ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $f(x,y,z) = y$ και $\mathbf{\sigma}(t) = (0,0,t), 0 \leq t \leq 1$. Αποδείξτε ότι $\int_{\mathbf{\sigma}} f ds = 0$.

2. Υπολογίστε τα ακόλουθα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_{\mathbf{\sigma}} f(x,y,z)ds$, όπου

(a) $f(x,y,z) = x + y + z$, και
$\mathbf{\sigma}$: $t \to (\sin t, \cos t, t), t \in [0, 2\pi]$

(b) $f(x,y,z) = \cos z$, $\mathbf{\sigma}$ όπως στο μέρος (a)

(c) $f(x,y,z) = x \cos z$, $\mathbf{\sigma}$: $t \to t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, t \in [0,1]$

3. Υπολογίστε τα ακόλουθα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_{\mathbf{\sigma}} f(x,y,z)ds$, όπου

(a) $f(x,y,z) = \exp\sqrt{z}$, και
$\mathbf{\sigma}$: $t \to (1, 2, t^2), t \in [0,1]$

(b) $f(x,y,z) = yz$, και
$\mathbf{\sigma}$: $t \to (t, 3t, 2t), t \in [1,3]$

(c) $f(x,y,z) = (x+y)/(y+z)$, και
$\mathbf{\sigma}$: $t \to (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t), t \in [1,2]$

4. (a) Δείξτε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(x,y)$ κατά μήκος της καμπύλης που δίνεται σε πολικές συντεταγμένες από την $r = r(\theta), \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, είναι

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

(b) Υπολογίστε το μήκος της $r = 1 + \cos\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

5. Έστω η $f : \mathbf{R}^3 \backslash \{\text{επίπεδο } xz\} \to \mathbf{R}$ που ορίζεται από την $f(x,y,z) = 1/y^3$. Υπολογίστε το $\int_{\mathbf{\sigma}} f(x,y,z)ds$ όπου η $\mathbf{\sigma}$: $[1, e] \to \mathbf{R}^3$ ορίζεται από την $\mathbf{\sigma}(t) = (\log t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

6. Γράψτε το παρακάτω όριο σαν επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(x,y,z) = xy$ πάνω σε κάποια καμπύλη $\mathbf{\sigma}$ στο $[0,1]$ και υπολογίστε το:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N-1} (t_i^*)^2(t_{i+1}^2 - t_i^2)$$

(εδώ $t_1, \ldots, t_N$ είναι μια διαμέριση του $[0,1]$ και $t_i \leq t_i^* \leq t_{i+1}$).

7. Έστω $f(x,y) = 2x - y$, $x = t^4$, $y = t^4$, $-1 \leq t \leq 1$.

(a) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της f κατά μήκος αυτής της καμπύλης και δώστε γεωμετρική ερμηνεία της απάντησής σας.

(b) Υπολογίστε τη συνάρτηση μήκους τόξου $s(t)$ και επαναλάβετε το μέρος (a) χρησιμοποιώντας την s (αν θέλετε, συμβουλευτείτε την Άσκηση 2, της Παραγράφου 3.2).

Στις Ασκήσεις 8 ώς 11 εφαρμόζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο πρόβλημα του ορισμού της μέσης τιμής μιας βαθμωτής συνάρτησης κατά μήκος μιας καμπύλης. Ορίζουμε τον αριθμό

$$\frac{\int_{\mathbf{\sigma}} f(x,y,z)ds}{l(\mathbf{\sigma})}$$

σαν τη μέση τιμή της f κατά μήκος της $\mathbf{\sigma}$. Εδώ, με $l(\mathbf{\sigma})$ συμβολίζουμε το μήκος της καμπύλης:

$$l(\mathbf{\sigma}) = \int_{\mathbf{\sigma}} \|\mathbf{\sigma}'(t)\|dt.$$

(Ο ορισμός αυτός είναι ανάλογος με εκείνον της μέσης τιμής μιας συνάρτησης σε ένα χωρίο, τον οποίο δώσαμε στην Παράγραφο 6.4.)

8. (a) Δικαιολογήστε τον τύπο $[\int_{\mathbf{\sigma}} f(x,y,z)\, ds]/l(\mathbf{\sigma})$ που δίνει τη μέση τιμή της f κατά μήκος της $\mathbf{\sigma}$, χρησιμοποιώντας αθροίσματα Riemann.

(b) Δείξτε ότι η μέση τιμή της f κατά μήκος της $\mathbf{\sigma}$ στο Παράδειγμα 1 είναι $(1 + \frac{4}{3}\pi^2)$.

(c) Στην Άσκηση 2(a) και (b) πιο πάνω, βρείτε τη μέση τιμή της f κατά μήκος των καμπυλών που δίνονται.

9. Βρείτε τη μέση συντεταγμένη y των σημείων του ημικυκλίου που περιγράφεται από την $\mathbf{\sigma}$: $[0, \pi] \to \mathbf{R}^3, \theta \to (0, a\sin\theta, a\cos\theta), a > 0$.

10. Υποθέτουμε ότι το ημικύκλιο της Άσκησης 9 είναι φτιαγμένο από σύρμα με ομοιόμορφη πυκνότητα 2 gr ανά μονάδα μήκους.

(a) Πόση είναι η συνολική μάζα του σύρματος;

(b) Πού βρίσκεται το κέντρο βάρους* του σύρματος; (Συμβουλευτείτε την Παράγραφο 6.4.)

---

*(Σ.τ.Ε.): Λόγω σταθερής πυκνότητας, το κέντρο μάζας και το κέντρο βάρους ταυτίζονται.

11. Εστω $\boldsymbol{\sigma}$ η καμπύλη με $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t^2, t, 3)$ για $t \in [0,1]$.

(a) Βρείτε το $l(\boldsymbol{\sigma})$, το μήκος της καμπύλης.

(b) Βρείτε τη μέση συντεταγμένη y κατά μήκος της καμπύλης $\boldsymbol{\sigma}$.

12. Αν η $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ είναι κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη, ορίζουμε *το μήκος του γραφήματος της f στο* $[a,b]$ σαν το μήκος της καμπύλης $t \to (t, f(t))$ για $t \in [a,b]$.

(a) Δείξτε ότι το μήκος του γραφήματος της f στο $[a,b]$ είναι

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

(b) Βρείτε το μήκος του γραφήματος της $y = \log x$ από $x = 1$ ώς $x = 2$.

13. Βρείτε τη μάζα ενός σύρματος που έχει το σχήμα της τομής της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ με το επίπεδο $x + y + z = 0$, αν η πυκνότητα μάζας στο (x, y, z) δίνεται από την $\rho(x, y, z) = x^2$ gr ανά μονάδα μήκους σύρματος.

14. Υπολογίστε το $\int_{\boldsymbol{\sigma}} f ds$ όπου $f(x, y, z) = z$ και $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$ για $0 \le t \le t_0$.

7.2