είτε αληθής είτε ψευδής.

Μπορούμε να δούμε τις μεταβλητές σαν στοιχειώδεις προτάσεις (δηλαδή σαν προτάσεις που δεν μπορούμε να αναλύσουμε άλλο). Κάθε σύνθετη πρόταση Φ (τύπος) αν δεν είναι μεταβλητή θα περιέχει κάποιες μεταβλητές $X, Y, P, Q, \ldots$ και κάποιους σύνδεσμους. Αν δωσουμε ένα χαρακτηρισμό σε κάθε μεταβλητή, να είναι είτε αληθής είτε ψευδής, θα θέλαμε να πάρουμε έναν (μοναδικό) χαρακτηρισμό (αληθής ή ψευδής) και ο πιο σύνθετος τύπος Φ. Για το σκοπό αυτό για κάθε σύμβολο $\star \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ είσάγουμε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $\star : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ καθώς και μία συνάρτηση $\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$ με τους παρακάτω πίνακες:

Πίνακας 1

x	y	$\vee(x,y)$	$\wedge(x,y)$	$\Longrightarrow (x,y)$	$\Longleftrightarrow (x,y)$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Πίνακας 2

x	$\neg(x)$
1	0
0	1

Ορισμός 8 *Μια* **εκτίμηση** *ενός συνόλου μεταβλητών $A \subset M$ είναι μια συνάρτηση $v : A \to \{0,1\}$, δηλαδή ένας μονοσήμαντος χαρακτηρισμός κάθε μεταβλητής $x \in A$ σαν «αληθής», ή «ψευδής» (η x είναι αληθής αν $v(x) = 1$ και ψευδής αν $v(x) = 0$).*

Ορισμός 9 *Έστω μια εκτίμηση $v : M \to \{0,1\}$, όπου M είναι το σύνολο όλων των μεταβλητών. Τότε σε κάθε τύπο Φ ορίζεται μια εκτίμηση $v(\Phi) \in \{0,1\}$ ως εξής:*

1. *Αν $v(\Phi) = x$ και $v(\Psi) = y$ τότε $v(\ (\Phi) \star (\Psi)\ ) = \phi_\star(x,y)$, όπου ως συνήθως, $\star \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$*

2. *Αν $v(\Phi) = x$ τότε $v(\ \neg(\Phi)\ ) = \phi_\neg(x)$.*

Επίσης είναι φανερό ότι δεν χρειάζεται να εκτιμηθούν όλες οι μεταβλητές της γλώσσας για να εκτιμηθεί ένας τύπος. Αρκεί να εκτιμήσουμε τις μεταβλητές που εμφανίζονται στον τύπο αυτό.

Ο Ορισμός 9 μας λέει ότι για οποιουσδήποτε τύπους Φ και Ψ και οποιαδήποτε εκτίμηση v θα έχουμε

Πίνακας 3

$v(\Phi)$	$v(\Psi)$	$v(\Phi \vee \Psi)$	$v(\Phi \wedge \Psi)$	$v(\Phi \Rightarrow \Psi)$	$v(\Phi \Leftrightarrow \Psi)$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Πίνακας 4

$v(\Phi)$	$v(\neg\Phi)$
1	0
0	1

Οι πίνακες αυτοί ορίστηκαν σε αντιστοιχία με τον τρόπο που χρησιμοποιούμε τους συνδέσμους στην φυσική γλώσσα. Μπορούμε να τους θεωρήσουμε και σαν ορισμούς των αντίστοιχων συνδέσμων. Ας εξετάσουμε για παράδειγμα τον πίνακα:

$v(\Phi)$	$v(\Psi)$	$v\left((\Phi) \vee (\Psi)\right)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Αυτός ερμηνεύει τον τρόπο με τον οποίο σκεπτόμαστε όταν εισάγουμε τον σύνδεσμο «ή», της διάζευξης. Αυτός συνδυαζόμενος με τον ορισμό 9 μας λέει πως αν δύο οποιεσδήποτε προτάσεις P και R τις συνδέσουμε με διάζευξη και πάρουμε την $P \vee R$ (ας ξεχάσουμε λίγο τις παρενθέσεις, που εδώ τουλάχιστον δεν έχουν νόημα), τότε αυτή θα είναι αληθής αν μία τουλάχιστον από τις δύο είναι αληθής. Έτσι όταν λέω ότι η πρόταση «είμαι ψηλός ή έξυπνος» είναι αληθής αυτό σημαίνει ότι μία τουλάχιστον από τις προτάσεις «είμαι ψηλός», «είμαι έξυπνος», αληθεύει χωρίς όμως να αποκλείω ότι μπορεί να αληθευούν και οι δύο ταυτόχρονα.

Εδώ υπάρχει μια διαφοροποίηση με τον τρόπο που χρησιμοποιούμε το «ή» στην καθημερινή γλώσσα, όπου πολλές φορές θέλουμε να αποκλείσουμε και τις δύο προτάσεις να αληθεύουν ταυτόχρονα. Για το σκοπό αυτό μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο σύμβολο συνδέσμου, $\underline{\vee}$, τον σύνδεσμο της «αποκλειστικής διάζευξης» εισάγοντας τον παρακάτω πίνακα (Γενικά ένας οποιοδήποτε παρόμοιος πίνακας μπορεί να θεωρηθεί σαν ορισμός ενός συνδέσμου ή σαν την ερμηνεία κάποιου συνδέσμου στα πλαίσια της δίτιμης λογικής).

$v(\Phi)$	$v(\Psi)$	$v\left((\Phi)\underline{\vee}(\Psi)\right)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ένας άλλος πίνακας που έχει ενδιαφέρον να ερευνηθεί είναι ο πίνακας της συνεπαγωγής.

$v(\Phi)$	$v(\Psi)$	$v\left((\Phi) \Rightarrow (\Psi)\right)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Εδώ το μόνο που δεν επιτρέπεται είναι από αληθή πρόταση να προκύψει ψευδής. Προτάσεις της μορφής $P \Rightarrow Q$, όπου η P είναι ψευδής πρόταση θεωρούνται αληθείς. Με αυτό τον πίνακα η φράση «αν 1+1=4 τότε 1+1=2» θεωρείται αληθής πρόταση, αν η «1+1=4» θεωρηθεί ψευδής όσο και αν αυτό φαίνεται παράδοξο.

Επίσης έχουν προταθεί συστήματα λογικής όπου μία πρόταση μπορεί να εκτιμηθεί με τρείς τιμές $1, 0, \frac{1}{2}$ (ή και με περισσότερες) όπου για παράδειγμα η τιμή $\frac{1}{2}$ αντιστοιχεί στην εκτίμηση ότι η πρόταση είναι «πιθανή». Οι λογικές αυτού του τύπου ονομάζονται **τρίτιμες** (ή **πλειότιμες**) λογικές.

Σαν άμεση συνέπεια του Λήμματος μοναδικής ανάγνωσης έχουμε ότι

Πρόταση 1 *Σε κάθε εκτίμηση v των μεταβλητών ενός τύπου Φ η εκτίμηση $v(\Phi)$ είναι μοναδικά ορισμένη. Με άλλα λόγια, αν $X_1, \ldots, X_n$ είναι μια δοσμένη* *αρίθμηση των (διαφορετικών) μεταβλητών που εμφανίζονται σε ένα τύπο* Φ *τότε ορίζεται μοναδικά μία συνάρτηση* $\widetilde{\Phi}: \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$ *με* $\widetilde{\Phi}(x_1, \ldots, x_n) = v(\Phi)$*, όπου* $v(X_1) = x_1, \ldots, v(X_n) = x_n$.

1.7 Ταυτολογίες

Ερχόμαστε τώρα σε μια ιδιαίτερα σημαντική έννοια.

Ορισμός 10 *Ένας τύπος* Φ *θα λέγεται μια* ***ταυτολογία*** *αν για κάθε εκτίμηση των μεταβλητών του η εκτίμηση τού* Φ *είναι ίση με* 1.

Ένας τύπος Φ *θα λέγεται μια* ***αντίφαση*** *αν για κάθε εκτίμηση των μεταβλητών του η εκτίμηση τού* Φ *είναι ίση με* 0.

Μπορούμε να θεωρήσουμε τις ταυτολογίες σαν τις προτάσεις που θεωρούμε εκ των προτέρων αληθείς, χωρίς να απαιτούνται πρόσθετες προυποθέσεις (αξιώματα) για να τις στηρίξουμε. Αντίστοιχα οι αντιφάσεις αντιστοιχούν στις εκ των προτέρων ψευδείς προτάσεις.

Από τον ορισμό της άρνησης προκύπτει ότι:

- Ο τύπος Φ είναι ταυτολογία αν και μόνο αν ο $\neg(\Phi)$ είναι αντίφαση.
- Ο τύπος Φ είναι αντίφαση αν και μόνο αν ο $\neg(\Phi)$ είναι ταυτολογία.

Ας εξετάσουμε ορισμένες ταυτολογίες. Στους παρακάτω τύπους μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές $X, Y, Z, \ldots$ με οποιουσδήποτε τύπους και τότε θα προκύψει επίσης ταυτολογία.Αυτόν τον ισχυρισμό τον αφήνουμε σαν άσκηση. Συνεπώς κάθε ταυτολογία που γράφουμε αντιστοιχεί σε απειρες ακόμα που προκύπτουν από αντικαταστασεις των μεταβλητών. Από αυτή την άποψη κάθε έκφραση την λέμε ένα «σχήμα ταυτολογίας».

Δίπλα σε κάθε ταυτολογία παραθέτουμε μια ερμηνεία της που δείχνει την αντιστοιχία της με τους κανόνες της κοινής λογικής.

Αυτό βέβαια δεν είναι δυνατόν να γίνει σε πολύ σύνθετες ταυτολογίες.

1. $(X) \vee (\neg X)$. Αντιστοιχεί στον κανόνα της τρίτου αποκλείσεως, δηλαδή ότι κάτι ισχύει ή κάτι δεν ισχύει.
2. $X \Longrightarrow X$, κάθε πρόταση συνεπάγεται τον εαυτό της.
3. $X \Longleftrightarrow X$, κάθε πρόταση ισοδυναμεί με τον εαυτό της.

4. $\neg(\neg X) \Longleftrightarrow X$, η διπλή άρνηση μιας πρότασης ισοδυναμεί λογικά με την ίδια την πρόταση.

5. $\neg(X \vee Y) \Longleftrightarrow (\neg X) \wedge (\neg Y)$, $\neg(X \wedge Y) \Longleftrightarrow (\neg X) \vee (\neg Y)$,Οι κανόνες του De Morgan.

6. $X \wedge Y \Longrightarrow X$

7. $(X \Longrightarrow Y) \iff ((\neg Y) \Longrightarrow (\neg X))$

Μπορούμε εύκολα να αποδειξουμε ότι τα προηγούμενα σχήματα οδηγούν σε ταυτολογίες καταρτίζοντας κατάλληλους πίναξες αλήθειας. Θα δώσουμε ένα τέτοιο παράδειγμα δείχνοντας ότι ο τύπος $(X \Longrightarrow Y) \iff ((\neg Y) \Longrightarrow (\neg X))$ είναι ταυτολογία.

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$X \Rightarrow Y$	$\neg(Y) \Rightarrow \neg(X)$	$(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg(Y) \Rightarrow \neg(X))$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

1.8 Ισοδύναμοι τύποι

Ένα ειδικό ενδιαφέρον των ταυτολογιών είναι ότι αντιστοιχούν και σε αποδεικτικές διαδικασίες στα μαθηματικά. Για παράδειγμα η ταυτολογία:

$$((X) \Longrightarrow (Y)) \Longleftrightarrow ((\neg(Y)) \Longrightarrow (\neg(Y)))$$

εφαρμόζεται στην περίπτωση που που θέλουμε να δείξουμε ότι μια απεικόνιση $f : A \longrightarrow B$ είναι ένα 1-1. Από τον ορισμό θα πρέπει να δείξουμε πως αν $x, y \in A$ και$x \neq y$ τότε $f(x) \neq f(y)$. Πολλές φορές όμως είναι πιο απλό να δείξουμε πως αν $f(x) = f(y)$ τότε $x = y$, που είναι ισοδύναμος ορισμός για την 1-1 συνάρτηση.

Ορισμός 11 *Δύο τύποι* Φ, Ψ *θα λέγονται* **ισοδύναμοι** *αν ο τύπος* $\Phi \Leftrightarrow \Psi$ *είναι ταυτολογία. Σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε* $\Phi \cong \Psi$.

Πρόταση 2 *Ισχύει* $\Phi \cong \Psi$ *αν και μόνο αν για κάθε εκτίμηση* v *συμβαίνει* $v(\Phi) = v(\Psi)$.

Απόδειξη. Έστω ότι $\Phi \cong \Psi$, δηλαδή ότι για κάθε εκτίμηση v συμβαίνει $v(\Phi \Leftrightarrow \Psi) = 1$. Από τον Πίνακα 4 αυτό συμβαίνει μόνο όταν $v(\Phi) = 1$ και $v(\Psi) = 1$ ή $v(\Phi) = 0$ και $v(\Psi) = 0$. Όμοια δείχνουμε το αντίστροφο.
■

Άσκηση Δείξτε ότι η σχέση $\cong$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο όλων των τύπων.

1.9 Η μέθοδος των αναλυτικών πινάκων

Η μέθοδος κατασκευής πινάκων αληθείας είναι στχνά αρκετά επίπονη για να δείξουμε πως ένας τύπος είναι ταυτολογία ή όχι. Παρακάτω παρουσιάζεται μια μέθοδος για να δείχνουμε ταυτολογίες, λιγότερο επίπονη, που λέγεται μέθοδος των αναλυτικών πινάκων γιατί στηρίζεται σε μια ανάλυση του τύπου που εξετάζουμε αν είναι ταυτολογία.

Για το σκοπό αυτό εισάγουμε ένα νέο συμβολισμό. Αν Φ είναι ένας τύπος τότε η έκφραση $\Phi \equiv 0$ θα σημαίνει ότι η Φ μπορεί να πάρει την εκτίμηση 0. Όμοια,η έκφραση $\Phi \equiv 1$ θα σημαίνει ότι η Φ μπορεί να πάρει την εκτίμηση 1.

(Μια καλή άσκηση είναι να θεωρήσετε ότι εμπλουτίσαμε τη γλώσσα μας με τρία νέα σύμβολα, $\equiv, 0, 1$ και να εκφράσετε τους συντακτικούς κανόνες ορισμού τύπων αυτής της γλώσσας.)

Ας παρατηρήσουμε τα εξής:

- Αν ο τύπος $(\Phi) \vee (\Psi)$ παίρνει την εκτίμηση 1 τότε έχουμε δύο εναλλακτικές περιπτώσεις: Είτε ο Φ παίρνει την τιμή 1, είτε ο Ψ παίρνει την τιμή 1.

- Αν ο τύπος $(\Phi) \vee (\Psi)$ παίρνει την εκτίμηση 0 τότε αναγκαστικά οι Φ, Ψ παίρνουν και οι δύο την εκτίμηση 0 (εδώ δεν έχουμε εναλλακτικές καταστάσεις, όπως στην προηγούμενη περίπτωση).

Ας συνοψίσουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις:

$(\Phi) \vee (\Psi) \ = 0$		$(\Phi) \vee (\Psi) \ = 1$	
$\Phi = 0$		$\Phi = 1$	$\Psi = 1$
$\Psi = 0$			

$(\Phi) \wedge (\Psi) \quad = 1$ $\qquad$ $(\Phi) \wedge (\Psi) \quad = 0$

$\Phi = 1$ $\qquad$ $\Phi = 0$ $\qquad$ $\Psi = 0$

$\Psi = 1$

$(\Phi) \Longrightarrow (\Psi) \quad = 0$ $\qquad$ $(\Phi) \Longrightarrow (\Psi) \quad = 1$

$\Phi = 1$ $\qquad$ $\Phi = 0$ $\qquad$ $\Psi = 1$

$\Psi = 0$

$(\Phi) \Longleftrightarrow (\Psi) \quad = 0$ $\qquad$ $(\Phi) \Longleftrightarrow (\Psi) \quad = 1$

$\Phi = 0$ $\qquad$ $\Phi = 1$ $\qquad$ $\Phi = 0$ $\qquad$ $\Phi = 1$
$\Psi = 1$ $\qquad$ $\Psi = 0$ $\qquad$ $\Psi = 0$ $\qquad$ $\Psi = 1$

$\neg\Phi = 0$ $\qquad$ $\neg\Phi = 1$

$\Phi = 1$ $\qquad$ $\Phi = 0$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο τύπος

$$(Q \Longrightarrow (U \Longrightarrow Z)) \Longrightarrow ((Q \Longrightarrow U) \Longrightarrow (Q \Longrightarrow Z))$$

είναι ταυτολογία. Υποθέτουμε ότι ο τύπος μας μπορεί να πάρει την εκτίμηση 0. Με αυτή την υπόθεση εφαρμόζουμε τους προηγούμενους κανόνες. Αν τους εφαρμόσουμε ΟΛΟΥΣ για κάθε τύπο, τότε θα σχηματιστεί ένα δέντρο σε κλάδι του οποίου μια μεταβλητή θα παίρνει και την τιμή 0 και την τιμή 1 καταλήγοντας κάθε φορά σε άτοπο. Δίνουμε σαν παράδειγμα μια τέτοια ανάλυση για τον προηγούμενο τύπο (που δεν είναι και η μοναδική). Αν συνηθήσει κανείς αυτό τον τρόπο εξέτασης ταυτολογιών είναι πολύ πιο σύντομος και κομψός από το να καταστρώνει πίνακες αληθείας. Για μια λεπτομερέστερη ανάπτυξη της μεθόδου αυτής παραπέμπουμε στο βιβλίο του Raymond M. Smullyan *FIRST ORDER LOGIC*, Dover 1995.

$$
\begin{array}{c}
(X \Longrightarrow (Y \Longrightarrow Z)) \Longrightarrow ((X \Longrightarrow Y) \Longrightarrow (X \Longrightarrow Z)) = 0 \\
(X \Longrightarrow (Y \Longrightarrow Z)) = 1 \\
((X \Longrightarrow Y) \Longrightarrow (X \Longrightarrow Z)) = 0 \\
(X \Longrightarrow Y) = 1 \\
(X \Longrightarrow Z) = 0 \\
X = 1 \\
Z = 0 \\
\begin{array}{cc}
X = 0 & \begin{array}{c} (Y \Longrightarrow Z) = 1 \\ \begin{array}{cc} \begin{array}{c} Y = 0 \\ \begin{array}{cc} X = 0 & Y = 1 \end{array} \end{array} & Z = 1 \end{array} \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

1.10 Επάρκεια συνδέσμων

Στην παράγραφο ;; είδαμε πως αν αν αριθμήσουμε τις μεταβλητές $X_1, \dots X_n$ που εμφανίζονται σε ένα τύπο Φ τότε ορίζεται μια απεικόνιση $\widetilde{\Phi}$ n μεταβλητών από το $\{0,1\}^n$ στο $\{0,1\}$. ως εξής: Αν $(x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$ τότε

$$\widetilde{\Phi}((x_1, \dots, x_n)) = v(\Phi)$$

, όπου η εκτίμηση v ορίζεται από τις σχέσεις:

$$v(X_1) = x_1, \dots v(X_n) = x_n$$

Η συνάρτηση αυτή εξαρτάται από τη σειρά αρίθμησης των μεταβλητών του τύπου. Προκύπτει το εξής ερώτημα.

