ΓΜΙ: 1η ἑβδομάδα, Ι. Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Ἀνασκόπηση βασικῶν ἐννοιῶν

1.1 Συναρτήσεις. Ἄν καί εἴμαστε ἐξοικειωμένοι μέ τήν ἔννοια τῆς συνάρτησης ἀπό τό σχολεῖο, τήν ἐπαναλαμβάνουμε ἐδῶ καθώς εἶναι θεμελιώδης σέ ὅ,τι ἀκολουθεῖ. Ἄς ὑποθέσουμε λοιπόν ὅτι ἡ μεταβλητή x λαμβάνει τιμές ἀπό ἕνα σύνολο A καί ἡ μεταβλητή y λαμβάνει τιμές ἀπό ἕνα σύνολο B. Λέμε ὅτι ἡ y εἶναι συνάρτηση τοῦ x καί γράφουμε

$$y = y(x) \quad \text{ἤ} \quad y = f(x)$$

ἄν σέ κάθε x_1 τῆς A ἀντιστοιχίζεται ἕνα καί μόνο y_1 ἀπό τό B

$$x_1 \longrightarrow y_1$$

Λόγου χάρη, ἄν

$$y = 2x^2 + x + 1$$

τότε γιά $x=1$, $y=4$, γιά $x=2$, $y=11$ κ.ο.κ. Ἡ x καλεῖται ἀνεξάρτητη μεταβλητή (γιατί ἐπιλέγουμε μία τιμή τοῦ x καί κατόπιν τῆς ἀντιστοιχοῦμε μία τιμή τοῦ y). Τό y καλεῖται ἐξαρτημένη μεταβλητή.

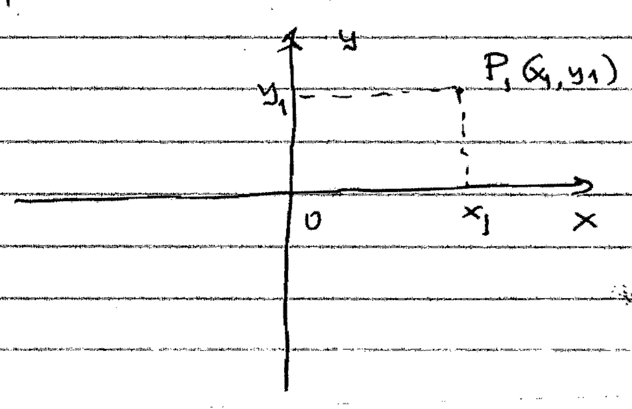
Χρησιμοποιοῦμε τίς συναρτήσεις ὅταν θέλουμε νά ἐκφράσουμε ἕνα φυσικό φαινόμενο μέ ποσοτικό τρόπο. Γιά παράδειγμα ὅταν μία οὐσία A μειώνεται μέσω μιᾶς πρώτης τάξης διαφορικῆς ἐξίσωσης, ἡ συγκέντρωση a στόν χρόνο t τῆς οὐσίας δίνεται ἀπό τήν

$$a = a(t) = a_0 e^{-kt}$$

ὅπου a_0 εἶναι ἡ ἀρχική συγκέντρωση καί k εἶναι μία σταθερά.

1.1.1 Γραφικές ἀναπαραστάσεις συναρτήσεων

Ὁ ἁπλούστερος καί ἀμεσότερος τρόπος γιά νά παραστήσουμε μία συνάρτηση εἶναι μέσω τοῦ γραφήματός της. Ἔχουμε ἕνα σύστημα ἀξόνων, τόν ἄξονα τῶν x καί τόν ἄξονα τῶν y



πού εἶναι κάθετοι μεταξύ τους καί τέμνονται στήν ἀρχή O. Κάθε σημεῖο P_1 τοῦ ἐπιπέδου καθορίζεται ἀπό δύο ἀριθμούς x_1, y_1 πάνω στούς ἄξονες τῶν x καί y ἀντίστοιχα, ὅπως στό σχῆμα. Γράφομε τότε $P_1 = P_1(x_1, y_1)$ καί τό ζεῦγος (x_1, y_1) καλεῖται συντεταγμένες τοῦ P. Τό x_1 εἶναι ἡ τετμημένη καί τό y_1 εἶναι ἡ τεταγμένη. Ὅταν ἔχομε μία συνάρτηση $y = f(x)$ τό σύνολο