Αν δοθεί μια οποιαδήποτε συνάρτηση $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, n μεταβλητών, υπάρχει ένας τουλάχιστος τύπος Φ, n μεταβλητών, με με την ιδιότητα $F_\Phi = f$;

Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι θετική. Μάλιστα θα δείξουμε ότι μπορούμε να πάρουμε τον ζητούμενο τύπο σε μια συγκεκριμμένη μορφή που θα περιέχει μόνο μεταβλητές και τα σύμβολα $\vee, \neg$, μόνο. Το παρακάτω Λήμμα έχει απλή απόδειξη και την αφήνουμε στον αναγνώστη.

Λήμμα 4 *Έστω $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ οποιοιδήποτε τύποι και μια οποιαδήποτε εκτίμηση v. Τότε*

1. *$v(\Phi_1 \vee \cdots \vee \Phi_n) = 1$αν και μόνο αν υπάρχει $i = 1, \ldots, n$με $v(\Phi_i) = 1$*

2. *$v(\Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_n) = 1$αν και μόνο αν για κάθε $i = 1, \ldots, n, v(\Phi_i) = 1$*

Θεώρημα 1 *Για κάθε συνάρτηση $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, n μεταβλητών, υπάρχει ένας τουλάχιστος τύπος Φ, n μεταβλητών, με με την ιδιότητα $F_\Phi = f$.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε n μεταβλητές της γλώσσας του προτασιακού λογισμού: $X_1, \ldots, |_n$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

I. Για κάθε $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ ισχύει $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
Σε αυτή την περίπτωση αρκεί να θεωρήσουμε τον τύπο

$$\Phi = (X_1 \wedge \ \neg X_1) \vee (X_2 \wedge \ \neg X_2) \vee \cdots \vee (X_n \wedge \ \neg X_n)$$

Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε το ζητούμενο.

II. Υπάρχει $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ ώστε $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε μια αρίθμηση

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$$

όλων των διατεταγμένων $n-$αδων με την ιδιότητα $f(\mathbf{a}_i) = 1$. Για κάθε $i = 1, \ldots, k$ αν $\mathbf{a}_i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i)$ θέτουμε

$$\Phi_i = \Psi_1^i \wedge \Psi_2^i \wedge \cdots \wedge \Psi_n^i$$

όπου $\Psi_j^i = X_j$ αν $x_j^k = 1$ και $\Psi_j^i = \neg X_j$ αν $x_j^k = 0$.

Τέλος ορίζουμε:

$$\Phi = \Phi_1 \vee \cdots \vee \Phi_k$$

Ας θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο $\mathbf{a} = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ το οποίο το θεωρούμε σαν την εκτίμηση v των μεταβλητών με $v(X_i) = x_i$.

Εξ ορισμού,

$f(\mathbf{a}) = 1$ αν και μόνο αν υπάρχει $i = 1, ..., k$ με $\mathbf{a} = \mathbf{a}_i$ που είναι ισοδύναμο με $v(\Phi_i) = 1$. Αλλά αυτό από το προηγούμενο λήμμα είναι ισοδύναμο με το ότι $v(\Phi) = 1$ και η απόδειξή μας ολοκληρώθηκε.

■

Εύκολα ελέγχουμε ότι ισχύουν οι ταυτολογίες

1. $(X \vee Y) \Longleftrightarrow \neg(\neg X \wedge \neg Y)$

2. $(X \wedge Y) \Longleftrightarrow \neg(\neg X \vee \neg Y)$

Από αυτό προκύπτει άμεσα το εξής πόρισμα του Θεωρήματος 1.

Πόρισμα 1 *Κάθε τύπος είναι ισοδύναμος με τύπο που περιέχει μόνο τους συνδέσμους* $\vee, \neg$.

Άσκηση: Να δείξετε ότι συμπέρασμα του Πορίσματος 1 ισχύει αν θεωρήσουμε το ζευγάρι $\{\wedge, \neg\}$ ή το $\{\Longrightarrow, \neg\}$ ή το $\{\Longleftrightarrow, \neg\}$ αντί του $\{\vee, \neg\}$. Ωστόσο, αυτό δεν μπορεί να γίνει με το ζευγάρι $\{\vee, \wedge\}$.

Άσκηση: Να βρείτε έναν ισοδύναμο τύπο με τον

$$(X \Longrightarrow \neg Y) \Longleftrightarrow (X \Longrightarrow Z)$$

που να περιέχει μόνο τους συνδέσμους $\vee, \neg$.

1.11 Συμβατότητα. Το θεώρημα της συμπάγειας.

Ορισμός 12 *Ένα σύνολο* Σ *από προτάσεις θα λέγεται* **ικανοποιήσιμο** *ή* **συμβατό** *αν υπάρχει μια εκτίμηση* v *ώστε* $v(\Phi) = 1$ *για κάθε* $\Phi \in \Sigma$. *Διαφορετικά θα λέγεται* **ασύμβατο**.

Παράδειγμα-Άσκηση (J.F. Pabion *Logique Mathematique.*) Ένας εκκεντρικός φτιάχνει έναν όμιλο και θέτει τους παρακάτω κανόνες για τα μέλη:

- Κάθε μέλος που δεν είναι αναρχικός θα πρέπει να είναι μαθηματικός.
- Κάθε μέλος έχει ξανθά μαλιά ή δεν είναι μαθηματικός.
- Τα παντρεμένα μέλη δεν έρχονται Κυριακές.
- Ένα μέλος έρχεται Κυριακή αν και μόνο αν είναι αναρχικός.
- Κάθε μέλος που είναι ξανθός είναι αναρχικός και παντρεμένος.
- Κάθε αναρχικός πρέπει να είναι ξανθός.

Το πρόβλημα είναι αν αυτός ο όμιλος μπορεί να έχει ένα τουλάχιστον μέλος. Ας θεωρήσουμε τώρα τις προτάσεις:

- A : «Ο Χ είναι αναρχικός»
- B : «Ο Χ είναι μαθηματικός»
- C : «Ο Χ είναι ξανθός»
- D : «Ο Χ έρχεται την Κυριακή»
- E : «Ο Χ είναι παντρεμένος».

θεωρώ το παρακάτω σύνολο Σ προτάσεων (που είναι το σύνολο των κανόνων του ομίλου και έχουμε απλοποιήσει τους τύπους παραλείποντας κάποιες παρενθέσεις).

$$\Sigma = \{\neg A \Longrightarrow B, C \vee (\neg B), E \Longrightarrow \neg(D), D \Longleftrightarrow A, C \Longrightarrow (A \wedge E), A \Longrightarrow C\}$$

. Δείξτε ότι το Σ δεν είναι συμβατό. Συνεπώς και ο όμιλος δεν θα έχει ποτέ κάποιο μέλος.

Κάνουμε τις παρακάτω απλές παρατηρήσεις σχετικά με την της συμβατότητας ενός συνόλου τύπων. Ο αναγνώστης μπορεί να τις αποδείξει εύκολα.

- Αν το Σ είναι συμβατό και $\Phi \in \Sigma$ τότε $(\neg\Phi) \notin \Sigma$. Δηλαδή δεν είναι δυνατόν ένας τύπος και η άρνησή του να περιέχονται ταυτόχρονα σε ένα συμβατό σύνολο τύπων. Γενικότερα,
- Ένα συμβατό σύνολο τύπων δεν περιέχει αντιφάσεις.
- Ένα σύνολο από ταυτολογίες είναι συμβατό.
- Αν ένα σύνολο τύπων είναι συμβατό τότε και κάθε υποσύνολό του είναι επίσης.

Αν ένα σύνολο τύπων είναι συμβατό τότε (όπως παρατηρήσαμε προηγουμένως) και κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι συμβατό. Όμως αληθεύει και το αντίστροφο. Αυτό είναι το περιεχόμενο του παρακάτω σημαντικύ θεωρήματος:

Θεώρημα 2 (Το Θεώρημα της συμπάγειας) *Ένα σύνολο τύπων είναι συμβατό αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι συμβατό.*

Θα αποδείξουμε το θεώρημα με την υπόθεση ότι το σύνολο των μεταβλητών μας είναι αρίθμησιμο και έχει δοθεί μια συγκεκριμμένη αρίθμηση του συνόλου των μεταβλητών:

$$M = \{x_1, x_2, \dots, \}$$

Στη γενική περίπτωση που δεν υποθέτουμε τίποτα για το M πρέπει να καταφύγουμε σε αξιώματα της θεωρίας συνόλων, συγκεκριμένα στο Λήμμα του Zorn που είναι μια ισοδύναμη μορφή του αξιώματος επιλογής.Αυτό δεν θα μας απασχολήσει ακόμα. Μια αρίθμηση των μεταβλητών επάγει και μια αρίθμηση στο σύνολο όλων των εκφράσεων της γλώσσας και συνεπώς στο σύνολο των τύπων της. Για να το δούμε αυτό θα θεωρήσουμε την παρακάτω αντιστοιχία φ από το σύμβολο των συμβόλων της γλώσσας μας στο $\mathbb{N}$.

- $(\longrightarrow 1$ ή $\varphi(\ (\ ) = 1$
- $) \longrightarrow 2$ ή $\varphi(\ )\ ) = 2$
- $\neg \longrightarrow 3$ ή $\varphi(\ \neg\ ) = 3$
- $\vee \longrightarrow 4$
- $\wedge \longrightarrow 5$
- $\Longrightarrow \longrightarrow\ 6$
- $\Longleftrightarrow \longrightarrow 7$
- Η μεταβλητή $x_n \ \longrightarrow n + 7$

Στη συνέχεια θεωρώ την ακολουθία των πρώτων αριθμών $p_1, p_2, p_3, \dots,$ $(p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_6 = 11$ κλπ). Κάθε τύπος Φ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων $\sigma_1 \dots \sigma_k$. Ορίζω

$$f(\Phi) = p_1^{\varphi(\sigma_1)} p_2^{\varphi(\sigma_2)} \dots p_k^{\varphi(\sigma_k)}$$

Η απεικόνιση f είναι μία 1-1 απεικόνιση από το σύνολο των τύπων της γλώσσας στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Αυτό προκύπτει εύκολα από το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής, ότι κάθε αριθμός έχει μοναδική ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Άρα το σύνολο των τύπων μπορεί να ταυτιστεί με υποσύνολο των φυσικών αριθμών και έτσι αριθμείται. (Να βρείτε το $f(\Phi)$ αν Φ είναι ο τύπος $(x_3) \Longrightarrow ((\neg(x_2)) \Longrightarrow (x_2))$.

Για ευκολία θα χρησιμοποιήσουμε την εξής ορολογία:

Ορισμός 13 *Ένα σύνολο Σ από τύπους θα ονομάζεται* **πεπερασμένα συμβατό** *αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι συμβατό.*

Με αυτές τις αρχικές παρατηρήσεις ξεκινάμε την απόδειξη του θεωρήματος της συμπάγειας. Όπως είπαμε αυτό που πρέπει να δείξουμε είναι ότι ένα πεπερασμένα συμβατό σύνολο είναι και συμβατό. Ας θεωρήσουμε ότι δίνεται ένα πεπερασμένα συμβατό συνολο τύπων Σ. Θεωρούμε και μια αρίθμηση όλων των τύπων της γλώσσας σαν

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_n \ldots$$

Κατασκευάζουμε μια ακολουθία $(\Sigma_n)_{n=0}^{+\infty}$ από σύνολα τύπων με τον παρακάτω τρόπο:

- $\Sigma_0 = \Sigma$
- $$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \bigcup \{\Phi_{n+1}\}$$

  αν το σύνολο $\Sigma_n \bigcup \{\Phi_{n+1}\}$ είναι πεπερασμένα συμβατό. Διαφορετικά θέτουμε
  $$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \bigcup \{\neg(\Phi_{n+1})\}$$
- Τέλος θέτουμε
  $$\Sigma_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma_n$$

Λήμμα 5 *Κάθε σύνολο Σ_n είναι πεπερασμένα συμβατό. Επίσης το Σ_∞ είναι πεπερασμένα συμβατό.*

Θα δείξουμε το προηγούμενο λήμμα με επαγωγή στο n.

Για $n = 0$ το Σ_0 είναι πεπερασμένα συμβατό από υπόθεση.

Αν γνωρίζω ότι το Σ_n είναι πεπερασμένα συμβατό θα δείξω ότι ισχύει το ίδιο και για το Σ_{n+1}.

Η μόνη περίπτωση που πρέπει να εξετάσω είναι αν αυτό συμβαίναι όταν το $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \bigcup \{\neg(\Phi_{n+1})\}$. Αυτό σημαίνει ότι το $\Sigma_n \bigcup \{\Phi_{n+1}\}$ δεν είναι πεπερασμένα συμβατό.

Θεωρώ ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο τύπων του Σ_n, $\{\Psi_1, ..., \Psi_k\}$ και αρκεί να δείξω ότι το $\{\Psi_1, ..., \Psi_k, \neg\Phi\}$ είναι συμβατό, δηλαδή ότι υπάρχει μια εκτίμηση v με $v(\Psi_1) = v(\Psi_k) = v(\neg\Phi) = 1$.

Επειδή το $\Sigma_n \bigcup \{\Phi_{n+1}\}$ δεν είναι πεπερασμένα συμβατό, θα υπάρχουν κάποιοι τύποι του Σ_n, $T_1, ..., T_m$, ώστε για **οποιαδήποτε** εκτίμηση v με $v(T_1) = ... = v(T_m) = 1$ θα συμβαίνει $v(\Phi) = 0$.

Επειδή το Σ_n είναι πεπεραμένα συμβατό θα υπάρχει μια εκτίμηση v των μεταβλητών ώστε να καθιστά αληθείς όλους τους τύπους $\{T_1, T_2, ..., T_m, \Psi_1, ..., \Psi_k\}$, δηλαδή

$$v(T_1) = ... = v(T_m) = v(\Psi_1) = ... = v(\Psi_k) = 1$$

Αλλά τότε $v(\Phi) = 0$ και συνεπώς $v(\neg\Phi) = 1$. Το πρώτο μέρος του λήμματος αποδείχτηκε.

Μένει μόνο να δείξουμε ότι το $\Sigma_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma_n$ είναι πεπερασμένα συμβατό. Αυτό συμβαίνει γιατί $\Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \Sigma_3 \subset ...$ Ας πάρουμε ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο τύπων του Σ_∞, $\{\Psi_1, ..., \Psi_k\}$ τότε από την προηγούμενη παρατήρηση αυτό θα περιέχεται αναγκαστικά σε κάποιο Σ_n, άρα θα είναι συμβατό. Το Λήμμα αποδείχτηκε πλήρως.

Γυρίζουμε στην απόδειξη του θεωρήματος. Από τον τρόπο που κατασκευάστηκε το Σ_∞ θα περιέχει κάθε τύπο της γλώσσας ή την άρνησή του. Αυτό αμέσως συνεπάγεται το

Λήμμα 6 *Το Σ_∞ δεν περιέχεται γνήσια σε πεπερασμένα συμβατό σύνολο.*

Πράγματι, αν κάποιο σύνολο τύπων S περιείχε γνήσια το Σ_∞ τότε αν Φ είναι κάποιος τύπος του του S που δεν είναι στο Σ_∞ τότε στο Σ_∞ (άρα και στο S) θα ανήκει ο $\neg\Phi$. Άρα το S θα περιείχε ένα τύπο και την άρνησή του και έτσι δεν θα ήταν συμβατό.

Λήμμα 7

1. *Αν $(\Phi \wedge \Psi) \in \Sigma_\infty$ τότε $\Phi \in \Sigma_\infty$ και $\Psi \in \Sigma_\infty$*
2. *Αν $(\Phi \vee \Psi) \in \Sigma_\infty$ τότε $\Phi \in \Sigma_\infty$ ή $\Psi \in \Sigma_\infty$*
3. *Αν $(\Phi \Longrightarrow \Psi) \in \Sigma_\infty$ τότε $\neg\Phi \in \Sigma_\infty$ ή $\Psi \in \Sigma_\infty$*
4. *Αν $(\Phi \Longleftrightarrow \Psi) \in \Sigma_\infty$ τότε είτε $\Phi \in \Sigma_\infty$ και $\Psi \in \Sigma_\infty$ είτε $\neg\Phi \in \Sigma_\infty$ και $\neg\Psi \in \Sigma_\infty$*

Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι το Σ_∞ περιέχει κάθε τύπο ή την άρνησή του. Ας δούμε για παράδειγμα το (1). Αν $(\Phi \wedge \Psi) \in \Sigma_\infty$ και δεν συνέβαινε $\Phi \in \Sigma_\infty$ τότε θα έπρεπε $\neg\Phi \in \Sigma_\infty$. Είναι εύκολο να δούμε ότι το $\{(\Phi \wedge \Psi), \neg\Phi\}$ είναι ασύμβατο και αυτό αντιφάσκει στο ότι το Σ_∞ είναι πεπερασμένα συμβατό. Τα άλλα αποδεικνυόνται παρόμοια.

Τώρα σχεδόν τελειώσαμε.
Ορίζω την εξής εκτίμηση.

- $v(x_n) = 1$ αν $x_n \in \Sigma_\infty$
- $v(x_n) = 0$ αν $\neg x_n \in \Sigma_\infty$

Επειδή για κάθε μεταβλητή x_n συμβαίνει είτε $x_n \in \Sigma_\infty$ είτε $\neg x_n \in \Sigma_\infty$ και αυτά τα δύο δεν συμβαίνουν ταυτόχρονα, έχω εκτιμήσει με αυτό τον τρόπο όλες τις μεταβλητές μου. Θα δείξουμε ότι συμβαίνει $v(\Phi) = 1$ για κάθε $\Phi \in \Sigma_\infty$ άρα και για κάθε $\Phi \in \Sigma$. Θα χρησιμοποιήσουμε για το σκοπό αυτό επαγωγή στην τάξη τ του Φ (πηγαίνετε στη σελίδα....).

Αν $\tau(\Phi) = 0$ ο Φ είναι μεταβλητή και αυτό ισχύει. Ας υποθέσω ότι αυτό το γνωρίζω για κάθε τύπο του Σ_∞ με τάξη $\tau(\Phi) \leq n$. Ας υποθέσω ότι $\Phi\Sigma_\infty$ και $\tau(\Phi) = n+1$. Τότε είτε $\Phi = \neg(\Psi)$ είτε $(\Phi) = (\Phi)_1 \star (\Phi)_2$ με $\star \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$. Ας πάρουμε για παράδειγμα ότι $(\Phi) = (\Phi)_1 \wedge (\Phi)_2$. Επειδή $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \in \Sigma_\infty$ τότε από Λήμμα 7 $\Phi \in \Sigma_\infty$ και $\Psi \in \Sigma_\infty$ και επειδή έχουν τάξη $\leq n$ θα πρέπει και $v(\Phi_1) = v(\Phi_2) = 1$. Αλλά τότε και $v(\Phi_1 \wedge \Phi_2) = 1$. Όμοια δείχνουμε και όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

1.12 Λογικό συμπέρασμα και απόδειξη

Ορισμός 14 *Έστω Σ ένα σύνολο από τύπους. Ένας τύπος Φ θα λέγεται **λογική συνέπεια** των τύπων του συνόλου Σ αν οποτεδήποτε αληθεύουν όλοι οι τύποι του Σ αληθεύει και ο Φ, δηλαδή για κάθε εκτίμηση v για την οποία συμβαίνει $v(\Psi) = 1$ θα έχουμε ότι $v(\Phi) = 1$. Θα συμβολίζουμε με*

$$\Sigma \models \Phi$$

το γεγονός ότι ο Φ είναι λογική συνέπεια των τύπων του Σ.

Αφήνουμε την απόδειξη της επόμενης πρότασης στον αναγνώστη. Η απόδειξή των επιμέρους θεωρημάτων της πρότασης είναι απλή και βοηθά στην καλύτερη κατανόηση της έννοιας της λογικής συνέπειας.

Πρόταση 3 *1. $\Phi \models \Phi$, δηλαδή κάθε πρόταση (τύπος) είναι λογική συνέπεια του εαυτού της.*

2. *Αν ο Φ είναι ταυτολογία τότε είναι συνέπεια οποιουδήποτε συνόλου προτάσεων. Ειδικότερα είναι λογική συνέπεια του κενού συνόλου, και συνεπώς θα θεωρούμε*

$$\models \Phi \ \text{ αν και μονο αν ο } \Phi \text{ είναι ταυτολογία}$$

3. *Αν ένας τύπος είναι λογική συνέπεια ενός συνόλου τύπων τότε είναι λογική συνέπεια και κάθε υπερσυνόλου του:*

$$\text{Αν } \ \Sigma \models \Phi \ \text{ και } \Sigma' \supset \Sigma \ \text{ τότε } \Sigma' \models \Phi$$

4. *Αν ένα σύνολο τύπων δεν είναι συμβατό τότε κάθε τύπος είναι λογική συνέπειά του. Ειδικά κάθε τύπος είναι λογική συνέπεια μιάς αντίφασης.*

5. *Αν $\Sigma \models \Phi$ και το Σ είναι συμβατό τότε και το $\Sigma \cup \{\Phi\}$ είναι συμβατό.*

6. $$\text{Αν } \ \Sigma \cup \{\Psi\} \models \Phi \quad \text{τότε } \Sigma \models \Psi \Longrightarrow \Phi$$

   Ειδικά,
   $$\text{Αν } \ \Psi \models \Phi \quad \text{τότε } \models \Psi \Longrightarrow \Phi$$

7. $\Phi \wedge \Psi \ \models \Phi, \quad \Phi \wedge \Psi \ \models \ \Psi.$

8. $\{\Phi, \Psi\} \models \Phi \wedge \Psi, \ \ \{\Phi, \Psi\} \models \Phi \vee \Psi.$

9. $\{\Phi, \Phi \Longrightarrow \Psi\} \ \models \ \Psi$

Περνάμε τώρα στην έννοια της απόδειξης. Διαισθητικά, μία απόδειξη είναι μία διαδοχή προτάσεων που η κάθε μία τους είτε είναι υπόθεση (αξίωμα), είτε έχει δειχθεί με μια απόδειξη, είτε προκύπτει από κάποιες προηγούμενες με την εφαρμογή ενός αποδεικτικού κανόνα. Ένας αποδεικτικός κανόνας είναι κανόνας που μας λέει πότε μια πρόταση είναι μια συνέπεια κάποιων άλλων. θα δώσουμε ένα παράδειγμα ενός τέτου κανόνα, ο οποίος θα είναι προς το παρόν ο μοναδικός κανόνας που θα παραδεχόμαστε. Αυτός λέγεται «modus ponens» και έχει ως εξής:

$$\frac{\Phi, \qquad \Phi \Longrightarrow \Psi}{\Psi}$$

Ο κανόνας αυτός μας λέει ότι σε μια αποδεικτική διαδικασία ο τύπος Ψ προκύπτει (αποδεικνύεται) αν γνωρίζουμε ότι οι τύποι Φ, $\Phi \Longrightarrow \Psi$ είναι ήδη αποδεδειγμένοι.

Ορισμός 15 *Θα λέμε ότι ένας τύπος **αποδεικνύεται** (ή **είναι συνέπεια**) ενός συνόλου τύπων Σ αν υπάρχει μια ακολουθία τύπων*

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_n$$

για την οποία συμβαίνουν τα εξής:
Για κάθε τύπο Φ_i της ακολουθίας είτε

- $\Phi \in \Sigma$, *είτε*
- *Υπάρχουν $k, j < i$ με $\Phi_j = \Phi_k \Longrightarrow \Phi_i$. Με άλλα λόγια ο Φ_i προκύπτει από δύο προηγούμενους τύπους της ακολουθίας (τους Φ_k, Φ_j με εφαρμογή του κανόνα «modus ponens».*
- $\Phi_n = \Phi$

*Μια τέτοια ακολουθία θα ονομάζεται μια **απόδειξη** του Φ από το σύνολο των τύπων Σ.*
Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$\Sigma \vdash \Phi$$

αν ο τύπος Φ αποδεικνύεται από τους τύπους του Σ.

Οι έννοιες της λογικής συνέπειας και της απόδειξης φαίνεται να συνδέονται μεταξύ τους. Υπάρχει όμως μια σοβαρή διαφορά.

Ο ορισμός της λογικής συνέπειας συνδέεται άμεσα με την έννοια της εκτίμησης των μεταβλητών και τους πίνακες αλήθειας. Για παράδειγμα για να δείξουμε το $\{\Phi,\ \Phi \vee \Psi\} \models \Psi$ κάνουμε τον παρακάτω συλλογισμό: Έστω v μια οποιαδήποτε εκτίμηση που μας δίνει $v(\Phi) = 1,\ v(\Phi \vee \Psi) = 1$ Από τον πίνακα αληθείας για το σύνδεσμο $\vee$:

Φ	Ψ	$\Phi \vee \Psi$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

έχουμε ότι αναγκαστικά και $v(\Psi) = 1$. Είναι σαφές όμως ότι το $\{\Phi,\ \Phi \vee \Psi\} \vdash \Psi$ δεν μπορούμε να το δείξουμε από τον ορισμό και μόνο αφού ο ορισμός μας απόδειξης είναι εντελώς ανεξάρτητος από πίνακες αλήθειας, εκτιμήσεις κλπ... Παρόλα αυτά μπορούμε να δείξουμε το εξής:

Πρόταση 4 *Αν $\Sigma \vdash \Phi$ τότε $\Sigma \models \Phi$.*

Απόδειξη. Αυτό είναι μια συνέπεια του γεγονότος ότι ο modus ponens διατηρεί την αλήθεια με άλλα λόγια επειδή:

$$\{\Phi, \Phi \iff \Psi\} \models \Psi$$

Αυτό το δείχνουμε με πίνακα αληθείας όπως προηγουμένως. Αν συνεπώς $\Sigma \vdash \Phi$ τότε θα υπάρχει μια απόδειξη $\Phi_1, ..., \Phi_n = \Phi$ του Φ στο Σ. Αν v είναι μια εκτίμηση για την οποία για κάθε τύπο T στο Σ ισχύει $v(T) = 1$ τότε από τον ορισμό της απόδειξης και την προηγούμενη παράτηρηση δείχνουμε επαγωγικά ότι για κάθε τύπο Φ_i που εμφανίζεται στην απόδειξη θα έχουμε ότι $v(Phi_1) = 1$, άρα και τελικά $v(\Phi_n) = v(\Phi) = 1$ ■

Παρακάτω θα δείξουμε πως αν στο σύνολο των υποθέσεων μας συμπεριλάβουμε όλες τις ταυτολογίες τότα θα ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή $\Sigma \models \Phi$ τότε $\Sigma \vdash \Phi$. Ας συμβολίσουμε με $\mathcal{T}$ το σύνολο όλων των ταυτολογιών. Τότε θα δείξουμε το εξής:

Θεώρημα 3 *Αν $\Sigma \supset \mathcal{T}$ τότε $\Sigma \models \Phi$ αν και μόνο αν $\Sigma \vdash \Phi$.*

Από εδώ και πέρα θα υποθέτουμε πάντα ότι το Σ περιέχει όλες τις ταυτολογίες ή που είναι το ίδιο σε κάθε βήμα μιας απόδειξης μπορούμε να χρησιμοποιούμε ταυτολογίες. Το επόμενο Λήμμα είναι ιδιαίτερα βασικό:

Λήμμα 8 (Το Λήμμα παραγωγής) *$\Sigma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$ αν και μόνο αν $\Sigma \vdash (\Phi \implies \Psi)$. Ειδικότερα, $\Phi \vdash \Psi$ αν και μόνο αν $\vdash (\Phi \implies \Psi)$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $\Sigma \vdash (\Phi \implies \Psi)$ και έστω

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_n = (\Phi \implies \Psi)$$

μια απόδειξη της $(\Phi \implies \Psi)$. Τότε η

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_n = (\Phi \implies \Psi), \Phi, \Psi$$

είναι μια απόδειξη της Ψ, από το $\Sigma \cup \{\Phi\}$, όπου ο τελευταίος τύπος (ο Ψ) προκύπτει από τους δύο προηγούμενους με εφαρμογή του modus ponens.

Αντίστροφα. Έστω $\Sigma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$ και έστω

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_n = \Psi$$

μια απόδειξη της Ψ. Θα δείξω με επαγωγή στο i ότι $\Sigma \vdash (\Phi \Longrightarrow \Phi_i)$ ισχύει για κάθε $i \leq n$. και η πρόταση θα αποδειχτεί όταν $i = n$. Αν $i = 1$ τότε η Φ_1 είναι είτε στοιχείο του Σ είτε ταυτολογία είτε $\Phi_1 = \Phi$. Στις δύο πρώτες περιπτώσεις η παρακάτω είναι μια απόδειξη της $\Phi \Longrightarrow \Phi_i$ μόνο από το Σ:

1. Φ_1 (στοιχείο του Σ ή ταυτολογία)
2. $\Phi_1 \Longrightarrow (\Phi \Longrightarrow \Phi_1)$ (ταυτολογία)
3. $\Phi \Longrightarrow \Phi_1$ (από (1) και (2) και modus ponens.

Ατη τρίτη περίπτωση πρέπει να δείξουμε ότι $\Sigma \vdash \Phi \Longrightarrow \Phi$, αλλά η $\Phi \Longrightarrow \Phi$ είναι ταυτολογία και αυτό συμβαίνει από την υπόθεση ότι το Σ περιέχει όλες τις ταυτολογίες.

Έστω ότι $\Sigma \vdash (\Phi \Longrightarrow \Phi_k)$ για κάθε $k \leq i < n$. Θα δείξουμε ότι ότι $\Sigma \vdash (\Phi \Longrightarrow \Phi_{i+1})$.

Αν ο Φ_{i+1} είναι είτε στοιχείο του Σ είτε ταυτολογία είτε $\Phi_1 = \Phi$ αυτό το δείχνω όπως στην περίπτωση $i = 1$. Μένει η περίπτωση που ο Φ_{i+1} προκύπτει από τις Φ_j και $\Phi_k = \Phi_j \Longrightarrow \Phi_{i+1}$ για κάποια $j, k < i + 1$. Από την επαγωγική μας υπόθεση $\Sigma \vdash (\Phi \Longrightarrow \Phi_j)$ και $\Sigma \vdash (\Phi \Longrightarrow (\Phi_j \Longrightarrow \Phi_{i+1}))$.

Η παρακάτω είναι μια απόδειξη της $\Phi \Longrightarrow \Phi_{i+1}$ μόνο από το Σ:

1. $(\Phi \Longrightarrow \Phi_j)$ (Υπόθεση)
2. $(\Phi \Longrightarrow (\Phi_j \Longrightarrow \Phi_{i+1}))$.(Υπόθεση)
3. $(\Phi \Longrightarrow (\Phi_j \Longrightarrow \Phi_{i+1})) \Longrightarrow ((\Phi \Longrightarrow \Phi_j) \Longrightarrow (\Phi \Longrightarrow \Phi_{i+1}))$ (Ταυτολογία).
4. $(\Phi \Longrightarrow \Phi_j) \Longrightarrow (\Phi \Longrightarrow \Phi_{i+1})$ ((2) και (3) με MP).
5. $\Phi \Longrightarrow \Phi_{i+1}$ ((1) και (4) με MP).

■

1.13 Συνέπεια και Πληρότητα

Θα θεωρούμε ένα σύνολο τύπων συνεπές αν από αυτό δεν μπορεί να προκύψει αντίφαση. Η κλασσική αντίφαση είναι η $\Phi \wedge (\neg\Phi)$. Έτσι δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 16 *Ένα σύνολο τύπων Σ θα λέγεται **ασυνεπές** αν υπάρχει ένας τύπος Φ ώστε $\Sigma \vdash \Phi \wedge (\neg\Phi)$. Το Σ θα λέγεται **συνεπές** αν δεν είναι ασυνεπές.*

Πρόταση 5 *Ένα ασυνεπές σύνολο τύπων μπορεί να αποδείξει οποιονδήτε τύπο.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξω ότι ένας τύπος της μορφής $\Phi \wedge (\neg\Phi)$ μπορεί να αποδείξει οποιοδήτε άλλο τύπο Ψ. Η παρακάτω είναι μια τέτοια απόδειξη:

1. $\Phi \wedge (\neg\Phi)$ (Υπόθεση)
2. $(\Phi \wedge (\neg\Phi)) \Longrightarrow \Psi$ (Ταυτολογία).
3. Ψ από (1),(2) και MP.

■

Πρόταση 6 *Ένα σύνολο τύπων είναι συνεπές αν και μόνο αν υπάρχει ένας τύπος που δεν μπορεί να αποδειχτεί από αυτό. Συγκεκριμμένα αν το Σ δεν μπορεί να σποδείξει τον Φ τότε το $\Sigma \cup \{\neg\Phi\}$ είναι συνεπές.*

Απόδειξη. Αν το Σ είναι συνεπές τότε δεν θα μπορεί να αποδείξει τον τύπο $\Phi \wedge (\neg\Phi)$. Αντίστροφα αν υπάρχει κάποιος τύπος Φ που δεν μπορεί να τον αποδείξει είναι συνεπές γιατί από την προηγούμενη πρόταση τα ασυνεπή σύνολα τύπων αποδεικνύουν τα πάντα. ■

Πρόταση 7 *Ένα συνεπές σύνολο Σ δεν είναι σε θέση να αποδείξει ένα τύπο Φ και τον $\neg\Phi$.*

Απόδειξη. Πράγματι αν αυτό γινόταν θα είχαμε την παρακάτω απόδειξη του $\Phi \wedge \neg\Phi$. Αν ένα σύνολο μπορεί να αποδείξει ένα τύπο τότε και κάθε υπερσύνολό του μπορεί να τον αποδείξει (γιατί;). Άρα το $\Sigma \cup \{\Phi\}$ μπορεί να αποδείξει τον $\neg\Phi$. Από το Λήμμα παραγωγής θα έχουμε ότι το Σ μπορεί να αποδείξει το $\Phi \Longrightarrow \neg\Phi$. Έτσι θα είχαμε την παρακάτω απόδειξη του $\Phi \wedge \neg\Phi$.

1. Φ (Υπόθεση)

2. $\neg\Phi$ (Υπόθεση)

3. $\Phi \Longrightarrow \neg\Phi$.(Λήμμα παραγωγής)

4. $(\Phi \Longrightarrow \neg\Phi) \Longrightarrow (\Phi \wedge \neg\Phi)$ (Ταυτολογία)

5. $(\Phi \wedge \neg\Phi)$ «3), (4) και MP)

■

(**Άσκηση:** Δείξτε ότι αν $\Sigma \vdash \Phi$ και το Φ είναι αντίφαση τότε το Σ δεν είναι συνεπές.)

Δεν είναι απαραίτητο όμως ένα σύνολο προτάσεων αν δεν μπορεί να αποδείξει μια πρόταση να μπορεί να αποδείξει την άρνησή της.

Ορισμός 17 *Μια πρόταση Φ λέγεται **ανεξάρτητη** από ένα σύνολο προτάσεων αν $\Sigma \not\vdash \Phi$ και $\Sigma \not\vdash \neg\Phi$*

Η ακόλουθη πρόταση είναι προφανής:

Πρόταση 8 *Ο Φ είναι ανεξάρτητος τύπος από το Σ αν και μόνο τα σύνολα $\Sigma \cup \{\Phi\}$ και $\Sigma \cup \{\neg\Phi\}$ είναι και τα δύο συνεπή σύνολα τύπων.*

Ορισμός 18 *Ένα σύνολο τύπων Σ θα λέγεται **πλήρες** αν δεν υπάρχει ανεξάρτητη πρόταση από αυτό. Με άλλα λόγια για κάθε τύπο Φ είτε $\Sigma \vdash \Phi$ είτε $\Sigma \vdash \neg\Phi$*

Λήμμα 9 *Αν το Σ είναι ένα συνεπές σύνολο από τύπους τότε υπάρχει ένα υπερσύνολο του Σ_∞ που είναι συνεπές και πλήρες. Δηλαδή, κάθε συνεπές σύνολο επεκτείνεται σε πλήρες.*

Απόδειξη. Η απόδειξη του Λήμματος μοιάζει πολύ με αυτήν του Λήματος 6 που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του θεωρήματος της συμπάγειας, το οποίο έδειχνε ότι κάθε πεπερασμένα συμβατό σύνολο επεκτείνεται σε πεπερασμένα συμβατό που είναι μέγιστο, υπό την έννοια ότι δεν περιέχεται γνήσια σε κανένα άλλο πεπερασμένα συμβατό σύνολο. Για να πετύχουμε ένα τέτοιο σύνολο κάναμε μια αρίθμηση όλων των τύπων σαν

$$\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n, ...$$

και διαδοχικά προσθέταμε τον Φ_n ή την άρνησή του, ανάλογα αν αυτό που προέκυπτε ήταν συμβατό ή όχι. Κατά τον ίδιο τρόπο ορίζουμε μια ακολουθία συνόλων $(\Sigma_n)_{n=0}^{+\infty}$ ως εξής:

- $\Sigma_0 = \Sigma$
- $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\Phi_n\}$ αν το $\Sigma_n \cup \{\Phi_n\}$ είναι συνεπές διαφορετικά ορίζουμε $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\neg\Phi_n\}$.

Το κάθε σύνολο Σ_n είναι συνεπές. Αυτό το δείχνουμε με επαγωγή. Για $n = 0$ αυτό ισχύει από την υπόθεσή μας. Αν αυτό ισχύει για κάποιο n τότε αν $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\Phi_n\}$ τότε το Σ_{n+1} είναι συνεπές γιατί έτσι το θεωρήσαμε. Αν $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\neg\Phi_n\}$, τότε το $\Sigma_n \cup \{\Phi_n\}$ δεν είναι συνεπές. Άρα $\Sigma_n \cup \{\Phi_n\} \vdash \neg\Phi_n$ γιατί είδαμε ότι ένα ασυνεπές σύνολο μπορεί να αποδείξει κάθε τύπο. Από το Λήμμα παραγωγής θα είχαμε τότε ότι $\Sigma \vdash (\Phi_n \Longrightarrow \neg\Phi_n)$. Αλλά ο τύπος $(\Phi_n \Longrightarrow \neg\Phi_n)$ είναι αντίφαση που σημαίνει ότι το Σ_n δεν είναι συνεπές. Άτοπο.

Επειδή $\Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \Sigma_3 \subset ...$ θα έχουμε ότι το $\Sigma_\infty = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \Sigma_n$ είναι συνεπές, και είναι βέβαια πλήρες γιατί περιέχει οποιονδήποτε τύπο ή την άρνησή του. ■

Ερχόμαστε τώρα σε ένα ιδιαίτερο σημαντικό θεώρημα που αποδείχτηκε από τον Bernays το 1926. Η γενικεύσή του στις γενικότερες γλώσσες είναι το περίφημο Θεώρημα Πληρότητας του Godel (αποδείχτηκε το 1930) το οποίο θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Στην περιορισμένη του μορφή ονομάζεται Θεώρημα Πληρότητας για τον προτασιακό λογισμό.