$$Gr(f) = \{(x, f(x))\}$$

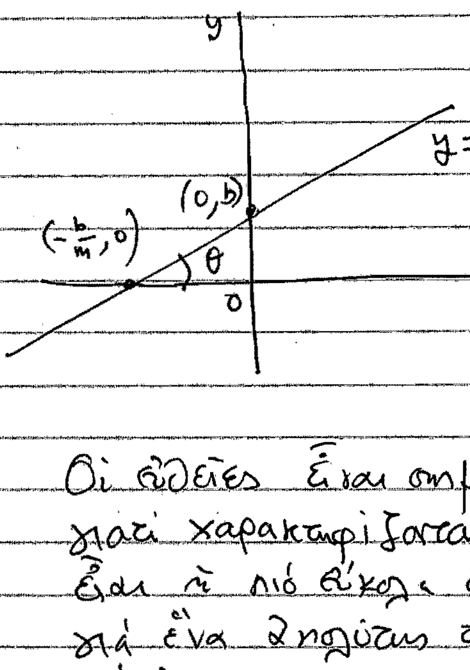
καλεῖται γράφημα τῆς f. Ἀποτυπώνομε τά σημεῖα τοῦ $Gr(f)$ στό σύστημα ἀξόνων μας καί συνήθως παίρνομε μία καμπύλη πού εἶναι ἡ γραφική παράσταση τῆς f.

1.1.2. Διάφοροι τύποι συναρτήσεων

i) Ἡ γραμμική συνάρτηση. Αὐτή ἔχει τύπο

$$y = mx + b$$

καί ἀναπαριστᾶ εὐθεῖα (σχῆμα). Τέμνει τούς ἄξονες τῶν x καί y ἀντίστοιχα στά σημεῖα $(-\frac{b}{m}, 0)$ καί $(0, b)$. Ἡ κλίση της ὁρίζεται ἀπό



$$\text{κλίση} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

καί προφανῶς δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἐπιλογή τῶν (x_1, y_1), (x_2, y_2).

Οἱ εὐθεῖες εἶναι σημαντικές στήν ἀνάλυση τῶν χημικῶν δεδομένων γιατί χαρακτηρίζονται ἀπό τίς δύο παραμέτρους m καί b. Ἐπίσης εἶναι ἡ πιό εὔκολα ἀναγνωρίσιμη συνάρτηση, μέ τήν ἔννοια ὅτι γιά ἕνα ὁποιοδήποτε τυχαῖο σύνολο σημείων εἶναι ἰδιαίτερα δύσκολο νά ἀναγνωρίσομε σέ ποιά καμπύλη ἀνήκει. Ὅταν εἶναι δυνατόν, προσπαθοῦμε νά μετατρέψομε μία συνάρτηση σέ γραμμική μορφή: γιά παράδειγμα ἡ μεταβολή τῆς σταθερᾶς ἰσορροπίας K μέ τήν θερμοκρασία T δίνεται ἀπό τήν

$$\ln K = -\frac{\Delta H^0}{RT} + c$$

ὅταν ἡ ἀντίδραση θερμότητας ΔH^0 δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τή θερμοκρασία T. Ἐδῶ R εἶναι μία σταθερά πού ἐξαρτᾶται από τό αέριο καί c είναι μία άλλη σταθερά. Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης είναι κάπως σύνθετη. Όμως άν θέσουμε

$$\ln K = K', \quad T' = \frac{1}{T},$$

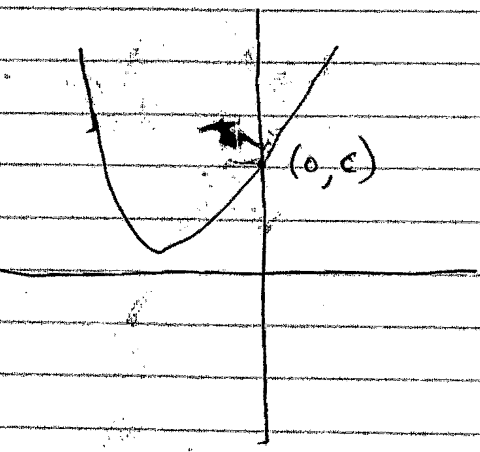
Παίρνουμε τήν γραμμική

$$K' = -\frac{\Delta H^0}{R} T' + C$$

ή οποία σχεδιάζεται εύκολα. Παρατηρούμε δέ ότι ή κλίση αυτής της ευθείας είναι $-\frac{\Delta H^0}{R}$, από όπου μπορούμε νά πάρουμε τήν αντίδραση θερμότητας ΔH^0.

ii) Η τετραγωνική συνάρτηση. Αυτή έχει τύπο

$$y = ax^2 + bx + c$$



καί τό γράφημά της είναι μία παραβολή, όπως στό σχήμα. Εάν τέμνει τόν άξονα τών x, τότε τό κάνει στά σημεία $(x_1,0)$ καί $(x_2,0)$ όπου

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2}$$

Τέμνει δέ πάντοτε τόν Oy στό σημείο (0,c).

iii) Μονότιμες συναρτήσεις. Μέ τόν τρόπο πού ορίσαμε τόν ορισμό της συνάρτησης, όταν $y=y(x)$, τότε κάθε x_1 από τά x αντιστοιχεί σέ ένα καί μόνο y_1 από τά y. Γραφικά, αυτό μπορούμε νά τό φανταστούμε ώς έξής: Κάθε κάθετη ευθεία στόν Ox τέμνει τό πολύ μία φορά τό Gr(f)· δείτε το καί στά προηγούμενα παραδείγματα. Οι μονότιμες συναρτήσεις είναι σημαντικές στήν κβαντομηχανική όπου απαιτείται οι συναρτήσεις κύματος νά ορίζονται ώς μονότιμες συναρτήσεις.

iv) Πλειότιμες συναρτήσεις. Προκύπτουν άν άφαιρέσουμε τή φράση "ένα καί μόνο" στόν όρισμό τής μονότιμης συνάρτησης. Παραδείγματα τέτοιων είναι οι

$$y^2 = x \qquad y^4 = x$$

v) Πεδία ορισμού. Στά προηγούμενα παραδείγματα συναρτήσεων τό x έπαιρνε κάθε τιμή από τό σύνολο τών πραγματικών άριθμών $\mathbb{R}$. Αυτό δέν συμβαίνει πάντοτε. Άς πούμε, η

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}$$

γιά νά ορίζεται καλώς, θά πρέπει $x^2-16>0$. Συνεπώς τό πεδίο όρισμού είναι τό $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

vi) Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Στή Χημεία όπως καί άλλού, συχνά μία ποσότητα εξαρτάται από δύο ή περισσότερες μεταβλητές. Λόγου χάρη, η πίεση P ενός αερίου εξαρτάται από τόν όγκο V, τήν θερμοκρασία T καί τόν άριθμό moles n. Σέ ένα ιδανικό άέριο

$$P = P(V,T,n) = \frac{nRT}{V}$$

όπου R είναι η σταθερά τού αερίου.

viii) Πολυώνυμα. Είναι συναρτήσεις τής μορφής

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad a_n \neq 0$$

καί καλούνται πολυώνυμα βαθμού n. Δείτε ότι ορίζονται σε όλο τό $\mathbb{R}$.

vii ix) Πεπλεγμένες συναρτήσεις. Άς γράψουμε τόν τύπο τής πίεσης ώς:

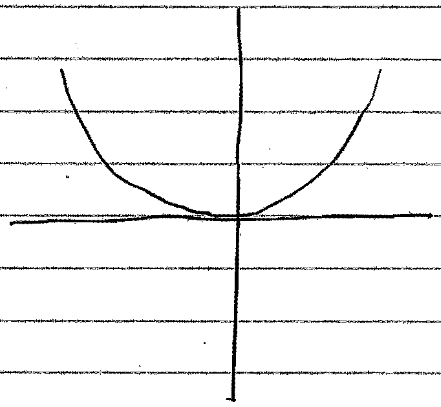
$$V = \frac{nRT}{P}.$$

Βλέπουμε ότι μπορούμε επακριβώς νά εκφράσουμε τό V ώς συνάρτηση $V = V(n,T,P)$. Τούτο δεν είναι πάντοτε δυνατόν. Ας δούμε την εξίσωση van der Waals (κατάστασης)

$$\left(P+\frac{n^2a}{V^2}\right)(V-nb)=nRT$$

Εάν, σε αυτήν την περίπτωση προσπαθήσουμε να λύσουμε ως προς V, μάλλον δεν θα τα καταφέρουμε. Εάν όμως επιθυμούμε να θεωρούμε την V ως $V(P,T,n)$ τότε θα την λέμε πεπλεγμένη ως προς αυτές τις μεταβλητές.