Θεώρημα 4 (Θεώρημα Πληρότητας Προτασιακού Λογισμού) *Κάθε συνεπές σύνολο είναι συμβατό.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ταυτόσημη με αυτή του θεωρήματος συμπάγειας. Έστω Σ ένα συνεπές σύνολο τύπων. Θεωρώ το πλήρες και συνεπές υπερσύνολό του Σ_∞ που ορίσαμε στο προηγούμενο Λήμμα. Από τον ορισμό του για κάθε μεταβλητή X_n είτε η X_n είτε η $\neg X_n$ θα ανήκει στο Σ_∞. Θα ορίσω μια εκτίμηση των μεταβλητών $X_1, X_2, ...$ v ως εξή:

- $v(X_n) = 1$ αν $X_n \in \Sigma_\infty$
- $v(X_n) = 1$ αν $X_n \notin \Sigma_\infty$

Θα δείξουμε ότι για κάθε τύπο $\Phi \in \Sigma_\infty$ ισχύει $v(\Phi) = 1$, οπότε το Σ_∞ άρα και Σ είναι συμβατά. Για τις μεταβλητές αυτό συμβαίνει εξ ορισμού. Ας υποθέσουμε ότι αυτό συμβαίνει για κάθε τύπο Φ στο Σ_∞ τάξης $\tau(\Phi) = n$ και έστω Φ στο Σ_∞ τάξης $\tau(\Phi) = n+1$. Τότε είτε $\Phi = \neg(\Psi)$ είτε $(\Phi) = (\Phi)_1 \star (\Phi)_2$ με $\star \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$. Ας πάρουμε για παράδειγμα ότι $\Phi = \neg(\Psi)$. Τότε πρέπει $v(\Psi) = 0$ οπότε $v(\Phi) = 1$. Πράγματι αν αυτό δεν συνέβαινε τότε λόγω της μεγιστικότητας του Σ_∞ και της επαγωγικής υπόθεσής μας $\Psi \in \Sigma_\infty$ οπότε το

Σ_∞ θα περιέχει τύπο και την άρνησή του που δεν μπορεί να συμβαίνει γιατί είναι συνεπές. Όμοια, ας υποθέσουμε ότι $(\Phi) = (\Phi)_1 \wedge (\Phi)_2$. Τότε θα πρέπει $(\Phi)_1\,(\Phi)_2 \in \Sigma_\infty$, οπότε και σε αυτή την περίπτωση $v(\Phi) = 1$. Πράγματι αν για παράδειγμα $(\Phi)_1 \notin \Sigma_\infty$ τότε $\neg(\Phi)_1 \in \Sigma_\infty$ και τότε από το λήμμα παραγωγής το Σ_∞ θα αποδείκνυε τον $\neg(\Phi)_1 \Longrightarrow (\Phi) = (\Phi)_1 \wedge (\Phi)_2$ που είναι αντίφαση. Άτοπο. Μια καλή άσκηση είναι να τελειώσετε την απόδειξη του θεωρήματος ελέγχοντας και τις υπόλοιπες περιπτώσεις. ■

Σαν Πόρισμα αποδείξτε το Θεώρημα 3 που αφήσαμε αναπόδεικτο στην προηγούμενη παράγραφο.

1.14 Αξιωματικοποίηση του Προτασιακού Λογισμού

Στην προηγούμενη παράγραφο για να αποδείξουμε το θεώρημα της πληρότητας υποθέσαμε ότι στα βήματα μιας απόδειξης μπορούμε να χρησιμοποιούμε οποιαδήποτε ταυτολογία. Αυτό μας έκανε να εξαρτόμαστε από τους πίνακες αληθείας και πάλι. Ωστόσο υπάρχουν τρία σχήματα τύπων, οι οποίοι είναι σχήματα ταυτολογιών, μέσα από τους οποίους μπορούμε να αποδείξουμε όλες τις ταυτολογίες. Αυτά είναι τα παρακάτω:

(T1) $X \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$

(T2) $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Z))$

(T3) $(\neg X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow ((\neg X \Rightarrow Y) \Rightarrow X)$

Υπενθυμίζουμε ότι με τον όρο σχήμα τύπου είναι μία έκφραση από την οποία παίρνουμε άπειρους τύπους αντικαθιστώντας τις μεταβλητές με οποιουσδήποτε τύπους.

Μπορούμε να δείξουμε ότι τα τρία αυτά σχήματα ταυτολογιών μπορούν να αποδείξουν το θεώρημα της πληρότητας. Σαν άμεση συνέπεια έχουμε ότι μπορούν να αποδείξουν κάθε ταυτολογία. Ας συμβολίσουμε με Σ_0 το (άπειρο) σύνολο όλων των ταυτολογιών που είναι στη μορφή **(T1)**, **(T2)** ή **(T3)**. Έχουμε λοιπόν ότι ισχύει το:

Θεώρημα 5 *Για κάθε ταυτολογία P ισχύει $\Sigma_0 \vdash P$*

Θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος που είναι αρκετά τεχνική.

Αρχικά θα δείξουμε το παρακάτω:

Λήμμα 10 *Για οποιουσδήποτε τύπους* P, Q, R

1. $\Sigma_0 \vdash P \to P$
2. $\Sigma_0 \cup \{P \to Q, Q \to R\} \vdash P \to R$
3. $\Sigma_0 \cup \{P \to (Q \to R), Q\} \vdash P \to R$
4. $\Sigma_0 \vdash \neg\neg P \to P$

Απόδειξη. Για το (1) έχουμε την παρκάτω απόδειξη. Σαν άσκηση να δικαιολογήσετε τους συλλογισμούς όπου υπάρχουν κενά (στα (2), (3), (4))

1. $P \to ((P \to P) \to P) \to (P \to (P \to P)) \to (P \to P)))$ (Αξίωμα δηλ Τύπος του Σ_0)
2. $P \to ((P \to P) \to P)$ (Αξίωμα)
3. $P \to ((P \to P) \to P)$ M.P. 1,2
4. $P \to (P \to P)$ (Αξίωμα)
5. $P \to P$ (M.P. 1,2)

Για το (2)

1. $P \to Q$
2. $Q \to R$
3. $(Q \to R) \to (P \to (Q \to R))$
4. $P \to (Q \to R)$
5. $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
6. $(P \to Q) \to (P \to R)$
7. $P \to R$

(3)

1. $P \to (Q \to R)$

2. Q

3. $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

4. $(P \to Q) \to (P \to R)$

5. $Q \to (P \to Q)$

6. $P \to Q$

7. $P \to R$

(4)

1. $\neg\neg P \to (\neg P \to \neg\neg P)$

2. $(\neg P \to \neg\neg P) \to ((\neg P \to \neg P) \to P)$

3. $\neg P \to \neg P$

4. $\neg\neg P \to ((\neg P \to \neg P) \to P)$

5. $\neg\neg P \to P$

■

Στη συνέχεια με τη βοήθεια του προηγούμενου Λήμματος μπορούμε να δείξουμε το Λήμμα παραγωγής στην παρακάτω μορφή:

Λήμμα 11 (Το Λήμμα παραγωγής) *Έστω Σ ένα σύνολο τύπων. Τότε $\Sigma_0 \cup \Sigma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$ αν και μόνο αν $\Sigma_0 \cup \Sigma \vdash (\Phi \Longrightarrow \Psi)$.*

Απόδειξη. Είναι ακριβώς πανομοιότυπη με αυτή του Λήμματος 8. ■

Μετά δείχνουμε ότι ισχύουν όλές οι προτάσεις τις προηγούμενης παραγράφου με την υπόθεση ότι τα αξίωματα μου είναι τα στοιχεία του Σ_0 και μόνο και όχι όλες οι ταυτολογίες. Για λέπτομέρειες παραπέμπουμε στο βιβλίο «Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής» του Α. Τζουβάρα.

Κεφάλαιο 2

Πρωτοβάθμιες Γλώσσες

2.1 Τι είναι μια πρωτοβάθμια γλώσσα.

Μια πρωτοβάθμια γλώσσα είναι ένα σύνολο από σύμβολα που τα έχουμε επιλέξει κατάλληλα ώστε να μπορούν να εκφράσουν όλες της προτάσεις μιας μαθηματικής θεωρίας (Θεωρία Συνόλων, Θεωρία αριθμών, Γεωμετρία...).

Στα μαθηματικά εισάγουμε και αναλύουμε έννοιες. Συνήθως δεν είμαστε σε θέση να ορίσουμε μια έννοια αλλά είμαστε σε θέση να την χειριστούμε μέσα στη γλώσσα. Ουσιαστικά μια έννοια προσδιορίζεται από τον τρόπο που την χειριζόμαστε σε σχέση με άλλες. Αυτό το πλέγμα αλληλοσυσχετισμών αποτελεί το νόημα της γλώσσας μας.

Για παράδειγμα αν πουμε ότι «Πήρα ένα κλειδί και άνοιξα την πόρτα» αυτό μας φαίνεται να έχει νόημα γιατί μπορώ να συσχετίσω το κλειδί με την πόρτα. Αν κάποιος μας πει «πήρα μια μύγα και έτσι άνοιξα την πόρτα» τότε θα αναρωτηθούμε τι είναι αυτή η «μύγα» που αναφέρει η πρόταση και θα σκεφτούμε ότι είναι ίσως μια ορολογία που χρησιμοποιεί αυτός που μας είπε την φράση και θα του ζητήσουμε εξηγήσεις. Αν δεν μας δώσει δεν θα είμαστε σε θέση να αποδώσουμε κάποιο νόημα σε αυτό που μας είπε.

Σε μια μαθηματική θεωρία συνήθως ασχολούμαστε με ένα είδος αντικειμένων. Στη θεωρία συνόλων με σύνολα, στην ανάλυση με πραγματικούς αριθμούς, στη θεωρία των αριθμών με φυσικούς αριθμούς, στη γεωμετρία με σημεία κλπ.

Γλώσσες που με αυτές εξετάζουμε αρχικά μία και μοναδική έννοια (αν και στη συνέχεια μπορούμε να εισάγουμε και άλλες έννοιες, **αλλά μόνο μέσω της αρχικής έννοιας**) θα λέγονται **Πρωτοβάθμιες γλώσσες**. Η Ελληνική γλώσσα θα ήταν μια πρωτοβάθμια γλώσσα αν όλες οι έννοιες της γλώσσας μπορούσαν να οριστούν από μια «βασική έννοια» αλλά αυτό δεν μπορεί να γίνει.

Τα στοιχεία μιας γλώσσας μπορούν να διαιρεθούν χονδρικά στα εξής:

- Σε «τεχνικά στοιχεία» τα οποία είναι σύμβολα που μας βοηθούν απλά και μόνο στον καλύτερο σχηματισμό της πρότασης όπως κόμματα, τελείες και άλλα σήμεία της στοίξης.

- Σε «λογικά στοιχεία» της γλώσσας που μας επιτρέπουν να φτιάχνουμε συνθετότερες προτάσεις, όπως είναι οι σύνδεσμοι «και», «είτε», «αν...τότε» και ένας τρόπος να περνάμε στην άρνηση μιας πρότασης που έχουμε ήδη φτιάξει. Λε αυτό το Θέμα ασχοληθήκαμε πολύ και στο προηγούμενο Κεφάλαιο.

- Σε ειδικά σύμβολα της γλώσσας που είναι ειδικά ονόματα αντικειμένων που αναφέρονται στην έννοια μας. Για παράδειγμα αν η γλώσσα μας ασχολείται με φυσικούς αριθμούς τα «ένα», «επτά» ή τα 1, 7 είναι ονόματα. Αν είμαστε στην ανάλυση τότε τα «π», «ρίζα 2» κλπ παίζουν τον ρόλο ειδικών ονομάτων.

- Σε ειδικά σύμβολα που αναφέρονται σε πράξεις (σύμβολο για την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό κλπ)

- Σε ειδικά σύμβολα που αναφέρονται σε σχέσεις «(x είναι μεγαλύτερο από τοy», «Οι x, y, z παίζουν στην ίδια ομάδα, », «ο x διαιρεί τον y»...)

- Τα σύμβολα x, y, z... που χρησιμοποιήσαμε για να προσδιορίσουμε τις προηγούμενες σχέσεις είναι πολύ χρήσιμα και τα ονομάζουμε **μεταβλητές**.

- Ποσοδείκτες που με αυτούς θέλουμε να εκφράσουμε προυάσεις της μορφής «όλοι οι άνθρωποι μπορούν να καταλάβουν αυτό που λέω», «λίγοι άνθρωποι μπορούν να το καταλάβουν», «υπάρχει κάποιος που μπορεί να το καταλάβει αυτό»...Στα μαθηματικά δυο από τους ποσοδείκτες μας ενδιαφέρουν κυρίως το «υπάρχει » και το «Κάθε».

Με αυτές τις ιδέες μπορούμε να ορίσουμε σαν το τι εννοούμε με τον όρο «πρωτοβάθμια γλώσσα» το εξής:

Ορισμός 19 *Μια* **πρωτοβάθμια γλώσσα** *αποτελείται από τις παρακάτω κατηγορίες συμβόλων:*

1. *Δύο παρενθέσεις την δεξιά και την αριστερή:* $(,)$. *Αυτές θα παίξουν τον ρόλο κυρίως των σημείων της στίξης στη γλώσσα μας.*

2. *Ένα αριθμήσιμο σύνολο* M *που τα στοιχεία του θα λέγονται* **μεταβλητές** *(μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σύνολο των μρταβλητών είναι πολύ μεγάλο).*

3. **Λογικά σύμβολα ή σύνδεσμοι** $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \longleftrightarrow$

4. *Δύο* **ποσοδείκτες** $\forall, \exists$

5. *Ένα σύμβολο για την ισότητα* $=$

6. *Ένα (πιθανόν και κενό) σύνολο από είδικά σύμβολα που τα λέμε* **ονόματα ή σταθερές** .

7. *Ένα πεπερασμένο (πιθανά και κενό) σύνολο από σύμβολα που λέγονται* **σύμβολα συναρτήσεων**. *Σε κάθε τέτοιο σύμβολο* f *αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός* $n = n(f)$ *που λέγεται το* **βάρος** *του συμβόλου και μας δείχνει πως το σύμβολο αυτό θα ερμηνευτεί σαν μια συνάρτηση* n *μεταβλητών σε ένα σύνολο.*

8. *Ένα πεπερασμένο (πιθανά και κενό) σύνολο από σύμβολα που λέγονται* **σύμβολα σχέσεων** . *Σε κάθε τέτοιο σύμβολο* R *αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός* $n = n(R)$ *που λέγεται το* **βάρος** *του συμβόλου και μας δείχνει πως το σύμβολο αυτό θα ερμηνευτεί σαν μια* n*- μελής σχέση σε ένα σύνολο.*

Σημείωση 1 *Θα μπορούσαμε να είμαστε πιο οικονομικοί στην χρήση των συμβόλων. Για παράδειγμα σε πολλά βιβλία λογικής δεν απιτείται μια γλώσσα να έχει σύμβολα σταθερών και σύμβολα συναρτήσεων. Απλά μια σχέση βάρους 0 παίζει το ρόλο της σταθεράς. Επισης κάθε συνάρτηση* f $n-$*μεταβλητών μπορεί να θεωρηθεί σαν μια* $n+1-$*μελής σχέση (ανατρέξτε στα «Θεμέλια των Μαθηματικών».)*

2.2 Η σύνταξη σε μια πρωτοβάθμια γλώσσα

2.2.1 Οι όροι

Όρο θα ονομάσουμε κάθε κάθε εκφραση της γλώσσας που «κατασκευάζουμε» χρησιμοποιοώντας τα σύμβολα των συναρτήσεων που (πιθανόν να) διαθέτει η γλώσσα μας. Με τον παρακάτω ορισμό θα ορίσουμε ποιες εκφράσεις με σύμβολα συναρτήσεων θεωρούνται συντακτικά ορθές.

Για παράδειγμα στην αριθμητική έχουμε σύμβολα συναρτήσεων το + για την πρόσθεση και το · για τον πολλαπλασιασμό (η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός είναι συναρτήσεις δύο μεταβλητών. θα βλέπουμε σαν παράδειγμα την πρόσθεση σαν μια συνάρτηση που σε κάθε ζευγάρι αριθμών (α,β) αντιστοιχεί τον α+β). Ό όρος

$$(x + 2y)\,(5 + z)\,(1 + x + y) + 7\,(x + (2y + z))$$

έχει νόημα στην αριθμητική, ενώ η παρακάτω έκφραση -τουλάχιστον χωρίς επιπρόσθετες εξηγήσεις- δεν έχει.

$$(x)\,x + (x + +7\,(2) + + (+xx + x))$$

Ο ορισμός που θα δώσουμε είναι -ως συνήθως- ένας αναδρομικός ορισμός. Επίσης απαιτεί την χρήση πολλών παρενθέσεων, περισσότερων από αυτές που συνήθως απαιτούνται στην πράξη. Πολλές φορές θα παραλείπουμε κάποιες από αυτές αν δεν προκαλείται σύγχιση. Η χρήση των παρενθέσεων απαιτείται να τηρείται σχολαστικά όταν θέλουμε να έχουμε «μοναδική ανάγνωση του όρου» κάτι που θα διατυπωθεί παρακάτω με το αντίστοιχο του Προτασιακού Λογισμού Λήμμα Μοναδικής Ανάγνωσης σε πρωτοβάθμιες γλώσσες.

Ορισμός 20 1. *Κάθε μεταβλητή είναι όρος.*

2. *Κάθε σταθερά είναι όρος.*

3. *Αν $t_1, \ldots, t_n$ είναι όροι και f σύμβολο συνάρτησης βάρους n τότε η έκφραση*

$$f(t_1, \ldots, t_n)$$

είναι όρος.

Ορισμός 21 *Ένας όρος θα λέγεται* **κλειστός** *αν δεν περιέχει μεταβλητές. Διαφορετικά θα λέγεται* **ανοικτός**.

Βέβαια, είναι πιθανόν η γλώσσα μας να μην έχει σταθερές ώστε να είναι δυνατόν να γραφτεί έστω και ένας κλειστός όρος. Ωστόσο ο ορισμός αυτός είναι χρήσιμος γιατί όπως θα δούμε μπορούμε να αυξήσουμε τις σταθερές μιας γλώσσας προσθέτοντας όσες θέλουμε (εμπλουτισμός της γλώσσας). Διαισθητικά οι κλειστοί όροι μπορούν να θεωρηθούν και αυτοί σαν σταθερές. Αν η γλώσσα μας έχει μία τουλάχιστον σταθερά c (και αυτό συμβαίνει στην πράξη) και ένα τουλάχιστον σύμβολο συνάρτησης ας πούμε βάρους $n = 2$ τότε μπορούμε να γράψουμε άπειρους διαφορετικούς κλειστούς όρους:

$$f(c,c),\ \ f(c,f(c,c))\ \ ,f(c,f(f(c,c),c)),\ \ f\left(c,f\left(f\left(c,c\right),f\left(c,f\left(s,c\right)\right)\right)\right)\ldots$$

Επίσης όπως οι κλειστοί όροι αντιστοιχούν σε σταθερές οι ανοικτοί όροι αντιστοιχούν σε νέα σύμβολα συναρτήσεων. Ειδικά αν ο όρος έχει k μεταβλητές (της γλώσσας) τότε αντιστοιχεί ορίζει ένα σύμβολο συνάρτησης βάρους k.

2.2.2 Τύποι-Προτάσεις

Περνάμε σε έναν σημαντικό ορισμό:

Ορισμός 22

1. *Αν t_1, t_2 είναι όροι τότε η έκφραση*
$$t_1 = t_2$$
είναι τύπος.

2. *Αν $t_1, \ldots, t_n$ είναι όροι και R σύμβολο $n-$ μελούς σχέσης τότε η έκφραση*
$$R(t_1, \ldots, t_n)$$
είναι τύπος.

3. *Αν P είναι τύπος και x μεταβλητή τότε οι εκφράσεις*
$$\forall x(P), \exists x(P)$$
είναι τύποι.

4. *Αν P, Q είναι τύποι τότε οι εκφράσεις*
$$\neg\left(P\right),\ \ \left(P\right)\vee\left(Q\right),\ \ \left(P\right)\wedge\left(Q\right),\ \ \left(P\right)\to\left(Q\right),\ \ \left(P\right)\leftrightarrow\left(Q\right)$$
είναι τύποι.

Ο παρακάτω πίνακας δίναι μια αντιστοιχία της τυπικής γραφής μιας γλώσσας κατάλληλης για την αριθμητική και της συνηθισμένης γραφής στην αριθμητική. Ο αναγνώστης πρέπει να ξέρει να μεταφράζει από την μια γραφή στην άλλη με ευχέρεια.

ΤΥΠΙΚΗ ΓΡΑΦΗ	ΣΥΝΗΘΗΣ ΓΡΑΦΗ
$+(x,y)$	$x+y$
$+(x,+(1,y))$	$x+(1+y)$
$+(x,y)=+(x,+(1,y))$	$x+y=x+(1+y)$
$\leq(+(x,y)\,,\;+(x,+(1,y)))$	$x+y\leq x+(1+y)$
$<(1,2)$	$1<2$
$+(+(1,1)\,,+(1,+(1,1)))$	$(1+1)+(1+(1+1))$
$<(+(\cdot(2,x)\,,3)\,,0)$	$2x+3<0$

2.2.3 Το Λήμμα της μοναδικής ανάγνωσης

Όπως και στην περίπτωση του προτασιακού λογισμού θέλουμε να ξέρουμε ότι οι με τους συντακτικούς κανόνες που δώσαμε ένας προτασιακός τύπος σε μια πρωτοβάθμια γλώσσα αναγιγνώσκεται με μοναδικό τρόπο. Συγκεκριμμένα έχουμε το

Πρόταση 9 (Λήμμα μοναδικής ανάγνωσης) *Κάθε έκφραση σε μια πρωτοβάθμια γλώσσα θα είναι είτε όρος είτε τύπος είτε τίποτα από τα δύο. Κάθε μία από αυτές τις εναλλακτικές αναγνώσεις είναιμοναδική. Ειδικότερα, αν P είναι ένας τύπος τότε θα γράφεται κατα μοναδικό τρόπο σε μια από τις μορφές του Ορισμού 22.*

Η απόδειξη είναι πανομοιότυπη με αυτή του αντίστοιχου Λήμματος Μοναδικής Ανάγνωσης που είδαμε στον Προτασιακό λογισμό και την αφήνουμε στον αναγνώστη. Απλά, εδώ θα πρέπει να διακρίνουμε μερικές περιπτώσεις παραπάνω.

2.2.4 Οι γλώσσες της αριθμητικής και της θεωρίας συνόλων

Πρίν προχωρήσουμε παρακάτω θα περιγράψουμε δύο συγκεκριμμένες γλώσσες την **Γ(Αρ)** (γλώσσα της αριθμητικής) και την **Γ(Συν)**, την γλώσσα της θεωρίας των συνόλων. Ο λόγος που κάνουμε αυτή την περιγραφή είναι ότι εκτός από τη σημαντική θέση που έχουν οι γλώσσες αυτές στην Λογική θα μας χρησιμεύσουν σαν πηγή πολλών παραδειγμάτων.

Η γλώσσα της Αριθμητικής

Η γλώσσα της αριθμητικής είναι μια αρκετά πλούσια γλώσσα. Έχει μία σταθερά που συμβολίζεται με 0, τέσσερα σύμβολα συναρτήσεων $\varepsilon, +, \cdot, E$ το πρώτο βάρους ένα (και είναι το σύμβολο που θα ερμηνευτεύται σαν η πράξη του επόμενου), τα $+, \cdot$ έχουν βάρος δύο και είναι τα σύμβολα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και ένα ακόμα σύμβολο E που θα αντιστοιχεί στην εκθετική συνάρτηση. Επίσης θα έχει και ένα σύμβολο 2-μελούς σχέσης $\leq$.

Επειδή είναι δύσκολο να τηρούμε σχολαστικά τους κανόνες σύνταξης της γλώσσας θα παραθέσουμε ένα πίνακα με συμβάσεις που κάνουμε στη γραφή της γλώσσας αυτής.

Θα γράφουμε	Αντί για
$x+y$	$+(x,y)$
xy	$\cdot(x,y)$
$x \neq y$	$\neg(x=y)$
$x+y+xy$	$+(+(x,y), \cdot(x,y))$
x^y	$E(x,y)$
$x+y+x^y$	$+(+(x,y), E(x,y))$
$x \leq y$	$\leq(x,y)$
$x < y$	$(\leq(x,y)) \wedge \neg(x=y)$
$x \geq y$	$\leq(y,x)$
$x > y$	$(\leq(y,x)) \wedge \neg(x=y)$

Όμοια θα γράφουμε

1	$\varepsilon(0)$
2	$\varepsilon(\varepsilon(0))$
3	$\varepsilon(\varepsilon(\varepsilon(0)))$
4	$\varepsilon(\varepsilon(\varepsilon(\varepsilon(0))))$
5	....

Η γλώσσα της Θεωρίας συνόλων

Αυτή είναι μια εντελώς απλή γλώσσα. Δεν έχει ούτε σύμβολα για σταθερές ούτε σύμβολα συναρτήσεων. Ένα και μόνο σύμβολο 2-μελούς σχέσης έχει τ0 $\in$. Παρά το γεγονός ότι είναι μια πολύ φτωχή γλώσσα θα την χρησιμοποιήσουμε για να θεμελιώσουμε την Θεωρία των συνόλων μέ την οποία θα θεμελιώσουμε όλα τα Μαθηματικά. Από την άλλη η πολύ πλούσια γλώσσα της Αριθμητικής θα χρησιμοποιηθεί για να θεμελιώσουμε την θεωρία των φυσικών αριθμών και μόνο, μια θεωρία που αποτελεί ένα μικρό μέρος των μαθηματικών. Παρ' όλα αυτά η αριθμητική πρέπει να θεωρηθεί σαν το θεμέλιο όλων των κλάδων των μαθηματικών και την σπουδαιότητά της θα δούμε παρακάτω. Για τη θεωρία των συνόλων.

θα κάνουμε τις εξής συμβάσεις στη γραφή των τύπων της γλώσσας αυτής.

Θα γράφουμε...	Αντί για...
$x \in y$	$\in (x, y)$
$x \notin y$	$\neg (\in (x, y))$
$x \subset y$	$\forall z\, ((z \in x) \to (z \in y))$

2.2.5 Ελεύθερες και δεσμευμένες μεταβλητές-Κλειστοί τύποι

Ορισμός 23 *Έστω $s_1, ..., s_n$ ένας τύπος, όπου $s_1, ..., s_n$ σύμβολα της γλώσσας. Ας υποθέσουμε ότι στη θέση k το σύμβολο s_k είναι ένας ποσοδείκτης $\forall$ ή $\exists$. Τότε το σύμβολο s_{k+1} από τον ορισμό των τύπων θα είναι μια μεταβλητή και αμέσως μετά θα εμφανίζεται η έκφραση (P) όπου P ένας τύπος. Όλες οι θέσεις στον P θα αποτελούν το* **πεδίο** *ή* **έκταση** *του ποσοδείκτη.*

Για παράδειγμα στον επόμενο τύπο

$$(\forall x\, (x + 2 > y)) \vee (\forall x\, (\exists y \neg\, (x + 2 = 1)))$$

Η έκταση της πρώτης εμφάνισης του ποσοδείκτη $\forall$ είναι $x + 2 > y$ ενώ της δεύτερης εμφάνισής του $(\exists y \neg\, (x + 2 = 1))$.

Ορισμός 24 *Έστω P ένας τύπος και ας υποθέσουμε ότι στην θέση k εμφανίζεται μια μεταβλητή x. Θα λέμε ότι η μεταβλητή x στη θέση k είναι* **δεσμευμένη** *αν η θέση αυτή βρίσκεται μέσα στο πεδίο ενός ποσοδείκτη. Διαφορετικά η μεταβλητή αυτή θα λέγεται* **ελεύθερη** *στη θέση αυτή.*

Στον παρακάτω τύπο η μεταβλητή y στην πρώτη εμφάνισή της είναι ελεύθερη ενώ στην δεύτερη δεσμευμένη.

$$(\forall x\, (x + 2 > y)) \vee (\forall x\, (\exists y \neg\, (x + 2 = 1 + y)))$$

Ορισμός 25 *Μια* **πρόταση** *σε μια γλώσσα Γ είναι ένας τύπος της Γ χωρίς ελεύθερες μεταβλητές. Μια πρόταση θα λέγεται και ένας* **κλειστός τύπος**.

Για παράδειγμα οι παρακάτω τύποι στη γλώσσα της αριθμητικής είναι προτάσεις. Να «ερμηνεύσετε» τους τύπους αυτούς στην Αριθμητική και να δώσετε μια τιμή αληθείας σε αυτούς (1 αν είναι αληθείς, 0 αν είναι ψευδείς).

$$\forall x\left(\exists y\left(x=2y\right)\vee\exists y\left(x=2y+1\right)\right) \tag{1}$$

$$\forall x\forall y\left(\left(x\neq y\right)\to\left(\varepsilon\left(x\right)\neq\varepsilon\left(y\right)\right)\right) \tag{2}$$

$$\forall x\left(0\neq\varepsilon\left(x\right)\right) \tag{3}$$

$$\forall x\forall y\forall z\left(\left(\left(x\leq y\right)\wedge\left(y\leq z\right)\right)\to\left(x\leq z\right)\right) \tag{4}$$

$$\forall x\forall y\forall z\left(\left(\left(x\leq y\right)\wedge\left(y<z\right)\right)\to\left(x<z\right)\right) \tag{5}$$

2.3 Η ερμηνεία μιας γλώσσας

Ορισμός 26 *Μια* **ερμηνεία** *μιας γλώσσας Γ αποτελείται από τα εξής μαθηματικά αντικείμενα:*

1. *Ένα σύνολο M που λέγεται το* **πεδίο της ερμηνείας**.

2. *Για κάθε σταθερά c της γλώσσας έχουμε ορίσει ένα στοιχείο $\overline{c}$ του συνόλου M. Θα λέμε ότι «έχουμε ερμηνεύσει» το σύμβολο c με το στοιχείο $\overline{c}$ του συνόλου M.*

3. *Για κάθε σύμβολο συνάρτησης f της γλώσσας βάρους n έχουμε ορίσει μια συνάρτηση $\overline{f}:M^n\to M$. Θα λέμε ότι «έχουμε ερμηνεύσει» το σύμβολο f με συνάρτηση $\overline{f}$.*

4. *Για κάθε σύμβολο σχέσης R της γλώσσας βάρους n έχουμε ορίσει μια $n-$μελή σχέση $\overline{R}\subset M^n$. Θα λέμε ότι «έχουμε ερμηνεύσει» το σύμβολο R με τη σχέση $\overline{R}$.*

Άσκηση

Να δώσετε από δύο διαφορετικές ερμηνείες για τη γλώσσα της Αριθμητικής και τη Γλώσσα της θεωρίας των συνόλων.

Ουσιαστικά μια ερμηνεία μιας γλώσσας είναι ένας κόσμος (ένα σύνολο) στο οποίο όλα τα σύμβολα της γλώσσας αποκτούν νόημα: οι σταθερές σαν συγκεκριμμένα στοιχεία του συνόλου, τα σύμβολα συναρτήσεων σαν συγκεκριμμένες συναρτήσεις κλπ... Αυτό που κανείς πρέπει να κατανοήσει είναι ότι αρχικά βλέπει κανείς τη γλώσσα σαν μια διαδοχή σημείων (συμβόλων) τα οποία αποκτούν νόημα μόνο αν ερμηνευτούν. Αν θέλει κανείς να έχει μια αναλογία με την φυσική γλώσσα οι λέξεις «ερμηνεύονται» μέσα στον περιβάλλοντα κόσμο που ζούμε, αν και αυτή η αναλογία δεν είναι ακριβής: Η ερμηνεία της έννοιας «καλός» μπορεί να ποικίλει από άτομο σε άτομο και να μην είναι σταθερή στην πορεία του χρόνου, ακόμα και αν την περιορίσουμε σε ένα μικρό σύνολο (τους γνωστούς μας ή τους φίλους μας). Για τις μαθηματικές έννοιες θεωρούμε ότι δεν υπόκεινται σε τέτοιους περιορισμούς. Η ερμηνεία των βασικών συμβόλων της γλώσσας δεν αρκεί. Θα πρέπει να ερμηνεύσουμε στη συνέχεια και τις προτάσεις της γλώσσας. Όπως έχουμε ορίσει τις προτάσεις υπάρχουν κάποια προβλήματα: Ας πάρουμε για παράδειγμα τη γλώσσα της θεωρίας συνόλων. Αυτή έχει μόνο ένα σύμβολο διμελούς σχέσης $\in$. Μια ερμηνεία της θα αποτελείται συνεπώς από ένα σύνολο M και ένα υποσύνολο E του $M \times M$. Σταθερές δεν υπάρχουν. Ας δούμε πως θα ερμηνεύαμε τον προτασιακό τύπο $\exists x \forall y \neg(y \in x)$. Επειδή το $\exists$ αντιστοιχεί στο «υπάρχει» και το $\forall$ στο «για κάθε» η πρόταση αυτή θέλουμε να ερμηνεύεται σαν «Υπάρχει κάποιο στοιχείο x του συνόλου M με την ιδιότητα για κάθε $y \in M$ να συμβαίνει $(x, y) \notin E$ » πρόταση που προφανώς είναι αληθής ή ψευδής, ανάλογα με το πώς έχει οριστεί η διμελής σχέση E στο M. Ο προτασιακός τύπος αυτός ερμηνεύεται καλά σαν μια πρόταση γιατί δεν έχει «ελεύθερες μεταβλητές» ,δηλαδή κάθε μεταβλητή που εμφανίζεται στον τύπο (πχ η x) δεσμεύεται από ένα σύμβολο ποσοδείκτη.

Ας πάρουμε τώρα τον προτασιακό τύπο $\forall y \neg(y \in x)$ αυτός δεν μπορεί να έχει νόημα (να του αποδοθεί δηλαδή ο χαρακτηρισμός αληθής ή ψευδής) παρεκτός και αν αντικαταστήσουμε το x με ένα συγκεκριμμένο στοιχείο του M. Το ίδιο συμβαίνει και για τον $(y \in x)$. Αυτός έχει νόημα μόνο αν αντικαταστήσουμε τα x, y με συγκεκριμμένα στοιχεία a, b του M οπότε γίνεται $(a \in b)$ και ερμηνεύεται: $(a, b) \in E$. Αλλά βέβαια η έκφραση $(a \in b)$ δεν είναι έκφραση της γλώσσας αφού τα a, b δεν είναι σύμβολα της γλώσσας. **Για να είμαστε νόμιμοι θα πρέπει εκ των υστέρων να εμπλουτίσουμε τη γλώσσα μας προσθέτοντας σαν επιπλέον σύμβολα όλα τα στοιχεία του πεδίου M της ερμηνείας μας.** Αυτό μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό.

2.3.1 Εμπλουτισμός μιας γλώσσας

Ορισμός 27 *Μια γλώσσα Γ' θα λέγεται* **πιο πλούσια** *από μια γλώσσα Γ αν κάθε σύμβολο της Γ είναι σύμβολο και της Γ'.*

Συνήθως θα εμπλουτίζουμε μια γλώσσα ως εξής:
Θα θεωρούμε πρώτα μια ερμηνεία της γλώσσας με σώμα M προσθέτοντας σαν επιπλέον σταθερές τα στοιχεία του πεδίου M μιας ερμηνείας της γλώσσας, τα οποία δεν έχουν ήδη ερμηνευτεί. Αυτά στην συνέχεια θα ερμηνεύονται σαν ο εαυτό τους.

Για παράδειγμα αν πάρουμε σαν ερμηνεία της γλώσσας της αριθμητικής το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών όπου το 0 ερμηνευεύεται με το 0 των φυσικών αριθμών κάθε άλλος φυσικός αριθμός θα προστεθεί σαν σύμβολο της γλώσσας το οποίο θα ερμηνεύεται σαν ο εαυτός του.

2.3.2 Ερμηνεία των προτάσεων μιας γλώσσας

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια ερμηνεία Ε μιας γλώσσας Γ σε ένα σύνολο M. Θα περιγράψουμε τι σημαίνει ερμηνεύουμε τις προτάσεις της γλώσσας μέσα στην ερμηνεία αυτή.

Θα ξεκινήσουμε με την ερμηνεία των όρων της γλώσσας. Για να γίνει κατανοητός ο τρόπος που θα ερμηνεύουμε ξεκινάμε με ένα παράδειγμα: Θεωρούμε τη γλώσσα της αριθμητικής και σαν ερμηνεία της το σύνολο των φυσικών αριθμών όπου το 0 ερμηνεύται με το 0 του $\mathbb{N}$, το $+$ σαν πρόσθεση κλπ, δηλαδή την τυπική ερμηνεία της γλώσσας της αριθμητικής. Ας πάρουμε τον παρακάτω όρο:

$$t \equiv (x+y)+(xz)$$

Ο όρος αυτός έχει τρείς μεταβλητές x, y, z . Μπορούμε να τον ερμηνεύσουμε σαν μια συνάρτηση τριών μεταβλητών

$$f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$$

με

$$f(x,y,z) = (x+y)+(xz)$$

Με αυτή την ερμηνεία οι όροι $(x+y)+(xz)$, $(x+z)+(xy)$, $(z+y)+(zx)$ θα ερμηνευτούν ακριβώς με τον ίδιο τρόπο. Πράγματι μια τέτοια ερμηνεία μπορεί να περιγραφτεί γενικά με αυστηρό τρόπο (δες παρακάτω), ωστόσο είναι αρκετά περίπλοκη. Ένας εναλλακτικός τρόπος είναι να εμπλουτίσουμε τις σταθερές της γλώσσας, όπως είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο, προσθέτοντας τα στοιχεία του σώματος της ερμηνείας εκτός από αυτά που έχουν ήδη ερμηνευτεί (δηλαδή προσθέτοντας το $\mathbb{N} \setminus \{0\}$) και να ερμηνεύουμε κάθε αντικατάσταση των μεταβλητών με σταθερές, σαν το αποτέλεσμα της αντίστοιχης πράξης . Στην συγκεκριμμένη περίπτωση το $(2+5)+(2\cdot 7y)$ ερμηνεύται σαν το 21.

Στο εξής Θα θεωρούμε ότι εργαζόμαστε στη εμπλουτισμένη γλώσσα όπου έχουμε προσθέσει σαν επιπλέον σταθερές τα στοιχεία του πεδίου M της ερμηνείας της γλώσσας, τα οποία δεν έχουν ήδη ερμηνευτεί. Αυτά θα ερμηνεύονται σαν ο εαυτό τους.

Με την προηγούμενη προσαρμογή της γλώσσας θα ερμηνεύουμε μόνο τους κλειστούς όρους, δηλαδή τους όρους χωρίς μεταβλητές.