ix) Άρτιες και περιττές συναρτήσεις: Μία συνάρτηση λέγεται άρτια αν



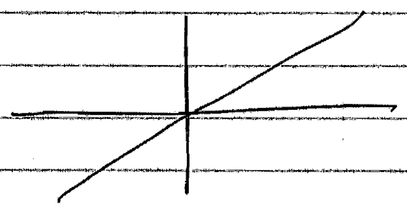
$$f(x) = f(-x)$$

για κάθε x στο πεδίο ορισμού της. Το γράφημα μίας τέτοιας συνάρτησης είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα Oy.

Μία συνάρτηση λέγεται περιττή αν

$$f(x) = -f(-x)$$

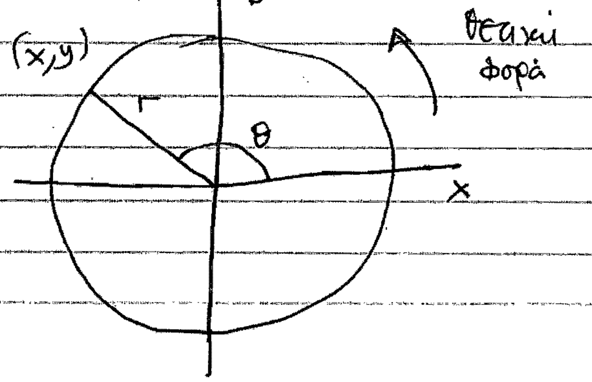
για κάθε x στο πεδίο ορισμού της. Το γράφημα μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρικό ως προς την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων



11/26/09

x) Υπερβατικές συναρτήσεις. Πρόκειται περί των εκθετικών, λογαριθμικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

1.1.3 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Θυμόμαστε ότι το ακτίνιο rad είναι μέτρο γωνίας, όπως στο σχήμα



$$\theta = \frac{s}{r} \text{ rad}$$

όπου s είναι το τόξο

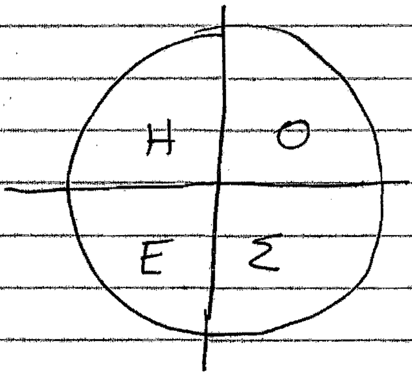
Έχουμε ότι

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

και γενικά μ μοίρες = $\frac{\pi}{180}$ rad. όπως γνωστόν

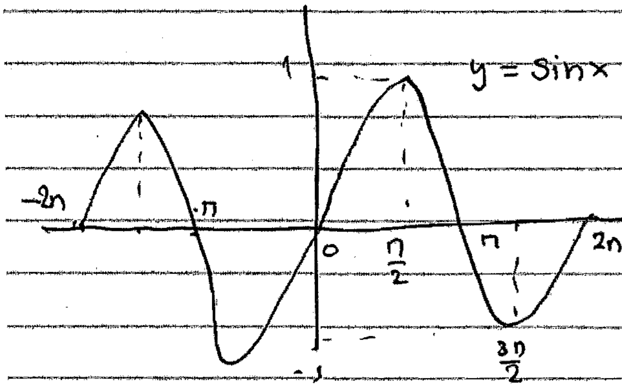
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

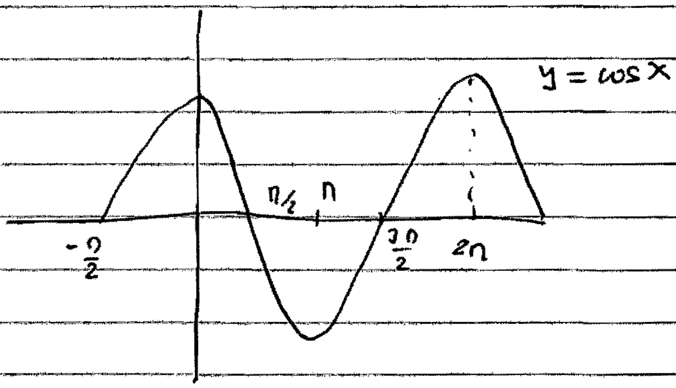
είναι το ημίτονο, το συνημίτονο και η εφαπτομένη αντίστοιχα. Για τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών ισχύει ο κανόνας ΟΗΕΣ:



- στο πρώτο τεταρτημόριο όλα είναι θετικά
- στο δεύτερο τεταρτημόριο το ημίτονο είναι θετικό
- στο τρίτο τεταρτημόριο η εφαπτομένη είναι θετική
- στο τέταρτο τεταρτημόριο το συνημίτονο είναι θετικό.

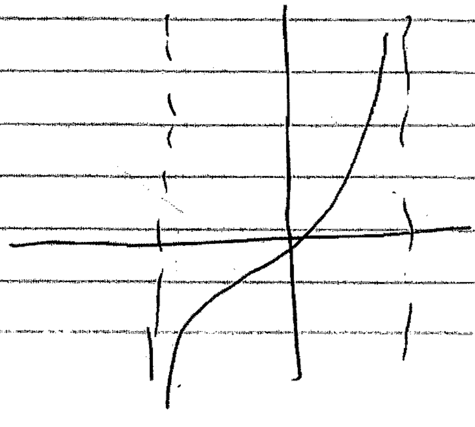
Οι συναρτήσεις $\sin x$, $\cos x$ ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$: (στα παρακάτω σχήματα φαίνονται μόνο λίγα κομμάτια τους)





Ισχύει δε ότι $-1 \leq |\sin x| \leq 1$, $-1 \leq |\cos x| \leq 1$

Η ημιτονοειδής και η συνημιτονοειδής συνάρτηση περιγράφουν φαινόμενα ταλαντώσεων όπως κυματική κίνηση, απλή αρμονική κίνηση κ.ά.



Η συνάρτηση $\tan x$ δεν ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Επειδή

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

και η $\cos x$ μηδενίζεται σε όλα τα $2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}$ εκτός από αυτά τα σημεία. Στο σχήμα φαίνεται η $\tan x$ στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Υπάρχουν κι άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

- Τέμνουσα $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
- συντέμνουσα $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$
- συνεφαπτομένη $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

Θυμόμαστε διάφορους τριγωνομετρικούς τύπους από το σχολείο:

- της αντίθετης γωνίας $\sin(-x) = -\sin x$ $\cos(-x) = \cos x$ $\tan(-x) = -\tan x$
- της παραπληρωματικής γωνίας $\sin(\pi - x) = \sin x$ $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\tan(\pi - x) = -\tan x$
- της συμπληρωματικής γωνίας $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$
- Εκτός από το $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, έχουμε και τον βασικό τύπο

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

- Τους τύπους αθροισμάτων – διαφορών

$$\cos(a-\beta) = \cos a \cos\beta + \sin a \sin\beta$$
$$\cos(a+\beta) = \cos a \cos\beta - \sin a \sin\beta$$
$$\sin(a-\beta) = \sin a \cos\beta - \sin\beta \cos a$$
$$\sin(a+\beta) = \sin a \cos\beta + \sin\beta \cos a$$

- Τους τύπους του διπλασίου τόξου

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

καί, τέλος τούς τύπους

- $2\sin a \cos\beta = \sin(a+\beta) + \sin(a-\beta)$
  $2\cos a \cos\beta = \cos(a+\beta) + \cos(a-\beta)$
  $2\sin a \sin\beta = \cos(a-\beta) - \cos(a+\beta)$

1.1.4. Ἡ ἐκθετική συνάρτηση. Ἕνας τρόπος νά ὁρίσουμε τήν ἐκθετική συνάρτηση $\exp(x) = e^x$ εἶναι μέσω ἄπειρης σειρᾶς

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(Θυμηθεῖτε: $n! = 1.2\dots(n-1).n$). Ἡ συνάρτηση αὐτή εἶναι μοναδική μέ τήν ἰδιότητα: ὁ βαθμός μεταβολῆς τοῦ y μέ τό x, εἶναι y! Περιγράφει διάφορα φαινόμενα τοῦ πραγματικοῦ κόσμου ὅπως ραδιενεργή μείωση, αὔξηση πληθυσμοῦ βακτηρίων (νόμος Malthus), τήν κατανομή σωματιδίων ὅπως αὐτή ἐξαρτᾶται ἀπό τά ἐπίπεδα ἐνέργειας καί τή θερμοκρασία, κ.ἄ.