Ορισμός 28
- *Αν c είναι μια σταθερά της γλώσσας τότε η ερμηνεία της είναι το αντίστοιχο στοιχείο $\overline{c}$ του συνόλου M.*
- *Αν $t_1,...,t_n$ είναι κλειστοί όροι που έχουν ερμηνευτεί με αντίστοιχα στοιχεία $\overline{t_1},...,\overline{t_n}$ του συνόλου M και f σύμβολο συνάρτησης βάρους n τότε ο όρος $f(t_1,...,t_n)$ ερμηνεύεται σαν η τιμή της συνάρτησης $\overline{f}(\overline{t_1},...,\overline{t_n})$*

Στη συνέχεια θα ερμηνεύουμε τις προτάσεις της γλώσσας, δηλαδή τους προτασιακούς τύπους χωρίς ελεύθερες μεταβλητές:

Σε κάθε πρόταση της γλώσσας μας P θα αντιστοιχίσουμε μια τιμή αληθείας $v(P)$ που θα είναι είτε 0 είτε 1. Αν $v(P)=1$ θα λέμε ότι η πρόταση P **αληθεύει** στην ερμηνεία της γλώσσας ενώ αν $v(P)=0$ θα λέμε ότι η πρόταση P **δεν αληθεύει** στην ερμηνεία της γλώσσας. Φανερά η τιμή $v(P)$ θα εξαρτάται κάθε φορά από την ερμηνεία που κάνουμε στην γλώσσα μας. Ο ορισμός της συνάρτησης v θα γίνει ως εξής:

Ορισμός 29 *Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια ερμηνεία E μιας γλώσσας Γ σε ένα σύνολο M και έστω P μια πρόταση της γλώσσας.*

1. *Αν η P είναι της μορφής $t=s$ με t,s κλειστοί όροι της γλώσσας τότε θέτουμε $v(P)=1$ αν $\overline{t}=\overline{s}$, όπου $\overline{t},\overline{s}$ είναι οι αντίστοιχες ερμηνείες των t,s (που θα είναι στοιχεία του συνόλου M). Διαφορετικά θέτουμε $v(P)=0$.*

2. *Αν η P είναι της μορφής $R(t_1, ..., t_n)$ με $t_1, ..., t_n$ κλειστοί όροι της γλώσσας και R σύμβολο σχέσης της γλώσσας βάρους n τότε θέτουμε $v(P) = 1$ αν $(\overline{t_1}, ..., \overline{t_n}) \in \overline{R}$, όπου $\overline{t_1}, ..., \overline{t_n}$ είναι οι ερμηνείες των όρων $t_1, ..., t_n$ (που θα είναι στοιχεία του συνόλου M) και $\overline{R}$ η ερμηνεία του R (που θα είναι μία $n-$μελής σχέση στο M). Διαφορετικά θέτουμε $v(P) = 0$.*

3. *Αν η P είναι της μορφής $\neg A$ θα θέτουμε $v(P) = 1$ αν και μόνο αν $v(A) = 1$*

4. *Αν η P είναι της μορφής $A \vee B$ θα θέτουμε $v(P) = 1$ αν και μόνο αν $v(A) = 1$ ή $v(B) = 1$.*

5. *Αν η P είναι της μορφής $A \wedge B$ θα θέτουμε $v(P) = 1$ αν και μόνο αν $v(A) = 1$ και $v(B) = 1$.*

6. *Αν η P είναι της μορφής $A \to B$ θα θέτουμε $v(P) = 1$ αν και μόνο αν $v(A) = 0$ είτε $v(A) = 1$ και $v(B) = 1$.*

7. *Αν η P είναι της μορφής $A \leftrightarrow B$ θα θέτουμε $v(P) = 1$ αν και μόνο αν $v(A) = v(B)$.*

8. *Αν η P είναι της μορφής $\forall x A(x)$ θα θέτουμε $v(P) = 1$ αν και μόνο αν $v(A(c)) = 1$ για κάθε $c \in M$.*

9. *Αν η P είναι της μορφής $\exists x A(x)$ θα θέτουμε $v(P) = 1$ αν και μόνο αν $v(A(c)) = 1$ για ένα τουλάχιστον $c \in M$.*

Αν για μια πρόταση P σε μια ερμηνεία $\mathcal{E}$ ισχύει $v(P) = 1$ Θα γράφουμε $\mathcal{E} \models P$.

Ας θεωρήσουμε μία γλώσσα Γ που έχει ένα σύμβολο σχέσης R βάρους 2 (όπως η γλώσσα της θεωρίας συνόλων) και στην οποία γράφουμε γενικά xRy αντί $R(x, y)$. Ας πάρουμε τις προτάσεις

$$P \equiv \forall x(xRx)$$

και

$$Q \equiv \forall x \exists y(xRy)$$

Αν $\mathcal{E} = (M, \overline{R}$ είναι μια ερμηνεία της γλώσσας στην οποία η P ($\mathcal{E} \models P$) αληθεύει τότε υποχρεωτικά και η Q θα αληθεύει (δηλαδή θα έχουμε ότι $\mathcal{E} \models Q$.) Πράγματι αν $\mathcal{E} \models P$ τότε για κάθε $c \in M$ θα έχουμε ότι $(c, c) \in \overline{R}$. Για να αληθεύει η $\forall x \exists y (xRy)$ θα πρέπει για κάθε $c \in M$ να αληθεύει η $\exists y (cRy)$. Αυτή όμως αληθεύει αν υπάρχει ένα τουλάχιστον c' με την (cRc') να αληθεύει, δηλαδή $(c, c') \in \overline{R}$.Λόγω της P αρκεί να πάρουμε $c' = c$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η Q είναι λογική συνέπεια της P.

Ορισμός 30 *Μια πρόταση Q μιας γλώσσας Γ θα λέγεται* **λογική συνέπεια** *μιας πρότασης P της Γ αν σε κάθε ερμηνεία $\mathcal{E}$ με $\mathcal{E} \models P$ θα έχουμε ότι $\mathcal{E} \models Q$. Σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε $P \models Q$.*

Ορισμός 31 *Μια πρόταση Q μιας γλώσσας Γ θα λέγεται* **λογικά ισοδύναμη** *με μια πρόταση P της Γ $P \models Q$ και $Q \models P$, με άλλα λόγια σε οποιαδήποτε ερμηνεία $\mathcal{E}$ της Γ είτε θα είναι και οι δύο αληθείς είτε θα είναι και οι δύο ψευδείς. Σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε $P \vdash\dashv Q$*

Πρίν να δώσουμε παραδείγματα λογικά ισοδύναμων προτάσεων ας δούμε μια ακόμα κατηγορία προτάσεων, αυτές που ισχύουν πάντοτε, ανεξάρτητα της ερμηνείας που θα δώσουμε στη γλώσσα μας.

2.3.3 Καθολικά ισχύουσες προτάσεις ή Θέσεις

Ορισμός 32 *Μια πρόταση P μιας γλώσσας Γ θα λέγεται* **καθολικά ισχύουσα** *ή μία* **θέση** *αν σε οποιαδήποτε ερμηνεία $\mathcal{E}$ της Γ $\mathcal{E} \models P$. Σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε $\models P$.*

Οι θέσεις παίζουν το ρόλο των ταυτολογιών του προτασιακού λογισμού.

Πράγματι, ας ορίσουμε

Ορισμός 33 *Μια πρόταση P μιας γλώσσας Γ θα λέγεται* **ταυτολογία** *αν μπορεί να γραφτεί στη μορφή μιας ταυτολογίας του προτασιακού λογισμού.*

Μια και ο ορισμός αυτός είναι ασαφής ας δώσουμε ένα παράδειγμα:

Θεωρείστε την πρόταση P

$$(\forall x \exists y \, (x + y = 0)) \to ((\forall x \, (x = 0)) \to (\forall x \exists y \, (x + y = 0)))$$

Αυτή είναι μια ταυτολογία. Πράγματι αν θέσουμε σαν X την πρόταση $\forall x \exists y \, (x + y = 0)$ και σαν Y την πρόταση $\forall x \, (x = 0)$, τότε η P γράφεται στην μορφή $X \to (Y \to X)$ που είναι μια ταυτολογία.

Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε τώρα ότι

Πρόταση 10 *Κάθε ταυτολογία είναι μια θέση, δηλαδή αληθεύει σε κάθε ερμηνεία της γλώσσας.*

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Η πρόταση

$$(\forall x(xRx)) \rightarrow (\forall x \exists y(xRy))$$

είναι καθολικά ισχύουσα αλλά όχι μία ταυτολογία.

Άσκηση: Να δείξετε ότι αν $P \models Q$ τότε $\models P \rightarrow Q$.

Η παρακάτω πρόταση είναι σχεδόν αναδιατύπωση των ορισμών:

Πρόταση 11 *Δύο προτάσεις P, Q είναι λογικά ισοδύναμες αν και μόνο αν $\models P \leftrightarrow Q$*

2.3.4 Μερικές σημαντικές λογικές ισοδυναμίες

Θα γράφουμε κάποιες από τις σημαντικότερες λογικές ισοδυναμίες. Είναι κυρίως νόμοι χρήσης των ποσοδεικτών και δεν είναι δύσκολο για τον αναγνώστη να τους αποδείξει και να τους καταλάβει μια και τους χρησιμοποιούμε σιωπηρά συνέχεια σε μαθηματικούς συλλογισμούς, χωρίς αιτιολόγηση.

Η εξής συντομογραφία θα μας διευκολύνει πολύ: Όταν γράφουμε

$$P_{>x<}$$

θα εννούμε ότι η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται στην πρόταση (ή τον προτασιακό τύπο γενικότερα) P.

Οι νόμοι Δυϊσμού ή Νόμοι του De Morgan

$\forall x P$	$\vdash\dashv$	$\neg(\exists x(\neg P))$
$\exists x P$	$\vdash\dashv$	$\neg(\forall x(\neg P))$

Οι νόμοι του de Morgan είναι η γενίκευση των αντίστοιχων νόμων του προτασιακού λογισμού. Το σύμβολο του $\forall$ (για κάθε) μπορεί να θεωρηθεί σα γενίκευση της σύζευξης $\wedge$. Πράγματι, αν ερμηνεύσουμε τη γλώσσα σε ένα πεπερασμένο σύνολο $M = \{c_1, ..., c_n\}$ τότε η πρόταση $\forall x P(x)$ αληθεύει αν και μόνο αν αληθεύει η πρόταση $P(c_1) \wedge ... \wedge P(c_n)$. Όμοια το σύμβολο του $\exists$ (υπάρχει) μπορεί να θεωρηθεί σα γενίκευση της διάζευξης $\vee$.

Οι νόμοι επιμεριστικότητας ποσοδεικτών

$\exists x\,(P \vee Q)$	$\vdash\dashv$	$\exists x P \vee \exists x Q$
$\forall x\,(P \wedge Q)$	$\vdash\dashv$	$\forall x P \wedge \forall x Q$
$\exists x\,(P \rightarrow Q)$	$\vdash\dashv$	$\forall x P \rightarrow \exists x Q$

Οι δύο πρώτοι νόμοι μπορούν εύκολα να αποδειχτούν. Ας πάρουμε για παράδειγμα μια ερμηνεία $\mathcal{E}$ στο σύνολο M όπου $\mathcal{E} \models \exists x\,(P \vee Q)$, δηλαδή υπάρχει $c \in M$ με $\mathcal{E} \models (P(c) \vee Q(c))$. Αυτό σημαίνει ότι για κάποιο $c \in M$ αληθεύει μία τουλάχιστον από τις $P(c), Q(c)$ που είναι ισοδύναμο με το $\mathcal{E} \models \exists x P \vee \exists x Q$. Ο τρίτος μπορεί να εξαχθεί από τους προηγούμενους και τους τύπους του de Morgan με την παρατήρηση:

$$P \rightarrow Q \vdash\dashv \neg P \vee Q$$

συνεπώς

$\exists x\,(P \rightarrow Q) \vdash\dashv \exists x\,(\neg P \vee Q) \vdash\dashv \exists x \neg P \vee \exists x Q \vdash\dashv \neg\,(\forall x P) \vee \exists x Q \vdash\dashv (\forall x P) \rightarrow \exists x Q$

Οι νόμοι επιμεριστικότητας ποσοδεικτών υπό συνθήκη

$\forall x\,(P \vee Q_{>x<})$	$\vdash\dashv$	$\forall x P \vee Q_{>x<}$
$\exists x\,(P \wedge Q_{>x<})$	$\vdash\dashv$	$\exists x P \wedge Q_{>x<}$
$\forall x\,(P \rightarrow Q_{>x<})$	$\vdash\dashv$	$\exists x P \rightarrow Q_{>x<}$
$\forall x\,(P_{>x<} \rightarrow Q)$	$\vdash\dashv$	$P_{>x<} \vee \forall x Q$

Γενικά οι εκφράσεις $\forall x\,(P \vee Q)$, $\forall x P \vee \forall x Q$ δεν είναι λογικά ισοδύναμες. Για παράδειγμα η $\forall x\,(x = 0 \vee x > 0)$ είναι αληθής στο μοντέλο της αριθμητικής ενώ η $\forall x x = 0 \vee \forall x x > 0$ φανερά είναι. Αν ωστόσω στον Q δεν εμφανίζεται η μεταβλητή x θα ισχύει η επιμεριστικότητα.

Απαλοιφή περιττών ποσοδεικτών

$\forall x P_{>x<}$	$\vdash\dashv$	$P_{>x<}$
$\exists x P_{>x<}$	$\vdash\dashv$	$P_{>x<}$

Θεωρείστε την πρόταση:

$$\forall x\left(\neg\left(x=0\right)\rightarrow\exists y\left(x=\varepsilon\left(y\right)\right)\right)$$

Αν προσθέσετε ένα ποσοδείκτη ακόμα και έχετε την

$$\exists x\forall x\left(\neg\left(x=0\right)\rightarrow\exists y\left(x=\varepsilon\left(y\right)\right)\right)$$

ή

$$\forall x\forall x\left(\neg\left(x=0\right)\rightarrow\exists y\left(x=\varepsilon\left(y\right)\right)\right)$$

η σε οποιαδήποτε ερμηνεία δεν επηρεάζεται η τιμή αληθείας της, δηλαδή το νόημά της παραμένει αναλλοίωτο και ο επιπλέον ποσοδείκτης είναι άχρηστος.

Νόμοι αντικατάστασης

$\forall x P_{>y<}(x)$	$\vdash\dashv \forall x P_{>y<}(y)$
$\exists x P_{>y<}(x)$	$\vdash\dashv \exists x P_{>y<}(y)$

Αν σε ένα τύπο $P(x)$ με την x ελεύθερη και που δεν περιέχει την μεταβλητή y αλλάξουμε την μεταβλητή x σε y θα πάρουμε ένα τύπο $\Pi(\psi)$ με την y ελευθερη και επιπλέον οι $\forall xP(x)$, $\forall yP(y)$ είναι λογικά ισοδύναμες προτάσεις.

Με ένα παράδειγμα να δείξετε γιατί θέλουμε η y να μην εμφανίζεται στον $P(x)$.

Ορισμός 34 *Ένας προτασιακός τύπος λέγεται σε* **κανονική μορφή** *αν είναι στη μορφή*

$$\Pi_1 x_1 ... \Pi_k x_k P$$

όπου $\Pi_1, ..., \Pi_k$ ποσοδείκτες και στον τύπο P δεν εμφανίζονται ποσοδείκτες.

Χρησιμοποιώντας τους προηγούμενους νόμους μπορούμε να δείξουμε επαγωγικά ότι ισχύει το παρακάτω:

Θεώρημα 6 *Για κάθε πρόταση P υπάρχει πρόταση Q σε κανονική μορφή λογικά ισοδύναμη με την P.*

Σαν παράδειγμα θα φέρουμε σε κανονική μορφή την

$$\forall x \exists y \,(x + y = 1) \rightarrow \forall x \exists y \,(x + y = 2)$$

Αυτό θα γίνει με τα παρακάτω βήματα τα οποια θα πρέπει να αιτιολογείσετε με τους παραπάνω κανόνες. Για λόγους ευκολίας και γενικότητας θέτουμε σαν $P(x, y)$ την έκφραση $(x + y = 1)$ και αν $Q(x, y)$ την έκφραση $(x + y = 2)$.

1. $\forall x \exists y P\,(x, y) \rightarrow \forall x \exists y Q\,(x, y)$
2. $\forall x \exists y P\,(x, y) \rightarrow \forall z \exists w Q\,(z, w)$
3. $\neg \forall x \exists y P\,(x, y) \vee \forall z \exists w Q\,(z, w)$
4. $\exists x \forall y \neg P\,(x, y) \vee \forall z \exists w Q\,(z, w)$
5. $\exists x\,(\forall y \neg P\,(x, y) \vee \forall z \exists w Q\,(z, w))$
6. $\exists x \forall y\,(\neg P\,(x, y) \vee \forall z \exists w Q\,(z, w))$
7. $\exists x \forall y \forall z\,(\neg P\,(x, y) \vee \exists w Q\,(z, w))$
8. $\exists x \forall y \forall z \exists w\,(\neg P\,(x, y) \vee Q\,(z, w))$

2.4 Θεωρίες-Μοντέλα

Συνήθως στα μαθηματικά έχουμε ορισμούς της μορφής: «ονομάζουμε ομάδα ένα σύνολο G στο οποίο έχει οριστεί μια πράξη $*$ ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα:......................»

Ορισμός 35 *Μια* **μαθηματική θεωρία** *αποτελείται από μία γλώσσα Γ και ένα (πιθανόν άπειρο) σύνολο προτάσεων Σ της γλώσσας οι οποίες ονομάζονται τα* **αξιώματα** *της θεωρίας. Θα συμβολίζουμε μια θεωρία με (Γ,Σ).*

Ορισμός 36 *Ένα* **μοντέλο** *μιας θεωρίας (Γ,Σ) είναι μια ερμηνεία $\mathcal{E}$ της γλώσσας Γ όπου αληθεύουν όλα τα στοιχεία του Σ.*

Παράδειγμα: Ένα απλό παράδειγμα είναι η θεωρία των ομάδων, της οποίας η γλώσσα έχει ένα σύμβολο σταθεράς 0 (που αντιστοιχεί στο ουδέτερο στοιχείο) και ένα σύμβολο διμελούς πράξης $+$. Τα αξιώματα της θεωρίας είναι οι προτάσεις:

$\forall x \forall y \forall z \left((x+y)+z = x+(y+z) \right)$
$\forall x \left(\ (x+0=x) \ \wedge \ (0+x=x) \ \right)$
$\forall x \exists y \ \ (x+y=0)$

Αν επιπλέον συμπεριλάβουμε σαν αξίωμα την
$\forall x \forall y (x+y=y+x)$

θα έχουμε την θεωρία των αβελιανών ομάδων.

Κάθε μοντέλο της θεωρίας ομάδων ονομάζεται ομάδα και κάθε μοντέλο της θεωρίας των αβελιανών ομάδων λέγεται αβελιανή ομάδα. Παραδείγματα μη αβελιανών ομάδων είναι είναι οι ομάδα των 1-1 και επί συναρτήσεων από ένα σύνολο στον εαυτό του με ερμηνεία της πράξης + την σύνθεση συναρτήσεων και 0 την ταυτοτική απεικόνιση. Παραδείγματα αβελιανών ομάδων είναι τα πεπερασμένα σώματα $\mathbb{Z}_p$ με πράξη την πρόσθεση και 0 το μηδέν καθώς και το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων με την πράξη της πρόσθεσης και σαν 0 το μηδέν στο $\mathbb{Z}$.