Ἐάν ἔχουμε N σωματίδια, ὁ ἀριθμός τους N_i σέ ἕνα ἐπίπεδο πού ἔχει ἐνέργεια E_i καί θερμοκρασία T δίνεται ἀπό τήν κατανομή Boltzmann:

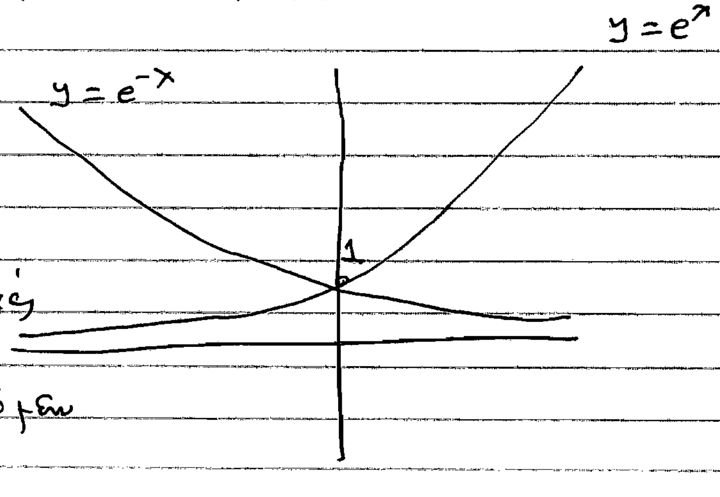
$$\frac{N_i}{N} = \frac{\exp(-E_i/kT)}{\sum_i \exp(-E_i/kT)}$$

ὅπου k εἶναι ἡ σταθερά Boltzmann. Θά θεωροῦμε γνωστά τά παρακάτω:

$$e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \simeq 2.71828$$

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$$

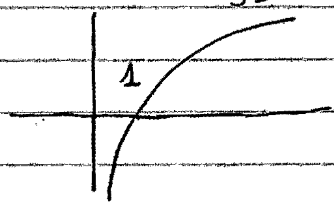
$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$



Στό διπλανό σχῆμα εἶναι οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν e^x καί e^{-x}. Παρατηρεῖστε ὅτι ὅπως εἶναι ἀναμενόμενο $e^0 = 1$

1.1.5. Η λογαριθμική συνάρτηση. Ἂς θυμηθοῦμε τοὺς λογαρίθμους· μὲ $\log x$ συμβολίζομε τὸν $\log_{10} x$ (τὴ δύναμη στὴν ὁποῖα πρέπει νὰ ὑψώσομε τὸ 10 γιὰ νὰ πάρομε τὸ x. Δεῖτε ὅτι $y = 10^x \Rightarrow x = \log_{10} y$. Θυμόμαστε τὰ παρακάτω

- $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$
- $\log(x/y) = \log x - \log y$
- $\log(x^n) = n \log x$



¡ Η $\ln x$ ὁρίζεται γιὰ $x>0$!

Ἂν ἀντὶ γιὰ 10 ἔχομε ὁποιαδήποτε ἄλλη βάση λογαρίθμων, περνᾶμε ἀπὸ τὴν μία στὴν ἄλλη μὲ τὸν τύπο

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

(Οἱ νεπέρειοι λογάριθμοι: $\log_e x = \ln x$)

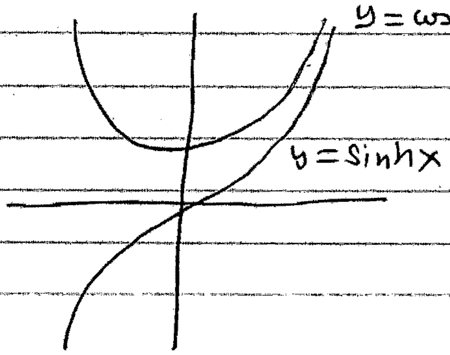
Μία κοινότατη ἐφαρμογὴ τῶν λογαρίθμων (μὲ βάση 10) εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ pH

$$pH = -\log_{10}[H^+]$$

ὅπου $[H^+]$ εἶναι ἡ συγκέντρωση τοῦ ἰόντος Ὑδρογόνου.

1.1.6. Ὑπερβολικὲς συναρτήσεις. Κατασκευάζονται ἀπὸ τὴν ~~ὑπερβολικὴ~~ ἐκθετικὴ συνάρτηση

- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ὑπερβολικὸ συνημίτονο
- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ὑπερβολικὸ ἡμίτονο



Ἰσχύει ὅτι $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$

Ἔχομε ἐπίσης καὶ τὶς

$\tanh x$, $\coth x$, $\mathrm{sech}\, x$, $\mathrm{cosech}\, x$

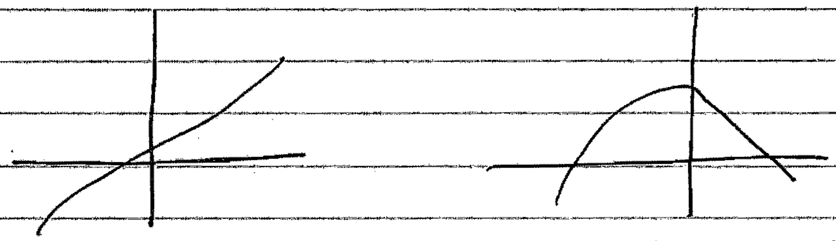
1.1.7. Αντίστροφες συναρτήσεις. Μία απλή συνάρτηση $y=5x+1$ λύνεται ως προς x:

$$x=\frac{y-1}{5}$$

Η x είναι τότε η αντίστροφη της y. Προφανώς κάτι τέτοιο δεν είναι πάντοτε δυνατόν για τυχαία $y=f(x)$. ~~Κάτι~~ Είναι δυνατόν όταν η y είναι 1-1:

$$\text{για } x_1\neq x_2 \Rightarrow y_1\neq y_2$$

Σχηματικά, κάθε ευθεία κάθετη στον Oy τέμνει το γράφημα της f το πολύ σε ένα σημείο. Τότε η $y=f(x)$ λέγεται αναστρέψιμη και ισχύει



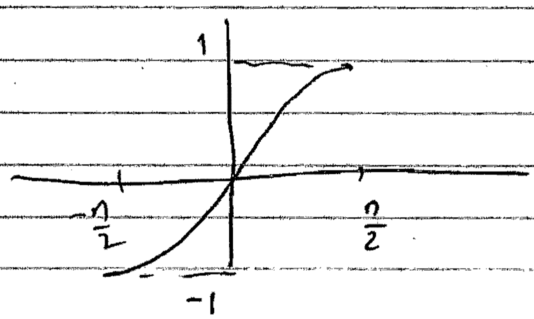
αναστρέψιμη   μη αναστρέψιμη

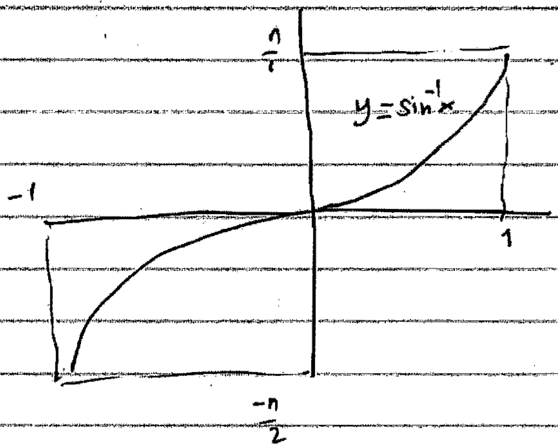
$$y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y) \qquad f^{-1} \text{ η αντίστροφη της } f$$