Βέβαια αν τα αξιώματα που έχουμε θέσει κάπου αντιφάσκουν μεταξύ τους η θεωρία μας δεν θα έχει μοντέλο.

Επίσης είναι δυνατόν να μην μπορούμε να αποφασίσουμε αν η θεωρία μας έχει μοντέλο. Αυτή την περίπτωση θα συζητήσουμε αφού δώσουμε μερικά παραδείγματα από μαθηματικές θεωρίες:

2.4.1 Η αριθμητική

Τη γλώσσα της αριθμητικής την περιγράψαμε στην παράγραφο 2.2.4. Εκεί δώσαμε και κάποιες συμβάσεις γραφής τις οποίες θα τηρήσουμε και δώ. Για να έχουμε θεωρία για την αριθμητική θα πρέπει να δώσουμε τα αξιώματα της θεωρίας αυτής. Αυτά είναι μια μεταγραφή των αξιωμάτων του Peano σε πρωτοβάθμια γλώσσα:

1. $\forall x \left(\neg \left(0 = \varepsilon\left(x\right) \right) \right)$
2. $\forall x \left(\ \neg \left(x = 0 \right) \ \rightarrow \ \exists y \left(x = \varepsilon\left(y\right) \right) \ \right)$
3. $\forall x \forall y \left(\ \varepsilon\left(x\right) = \varepsilon\left(y\right) \ \rightarrow \ x = y \ \right)$
4. $\forall x \left(x + 0 = x \right)$
5. $\forall x \forall y \left(\ x + \varepsilon\left(y\right) = \varepsilon\left(x+y\right) \ \right)$
6. $\forall x \left(x0 = 0 \right)$
7. $\forall x \forall y \left(\ x \cdot \varepsilon\left(y\right) = xy + x \ \right)$
8. $\forall x \left(x^0 = 1 \right)$
9. $\forall x \forall y \left(\ x^{y+1} = x \cdot x^y \right)$

Σχόλια: Τα τρία πρώτα αξιώματα μας περιγράφουν τις ιδιότητες της συνάρτησης του επόμενου ακέραιου. Το πρώτο μας λέει ότι ξεκινάμε από το μηδέν, δηλαδή ότι το 0 δεν είναι επόμενος κάποιου αριθμού. Το δεύτερο ότι κάθε αριθμός διαφορετικός από το 0 είναι επόμενος κάποιου. Το τρίτο ότι η συνάρτηση του επόμενου είναι 1-1, δηλαδή διαφορετικοί αριθμοί έχουν διαφορετικούς επόμενους. Τα υπόλοιπα μπορούν να θεωρηθούν σαν οι ορισμοί των πράξεων της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της ύψωσης σε μία δύναμη. Αυτά είναι τα εντελώς στοιχειώδη αξιώματα της αριθμητικής και η θεωρία που έχει σαν αξιώματα τα 1-9 θα λέγεται η **Στοιχειώδης Αριθμητική**. Μας λείπει το αξίωμα της μαθηματικής επαγωγής για να συμπληρωθούν τα αξιώματα. Αυτό δεν μπορεί να διατυπωθεί σαν ένα μοναδικό αξίωμα αλλά είναι μια απειρία αξιωμάτων, ένα για κάθε τύπο της γλώσσας.

Για κάθε τύπο $P = P(x, y_1, ...y_n)$ της γλώσσας θεωρούμε το παρακάτω αξίωμα:

$$\boxed{\begin{array}{l} 10(P).\ \forall y_1...\forall y_n \left[P\left(0, y_1, ..., y_n\right) \wedge \left(P\left(x, y_1, ..., y_n\right) \rightarrow P\left(\varepsilon\left(x\right), y_1, ..., y_n\right)\right)\right] \\ \qquad\qquad \rightarrow \forall y_1...\forall y_n \forall x P\left(x, y_1, ..., y_n\right) \end{array}}$$

Το αξίωμα-σχήμα αυτό μας λέει ότι αν μία ιδιότητα ισχύει για το 0 και αν ισχύει για κάποιο x ισχύει και για τον επόμενό του $\varepsilon(x)$ τότε ισχύει για κάθε x και είναι η μεταφορά της αρχής της επαγωγής σε μία πρωτοβάθμια γλώσσα.

Υπάρχει μοντέλο για την θεωρία της αριθμητικής;

Η προφανής απάντηση είναι ΝΑΙ, είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ που γνωρίζουμε με τις συνήθεις πράξεις του. Εμείς θα δεχτούμε ότι το $\mathbb{N}$ είναι πράγματι ένα τέτοιο μοντέλο.

Μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός τέτοιου μοντέλου;

Αυτή είναι μια δύσκολη ερώτηση αφού θα πρέπει να εξετάσουμε τι σημαίνει «αποδεικνύω», όχι στην τυπική γλώσσα αλλά στη φυσική γλώσσα. Αν πάντως περιοριστούμε στην τυπική γλώσσα και στην τυπική έννοια της απόδειξης το θεώρημα της μη-πληρότητας του Godel μας λεει ότι μια τέτοια απόδειξη δεν είναι εφικτή, με μόνα τα μέσα τα αξιώματα μας.

Τέλος πάντων, αν δεχτούμε ότι ένα τέτοιο μοντέλο υπάρχει είναι τουλάχιστον μοναδικό (ως προς τους ισομορφισμούς);

Και δω η απάντηση είναι απογοητευτική: ΟΧΙ, και θα δούμε παρακάτω το γιατί.

2.4.2 Η θεωρία Συνόλων

Τη γλώσσα της θεωρίας συνόλων επίσης την περιγράψαμε στην παράγραφο 2.2.4. Το να περιγράψουμε τα αξιώματα της είναι μια όχι και τόσο εύκολη εύκολη υπόθεση αφού αυτή είναι μια θεωρία στην μέσω της οποίας θεμελιώνονται όλοι σχεδόν οι μαθηματικοί κλάδοι. Τα παρακάτω αξιώματα προτάθηκαν από τον Zermelo και βελτιώθηκαν από τον Fraenkel και γι αυτό ονομάζεται θεωρία Zermelo-Fraenkel ή συνοπτικά Z-F. Εδώ θα πρέπει να τονίσουμε το εξής: Δε σημαίνει ότι η θεωρία των συνόλων είναι η Z-F ή ότι η Z-F περιγράφει πλήρως την έννοια του συνόλου. Μπορεί κάποιος να κάνει θεωρία συνόλων (όπως και θεωρία αριθμών) χωρίς να αναφέρεται τυπικά σε αξιώματα (αρκεί να μη πέφτει σε αντιφάσεις) ξεκινώντας από μια «Πλατωνική αρχή»: Τα σύνολα υπάρχουν (όπως και οι φυσικοί αριθμοί) και ποιες αρχές τα περιγράφουν ακριβώς δεν είναι ξεκαθαρισμένο. Η θεωρία Z-F δίνει απλώς κάποιες βασικές αρχές και κατευθύνσεις. Το ότι η Z-F δεν μπορεί να ξεκαθαρίσει ακριβώς την έννοια του συνόλου φαίνεται από το γεγονός ότι υπάρχουν πάρα πολλές προτάσεις της γλώσσας (όπως η υπόθεση του συνεχούς) που είναι ανεξάρτητες από τα υπόλοιπα αξιώματα. Θα κάνουμε μια γρήγορη περιήγηση στη Z-F.

1. $\forall x \forall y \forall z \, (x \in z \leftrightarrow y \in z) \rightarrow x = y$

Το αξίωμα αυτό λέγεται ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΕΚΤΑΣΗΣ και μας λέει ότι ένα σύνολο περιγράφεται από τα στοιχεία του και μόνο.

Ορισμός 37 *Με*

$$x \subset y$$

θα συμβολίζουμε τον προτασιακό τύπο

$$\forall z (z \in x \rightarrow z \in y)$$

Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι το x είναι υποσύνολο του y.

2. $\exists x \forall y \neg \, (y \in x)$

Το αξίωμα αυτό (ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΚΕΝΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ) μας λεει ότι υπάρχει ένα σύνολο το οποίο μάλιστα δεν έχει στοιχεία. Το σύνολο αυτό είναι μοναδικό, όπως προκύπτει από το προηγούμενο αξίωμα της έκτασης και συμβολίζεται με $\emptyset$.

3. $\forall x \forall y \exists z \forall w \, (w \in z \leftrightarrow (w = x \;\vee\; w = y))$

Αυτό είναι το ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ (ΜΗ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟΥ) ΖΕΥΓΟΥΣ. Μας λέι ότι αν δοθούν δύο σύνολα x, y τότε υπάρχει (ακριβώς) ένα σύνολο z που έχει σαν στοιχεία τα x, y και μόνο αυτά. Το σύνολο αυτό θα το συμβολίζουμε με

$$\{x, y\}$$

Επίσης θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{y, x\}\}$$

για τα διατεταγμένα ζεύγη.

Από αυτό το αξίωμα ήδη μπορούμε να κατασκευάσουμε άπειρα διαφορετικά μεταξύ τους σύνολα:

$$\emptyset, \;\; \{\emptyset\}, \;\; \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \; \{\{\emptyset\}\}, \;\; \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \ldots$$

4. $\forall x \exists y \forall z \, ((z \in y) \leftrightarrow \exists w \, (z \in w \;\wedge\; w \in z))$

Αυτό είναι το ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΕΝΩΣΗΣ : Αν δοθεί ένα σύνολο x τότε υπάρχει ένα σύνολο y (μοναδικό επό το αξίωμα της έκτασης) του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς τα στοιχεία των μελών του x (σκεφτείται ότι το x αποτελείται από σύνολα). Αυτό το σύνολο το συμβολίζουμε με

$$\cup x$$

Αν για παράδειγμα το $x = A, B$ τότε το $\cup x$ είναι το $A \cup B$. Γενικά

$$A \cup B = \cup A, B$$

Ορισμός 38 *Μία* **σχέση** *είναι ένα σύνολο f από ζευγάρια. Θα συμβολίζουμε με $REL(R)$ το γεγονός ότι το σύνολο R είναι σχέση. Το σύνολο όλων των x με την ιδιότητα να υπάρχει y με $\langle x, y \rangle \in R$ λέγεται το* **πεδίο ορισμού** *της σχέσης f και συμβολίζεται με $DOM(R)$. Το σύνολο όλων των y με την ιδιότητα να υπάρχει x με $\langle x, y \rangle \in R$ λέγεται το* **σύνολο τιμών** *της σχέσης R και συμβολίζεται με $RANGE(R)$.*

Ορισμός 39 *Μία* **συνάρτηση** *είναι ένα σύνολο f από ζευγάρια με την ιδιότητα αν $\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle$ είναι στοιχεία του f τότε $y = z$. Θα συμβολίζουμε με $FUNC(f)$ το γεγονός ότι το σύνολο f είναι συνάρτηση. Το σύνολο όλων των x με την ιδιότητα να υπάρχει y με $\langle x, y\rangle \in f$ λέγεται το* **πεδίο ορισμού** *της συνάρτησης f και συμβολίζεται με $DOM(f)$. Το σύνολο όλων των y με την ιδιότητα να υπάρχει x με $\langle x, y\rangle \in f$ λέγεται το* **σύνολο τιμών** *της συνάρτησης f και συμβολίζεται με $RANGE(f)$. Θα γράφουμε $f : X \to Y$ αν τα f, X, Y είναι σύνολα και το f είναι συνάρτηση με πεδίο τορισμού το X και πεδίο τιμών υποσύνολο του Y.*

Άσκηση: Να γράψετε τυπικά τις προτάσεις: $FUNC(f)$, $DOM(f)$, $RANGE(f)$ και $f : X \to Y$.

Με τα αξιώματα που έχουμε μέχρι τώρα μπορούμε να θεμελιώσουμε μια στοιχειώδη αριθμητική. Ας ορίσουμε γενικά

$$S(x) = x \cup \{x\}$$

και να φανταζόμστε το $S(x)$ σαν το «επόμενο» σύνολο του συνόλου x. Τότε μπορούμε να ορίσουμε τους φυσικούς αριθμούς επαγωγικά:

1. $0 = \emptyset$
2. $\varepsilon(n) = S(n)$

και έτσι

1. $0 = \emptyset$
2. $1 = \{\emptyset\}$

Γράφοντας τους πρώτους πέντε αριθμούς:

1. $0 = \emptyset$
2. $1 = \{\emptyset\}$
3. $2 = \{\emptyset, \ \{\emptyset\}\}$
4. $3 = \{\emptyset, \ \{\emptyset\}, \ \{\emptyset, \ \{\emptyset\}\}\}$

5. $4=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\},\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\}\}$

6. ....

Τώρα, αν όλοι αυτού οι αριθμοί αποτελούν σύνολο είναι το παρακάτω αξίωμα που ονομάζεται το ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ.

5. $$\exists x\left(\emptyset \in x \wedge \forall y\left(y \in x \rightarrow (y \cup\{y\}) \in x\right)\right)$$

Το επόμενο αξίωμα είναι ένα από τα πιο χαρακτηριστικά της θεωρίας των συνόλων. Είναι η μεταγραφή του «αξιώματος» του Cantor ότι κάθε ιδιότητα καθορίζει σύνολο, αλλά με τρόπο ώστε να αποφεύγεται το παράδοξο του Russel που θα συζητήσουμε αμέσως:
Αν $P(x)$ είναι ένας τύπος με μία ελεύθερη μεταβλητή x θα συμβολίζουμε

$$y=\{x: P(x)\} \leftrightarrow(\forall x(x \in y) \leftrightarrow P(x))$$

Ο Cantor θεωρούσε ότι κάθε τύπος ορίζει ένα σύνολο, με άλλα λόγια ότι το παρακάτω είναι ένα αξίωμα για οποιοδήποτε τύπο:

$$\exists y(y=\{x: P(x)\})$$

Αν όμως δεχτούμε αυτό σαν αξίωμα τότε η θεωρία μας σίγουρα δεν θα πραγματοποιείται δηλαδή δεν θα έχει μοντέλο. Πράγματι αν για P πάρουμε:

$$P(x) \equiv \neg(x \in x)$$

και πάρουμε ένα μοντέλο της θεωρίας μας, δηλαδή ένα ζευγάρι (M, R) όπου το M είναι σύνολο (προσέξτε εδώ την διπλή χρήση της έννοιας σύνολο) και $R \subset M \times M$ και το $x \in y$ ερμηνεύεται $(x, y) \in M$ τότε θα έπρεπε να υπάρχει ένα στοιχείο y του M με την ιδιότητα

$$(x, y) \in R \leftrightarrow(x, y) \notin R$$

Αλλά τότε το (y, y) δεν μπορεί να ανήκει στο R ούτε και στο συμπλήρωμά του, άτοπο.

Θα λέμε ότι ένας τύπος $P(x, y)$ με δύο τουλάχιστον ελεύθερες μεταβλητές x, y **ορίζει συνάρτηση** αν ικανοποιείται το εξής

$$\forall x \exists y(P(x, y)) \wedge \forall x \forall y \forall y^{\prime}\left(P(x, y) \wedge P\left(x, y^{\prime}\right) \rightarrow y=y^{\prime}\right)$$

Με άλλα λόγια ο τύπος $P(x, y)$ ορίζει συνάρτηση αν για κάθε σύνολο x υπάρχει μοναδικό σύνολο y ώστα να ικανοποιείται το $P(x, y)$. Θα γράφουμε $y = P(x)$. Το ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ μας λεει ότι αν ένας τύπος $P(x, y)$ ορίζει συνάρτηση $y = P(x)$ τότε για κάθε σύνολο x το $\{P(t) : t \in x\}$ είναι σύνολο, δηλαδή αν πάρουμε σαν πεδίο ορισμού της συνάρτησης ένα σύνολο τότε το «σύνολο» τιμών της είναι πράγματι σύνολο. Παρακάτω τα $t_1, ..., t_k$ είναι οι υπόλοιπες μεταβλητές που εμφανίζονται στιν τύπο P. Ας γράψουμε το αξίωμα:

$$\left[\begin{array}{cc} (\forall t_1 ... \forall t_k \forall x \exists y P(x, y, t_1, ..., t_k)) & \wedge \\ (\forall t_1 ... \forall t_k \forall x \forall y \forall y' (P(x, y, t_1, ..., t_k) \wedge P(x, y', t_1, ..., t_k)) \rightarrow y = y') & \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \qquad [\forall t_1 ... \forall t_k \forall A \exists B (b \in B \leftrightarrow \exists a (a \in A \wedge P(a, b, t_1, ..., t_k)))]$$

Σε πολλά βιβλία θεωρίας συνόλων το αξίωμα αυτό αντικαθίσταται από το ασθενέστερο αξίωμα:

$$\forall t_1 ... \forall t_k \forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (z \in x) \wedge P(z, t_1, ..., t_k))$$

το οποίο λέει ότι αν δοθεί μια ιδιότητα P και ένα σύνολο x τότε τα στοιχεία του x που έχουν την ιδιότητα P αποτελούν σύνολο.

Το επόμενο αξίωμα είναι το αξίωμα του δυναμοσυνόλου. Μας λέει ότι τα υποσύνολα ενός συνόλου αποτελούν σύνολο.

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subset x)$$

Το σύνολο όλων των υποσυνόλων ενός συνόλου συμβολίζεται με

$$\wp(x) = \{y : y \subset x\}$$

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι αν επαγωγικά ορίσουμε για ένα σύνολο $X : \wp^0(X) = X,\ \ \wp^{n+1}(X) = \wp(\wp^n(X))$ τότε για τα παρακάτω σύνολα δεν απαιτείται το αξίωμα του δυναμοσυνόλου για να πιστοποιήσουμε ότι υπάρχουν, αρκούν όλα τα υπόλοιπα αξιώματα.

1. $\wp^1(\emptyset) = \wp(\emptyset)$
2. $\wp^2(\emptyset) = \wp(\wp(\emptyset))$

3. $\wp^3(\emptyset) = \wp(\wp(\wp(\emptyset)))$

4. $\wp^4(\emptyset) = \wp(\wp(\wp(\wp(\emptyset))))$

5. ....

Κάθε σύνολο από τα προηγούμενα είναι ένα πεπερασμένο σύνολο. Αν όμως πάρουμε ένα άπειρο σύνολο, για παράδειγμε το σύνολο $\mathbb{N}$ όλων των φυσικών αριθμών (όπως τους ορίσαμε μέσα από τα αξιώματα) τότε τα προηγούμενα αξιώματα δεν μας εξασφαλίζουν απαραίτητα ότι το δυναμοσύνολο του $\mathbb{N}$ υπάρχει. (Αυτή η παρατήρηση μπορεί να θεωρηθεί σαν η βάση της θεωρίας των κατασκευάσιμων συνόλων του Godel).