Η εκθετική και η λογαριθμική είναι αντίστροφες

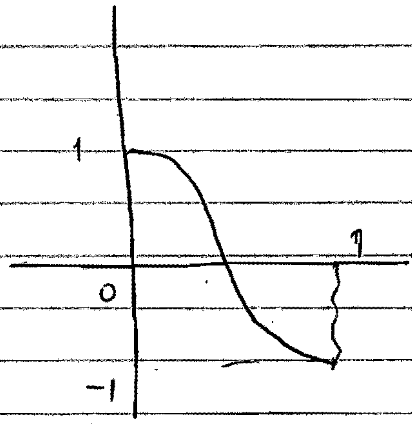
$$y=\log_e x \Leftrightarrow x=e^{y}$$

Εάν θέλουμε να ορίσουμε τις αντίστροφες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, τότε θα πρέπει να τις περιορίσουμε αντίστοιχα στα κομμάτια του πεδίου ορισμού τους που είναι 1-1. Έτσι, περιορίζοντας την $\sin x$ στο $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, παίρνουμε την αντίστροφή της $\sin^{-1}(x)$ ή καλύτερα $\arcsin x$ που ορίζεται στο $[-1,1]$:

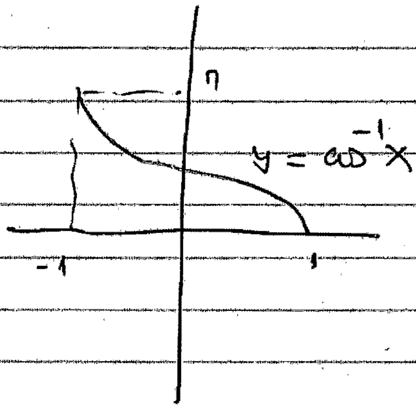




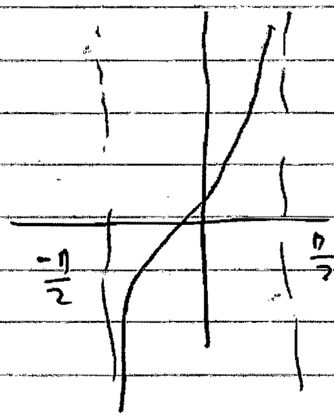
Μέ τόν ἴδιο τρόπο παίρνουμε καί τήν ἀντίστροφη τῆς cos x, τήν $\cos^{-1}x$ ἤ arccos x. Περιορίζουμε τήν cos x στό $[0,\pi]$:

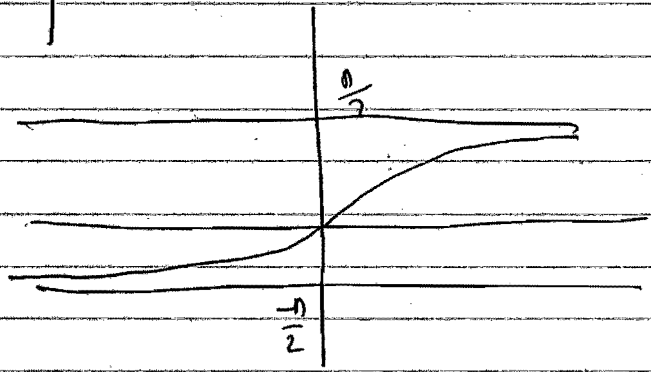


καί παίρνουμε τήν ἀντίστροφη ποὺ ὁρίζεται καί αὐτή στό $[-1,1]$.



Μέ τόν ἴδιο τρόπο παίρνουμε καί τήν ἀντίστροφη τῆς tan x. Τήν περιορίζουμε πρῶτα στό $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ καί ἡ ἀντίστροφη $\tan^{-1}x$ ἤ arctan x εἶναι ἡ





Δεῖτε ὅτι τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς arctan x εἶναι ὅλο τό $\mathbb{R}$.

1.2. Ἀνισότητες Τά παρακάτω θά σᾶς εἶναι χρήσιμα:

$a>b \Rightarrow b<a$

$a-b>c \Rightarrow a>b+c$

$a>b \Rightarrow -a<-b$

Ἄν $a>0$, $\frac{1}{a}>0$. Ἄν $a<0$, $\frac{1}{a}<0$

Ἄν $a>b$ $c\geq d \Rightarrow a+c>b+d$

$a>0$, $b>0 \Rightarrow ab>0$

$a>0$, $b<0 \Rightarrow ab<0$

www.math.uoa.gr/~jplats/M1-2017.htm