Τελειώνουμε την περιήγηση στα αξιώματα της Z-F με δύο τελευταία αξιώματα. Το πρώτο είναι το πολυσυζητημένο ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ. Μπορούμε να διατυπώσουμε ως εξής. Για κάθε σύνολο x υπάρχει μια συνάρτηση f η οποία «διαλέγει» από κάθε στοιχείο y του x -που δεν είναι το κενό σύνολο- ένα στοιχείο z του y. Για την διατύπωσή του χρησιμοποιούμε τις συντομογραφίες που έχουμε παραπάνω ορίσει:

$$\forall x\,(x \neq \emptyset \to \exists f\,(FUNC\,(f) \land x = DOM\,(f) \land \forall y\,(y \in x) \to (f\,(y) \in y)))$$

Το τελευταίο αξίωμα είναι σημαντικό από άποψη θεμελίωσης αν και δεν χρησιμοποιείται ποτέ σχεδόν σε μαθηματικούς συλλογισμούς. Ουσιαστικά μας λεει ότι τα σύνολα μπορούν να κατασκευαστούν ξεκινώντας από το κενό σύνολο. Γι αυτό και ονομάζεται ΑΞΙΩΜΑ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑΣ. Διατυπώνεται σε μια τεχνική μορφή που είναι όμως εύκολο να χρησιμοποιηθεί έτσι:

$$\forall x\,(\ x \neq \emptyset \to\ \ \exists y\,(\ \ (y \in x)\ \land\ \ (y \cap x = \emptyset)\ \ )\ \ )$$

2.5 Απόδειξη

Σε αυτή την παράγραφο θα θεμελιώσουμε τους βασικούς κανόνες με τους οποίους ξεκινώντας από κάποιες προτάσεις μιας γλώσσας που θα τις θεωρούμε δεδομένες (Υποθέσεις ή αξιώματα) βγάζουμε κάποιες νέες προτάσεις σαν συμπεράσματα. Αυτή η διαδικασία είναι μια εντελώς μηχανική διαδικασία μέσα στη γλώσσα και δεν έχει εκ πρώτης όψεως σχέση με τις διάφορες ερμηνείες που δίνουμε στη γλώσσα. Για να έχουμε μια έννοια απόδειξης θα πρέπει να έχουμε και κάποιους κανόνες απόδειξης. Με τον όρο κανόνας απόδειξης (ή αποδεικτικός κανόνας) θα εννοούμε ένα κανόνα που όταν δίνονται κάποιες προτάσεις $P_1, ..., P_k$ από αυτές θα συμπεραίνουμε μια νέα πρόταση P.

Θα δεχθούμε ένα βασικό κανόνα:

Κανόνας επαγωγής
(Modus Ponens)

$$\frac{P, \qquad P \to Q}{P}$$

Ας δώσουμε ένα γενικό ορισμό:

Ορισμός 40 *Έστω P μία πρόταση και Σ ένα σύνολο από προτάσεις μιας γλώσσας. Θα λέμε ότι η P είναι* **συνέπεια** *του Σ ή ότι το Σ* **μπορεί να αποδείξει** *την πρόταση P αν υπάρχει μία ακολουθία προτάσεων $P_1, ..., P_n$ τέτοια ώστε*

1. *Η P_n είναι η P.*

2. *Για κάθε i είτε*

   2.1 *η P_i είναι στοιχείο του Σ_0*

   2.2 *είτε προκύπτει από δύο προηγούμενες προτάσεις με τον κανόνα της επαγωγής (Modus Ponens, δηλαδή υπάρχουν δύο προηγούμενες προτάσεις P_j και P_k με $j, k < i$ ώστε η P_k να είναι η πρόταση $P_j \to P_i$*

Η ακολουθία των προτάσεων

$$P_1, ..., P_n$$

θα ονομάζεται μια **απόδειξη** *της P από το Σ. Θα γράφουμε*

$$\Sigma \vdash P$$

Η παρακάτω πρόταση είναι μια απλή, αλλά σημαντική παρατήρηση. Το νόημά της είναι ότι προτάσεις που έχουμε ήδη αποδείξει δεν χρειάζεται να τις ξαναποδεικνύουμε μέσα σε μια απόδειξη, αλλά μπορούμε να τις χρησιμοποιούμε μέσα σε αυτήν.

Πρόταση 12 *Αν* $\Sigma \vdash P_1, ..., Sigma \vdash P_n$ *και* $\{P_1, ..., P_n\} \vdash P$ *τότε* $Sigma \vdash P$.

Ο ορισμός της απόδειξης που δώσαμε προηγουμένως είναι πολύ γενικός και από μόνος του δεν είναι αρκετός για να παράγει αποδείξεις στα μαθηματικά. Χρειαζόμαστε και κάποιες γενικές αρχές (τύπους προτάσεων) που θα ονομάσουμε **Λογικά αξιώματα** και θα τα χρησιμοποιούμε χωρίς αιτιολόγηση στην πορεία μιας απόδειξης.

Αυτές οι αρχές θα πρέπει να είναι καθολικά ισχύουσες με την έννοια με οποιονδήποτε τρόπο και αν ερμηνεύσουμε τη γλώσσα μας να ισχύουν. Τέτοιου είδους προτάσεις εξετάσαμε στην παράγραφο 2.3.3 και τις ονομάσαμε **θέσεις**. (Ας θυμηθούμε ότι αν πάρουμε μια οποιαδήποτε ερμηνεία μία γλώσσας Γ κάθε πρόταση P θα ερμηνεύεται κατά μοναδικό τρόπο σαν αληθής είτε ψευδής. Γράφουμε

$$\mathcal{E} \models P$$

αν η P ερμηνεύεται σαν αληθής στην $\mathcal{E}$.) Θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα βασικά αξιώματα των συλλογισμών είναι οι θέσεις. Υπάρχει όμως ένα πρόβλημα: Οι θέσεις χωρίζονται σε είδη: Σε αυτές που μπορούν να γραφτούν στη μορφή μιας ταυτολογίας του Προτασιακού Λογισμού και τις υπόλοιπες. Μπορούμε να ελέξουμε μια πρόταση είναι στην μορφή μιας ταυτολογίας με ένα συγκεκριμμένο αλγόριθμο (γράφουμε την πρόταση σταν προτασιακό τρόπο και μετά ελέγχουμε πχ με αναλυτικό πίνακα ή με πίνακες αληθείας). Όμως είδαμε ότι υπάρχουν θέσεις που δεν σε μορφή ταυτολογίας του προτασιακού λογισμού. Από αυτές θα επιλέξουμε κάποιες συγκεκριμμένες σαν λογικά αξιώματα ελπίζοντας ότι όλες οι υπόλοιπες θα μπορούν να εξαχθούν από αυτές με τη βοήθεια του αποδεικτικού κανόνα. Θα δούμε παρακάτω ότι αυτό μπορεί να γίνει.

Ορισμός 41 *Ένα* **Λογικό αξίωμα** *είναι μια πρόταση που ανήκει σε μια από τις παρακάτω κατηγορίες:*

1 *Είναι ταυτολογία.*

2 $t = t$ *όπου* t *είναι κλειστός όρος.*

3 $(t = t') \to (t' = t)$ *όπου* t, t' *είναι κλειστοί όροι.*

4 $((t = t') \wedge (t' = t'')) \to (t = t'')$ *όπου* t, t', t'' *είναι κλειστοί όροι.*

5 $(t = t') \to (P \to P')$ *όπου* P *είναι μια πρόταση,* t, t' *είναι κλειστοί όροι και* P' *είναι η πρόταση που προκύπτει αν σε εμφάνιση του* t *στην* P *την αντικαθιστούμε με* t'.

6 $(P \leftrightarrow P')$ *όπου* P' *είναι η πρόταση που προκύπτει αν σε εμφάνιση της* x *στην* P *την αντικαθιστούμε με μια άλλη μεταβλητή* x'.

7 $\neg \forall x P \quad \leftrightarrow \quad \exists x\, (\neg P)$

8 $\exists x\, (P \vee Q) \ \leftrightarrow\ \exists x P \vee \exists x Q$

9 $\forall x\, (P \wedge Q) \ \leftrightarrow\ \forall x P \wedge \forall x Q$

10 $\forall x P(x) \quad \rightarrow \quad P(t)$ *όπου αν* $P(x)$ *είναι πρότασιακός τύπος με μόνη ελεύθερη μεταβλητή* x *και* t *κλειστός όρος,* $P(t)$ *είναι η πρόταση που προκύπτει αν αντικαστήσουμε κάθε ελεύθερη εμφάνιση της* x *στον* P *με* t. *Με* $\mathcal{A}$ *θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των λογικών αξιωμάτων*

Τα παραπάνω είδη προτάσεων (τα λογικά αξιώματα) αποτελούν ένα μικρό μέρος από το σύνολο των θέσεων και περιγράφουν κάποιες βασικές αρχές της χρήσεις των λογικών συμβόλων: Τα 2,3,4 δίνουν τους κανόνες χρήσης του συμβόλου της ισότητας, το 5 είναι μια προφανής αρχή αντικατάστασης των μεταβλητών και τα 5,6,7,8,9 είναι κανόνες χρήσης των ποσοδεικτών.

Ορισμός 42 *Μια πρόταση θα λέγεται* **έγκυρη** *αν*

$$\mathcal{A} \vdash P$$

Όλα τα λογικά αξιώματα είναι θέσεις. Επειδή ο αποδεικτικός κανόνας μας διατηρεί την αλήθεια θα έχουμε ότι και κάθε έγκυρη πρόταση είναι θέση:

Πρόταση 13 *Κάθε έγκυρη πρόταση είναι θέση*

Απόδειξη. Αρχικά επαληθεύουμε ότι κάθε στοιχείο του $\mathcal{A}$ είναι θέση.

Έστω $\mathcal{E}$ μια ερμηνεία της γλώσσας και $P_1, ..., P_n$ μια απόδειξη της P_n από το $\mathcal{A}$. Θα δείξουμε ότι η P_n αληθεύει στην $\mathcal{E}$. Θα δείξω με επαγωγή ότι αυτό συμβαίναι για κάθε $i \leq n$. Αν $i = 1$ ή $i = 2$ η P_i είναι στοιχείο του $\mathcal{A}$ άρα θέση, δηλαδή αληθεύει στην $\mathcal{E}$. Αν $i \geq 2$ και κάθε P_j με $j \leq i$ είναι θέση τότε το P_{i+1} είτε θα είναι στοιχείο του $\mathcal{A}$, άρα θέση, είτε θα προκύπτει από δύο προηγούμενες προτάσεις μέσω του κανόνα MP. Αλλά οι προτάσεις αυτές θα είναι αληθεύουν (από υπόθεση) στην $\mathcal{E}$ και συνεπώς αυτό πρέπει να συμβαίνει για την P_{i+1}. ■

Από δω και στο εξής θα υποθέτουμε ότι σε κάθε απόδειξη μπορώ να χρησιμοποιώ στοιχεία από το $\mathcal{A}$ με άλλα λόγια θα τροποποιήσω τον ορισμό της απόδειξης ως εξής:

Ορισμός 43 *Μια πρόταση P θα λέγεται λογική συνέπεια ενός συνόλου προτάσεων Σ αν $\Sigma \cup \mathcal{A} \vdash P$. Θα γράφω γενικά $\Sigma \vdash P$ αντί $\Sigma \cup \mathcal{A} \vdash P$ και $\vdash P$ αντί $\mathcal{A} \vdash P$*

Θα περιγράψουμε μερικές βασικές ιδιότητες της έννοιας της απόδειξης μέσα από τις παρακάτω προτάσεις. Επειδή ο μόνος κανόνας αποδεικτικός κανόνας που χρησιμοποιούμε οι περισσότερες αποδείξεις είναι επανάληψη αντιστοίχων του προτασιακού λογισμού.

Πρόταση 14 *Αν $\Sigma \vdash P$ τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο υπόσυνολο $F = \{P_1 ... P_k\}$ του Σ (που μπορεί να είναι και κενό) με $F \vdash P$*

Απόδειξη. Επειδή μία απόδειξη είναι μια πεπερασμένη ακολουθία προτάσεων σε μια απόδειξη της P θα χρησιμοποιηθεί μόνο ένα πεπερασμένο υποσύνολο F του Σ. ■

Πρόταση 15 *1. $\Sigma \vdash P \wedge Q$ αν και μόνο αν $\Sigma \vdash P$ και $\Sigma \vdash Q$.*

2. $\{P_1, ..., P_n\} \vdash P$ αν και μόνο αν $\{P_1 \wedge ... \wedge P_n\} \vdash P$.

Απόδειξη. (1): Αν $\Sigma \vdash P, \Sigma \vdash Q$, τότε έχουμε την παρακάτω απόδειξη της $P \wedge Q$:
1. P (υπόθεση)
2. Q (υπόθεση)
3. $P \to (Q \to (P \wedge Q))$ (ταυτολογία)
4. $Q \to (P \wedge Q)$)(MP, από 1,3)
5. $P \wedge Q$(MP, από 2,4)

Αντίστροφα: Αν $\Sigma \vdash P \wedge Q$ τότε έχουμε την παρακάτω απόδειξη της P:
1. $P \wedge Q$ (υπόθεση)
2. $(P \wedge Q) \to P$ (ταυτολογία)
3. P (MP, από 1,2).

Το (2) προκύπτει εύκολα από το (1).

■

Ανάλογα με την Πρόταση 15 δείχνουμε την

Πρόταση 16 *$\Sigma \vdash P \leftrightarrow Q$ αν και μόνο αν $\Sigma \vdash P \to Q$ και $Sigma \vdash Q \to P$*

Στην ακόλουθη πρόταση η απόδειξη είναι ακριβώς η ίδια με το Λήμμα παραγωγής στον προτασιακό λογισμό:

Πρόταση 17 (Λήμμα Παραγωγής) $\Sigma \cup \{P\} \vdash Q$ *αν και μόνο αν* $\Sigma \vdash P \to Q$.

Όλοι οι κανόνες των ποσοδεικτών που έχουμε αναφέρει προηγουμένως είναι έγκυρες προτάσεις, με άλλα λόγια μπορούν να αποδειχτούν από τα λογικά αξιώματα:

Πρόταση 18 *Κάθε πρόταση της παρακάτω μορφής είναι έγκυρη:*

Οι νόμοι Δυϊσμού ή Νόμοι του De Morgan

1. $\forall x P \;\; \leftrightarrow \;\; \neg\, (\exists x\, (\neg P))$
2. $\exists x P \;\; \leftrightarrow \;\; \neg\, (\forall x\, (\neg P))$

Οι νόμοι επιμεριστικότητας ποσοδεικτών

3. $\exists x\, (P \vee Q) \;\; \leftrightarrow \;\; \exists x P \vee \exists x Q$
4. $\forall x\, (P \wedge Q) \;\; \leftrightarrow \;\; \forall x P \wedge \forall x Q$
5. $\exists x\, (P \to Q) \;\; \leftrightarrow \;\; \forall x P \to \exists x Q$

Οι νόμοι επιμεριστικότητας ποσοδεικτών υπό συνθήκη

6. $\forall x\, (P \vee Q_{>x<}) \;\; \leftrightarrow \;\; \forall x P \vee Q_{>x<}$
7. $\exists x\, (P \wedge Q_{>x<}) \;\; \leftrightarrow \;\; \exists x P \wedge Q_{>x<}$
8. $\forall x\, (P \to Q_{>x<}) \;\; \leftrightarrow \;\; \exists x P \to Q_{>x<}$
9. $\forall x\, (P_{>x<} \to Q) \;\; \leftrightarrow \;\; P_{>x<} \vee \forall x Q$

Οι νόμοι απαλοιφής περιττών ποσοδεικτών

10. $\forall x P_{>x<} \;\; \leftrightarrow \;\; P_{>x<}$
11. $\exists x P_{>x<} \;\; \leftrightarrow \;\; P_{>x<}$

Οι νόμοι αντικατάστασης

12. $\forall x P_{>y<}(x) \;\; \leftrightarrow \forall y P_{>y<}(y)$
13. $\exists x P_{>y<}(x) \;\; \leftrightarrow \exists y P_{>y<}(y)$

2.5.1 Συνέπεια-Πληρότητα

Ορισμός 44 *Ένα σύνολο από προτάσεις Σ μιας γλώσσας θα λέγεται* **ασυνεπές** *αν υπάρχει μία πρόταση P της γλώσσας ώστε $\Sigma \vdash P$ και $\Sigma \vdash \neg P$. Αν το Σ δεν είναι ασυνεπές τότε θα λέγεται* **συνεπές**.

Πρόταση 19 *Ένα σύνολο από προτάσεις Σ είναι συνεπές αν και μόνο αν υπάρχει μία πρόταση P της γλώσσας την οποία το Σ δεν μπορεί να αποδείξει. Ισοδύναμα, ένα σύνολο από προτάσεις Σ είναι α-συνεπές αν και μόνο αν για κάθε πρόταση P, $\Sigma \vdash P$*

Απόδειξη. Αν το Σ είναι ασυνεπές τότε θα υπάρχει μια πρόταση Q ώστε $\Sigma \vdash Q$ και $\Sigma \vdash \neg Q$. Έστω μια οποιαδήποτε πρόταση P της γλώσσας. Τότε η παρακάτω είναι μια απόδειξη της P από το Σ.

1. Q
2. $\neg Q$
3. $Q \to (\neg Q \to P)$ (ταυτολογία)
4. $\neg Q \to P$ (από 1,3)
5. P (από 2,4)

Το αντίστροφο είναι προφανές. ■

Ορισμός 45 *Ένα σύνολο από προτάσεις Σ μιας γλώσσας θα λέγεται* **πλήρες** *αν για κάθε μία πρόταση P της γλώσσας είτε $\Sigma \vdash P$ είτε $\Sigma \vdash \neg P$.*

Ορισμός 46 *Μία πρόταση P θα λέγεται* **ανεξάρτητη** *από ένα σύνολο προτάσεων Σ αν οι προτάσεις $P, \neg P$ δεν είναι συνέπειες του Σ, δηλαδή δεν μπορούν να αποδειχθούν από το Σ ,*

Από την Πρόταση 19 θα έχουμε ότι

Πρόταση 20 *1. Κάθε ασυνεπές σύνολο προτάσεων είναι πλήρες. 2. Ένα συνεπές σύνολο προτάσεων Σ είναι πλήρες αν και μόνο αν για κάθε πρόταση P το Σ μπορεί να αποδείξει μία και μόνο μία από τις $P, \neg P$.*

2.6 Το Θεώρημα της Πληρότητας

Θα ξεκινήσουμε από μια απλή παρατήρηση:

Πρόταση 21 *Αν ένα σύνολο προτάσεων* Σ *έχει μοντέλο* $\mathcal{M}$ *τότε κάθε συνέπεια του* Σ *αληθεύει στο* $\mathcal{M}$.

Απόδειξη. Επειδή ο MP διατηρεί την αλήθεια επαγωγικά δείχνουμε ότι αν $P_1, ..., P_n$ είναι απόδειξη της P τότε κάθε P_i θα αληθεύει στο $\mathcal{M}$. ■

Πρόταση 22 *Αν ένα σύνολο προτάσεων έχει μοντέλο* $\mathcal{M}$ *τότε είναι συνεπές.*

Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι αν ήταν το Σ ασυνεπές σύνολο θα μπορούσε να αποδείξει μία πρόταση P και την άρνησή της $\neg P$. Αλλά τότε στο μοντέλο $\mathcal{M}$ θα είχαμε να ληθεύει και η P και η άρνησή της $\neg P$, που δεν γίνεται σε καμμία ερμηνεία μιας γλώσσας. Το αντίστροφο της Πρότασης 22 αποτελεί το περιεχόμενο του Θεωρήματος της Πληρότηας του Godel και είναι μία από της βασικές προτάσεις της μαθηματικής λογικής.

Θεώρημα 7 *Αν* Σ *είναι ένα σύνολο από προτάσεις που είναι συνεπές τότε υπάρχει ένα μοντέλο* $\mathcal{M}$ *για το* Σ. *Επιπλέον ο πληθάριθμος του* $\mathcal{M}$ *(του πεδίου του* $\mathcal{M}$*) δεν ξεπερνά αυτόν του* Σ, *αν το* Σ *είναι άπειρο σύνολο και είναι αριθμήσιμος αν το* Σ *είναι πεπερασμένο σύνολο.*