ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας της μοναδιαίας σφαίρας S που παριστάνεται παραμετρικά από την $\mathbf{\Phi}$: $D \to S \subset \mathbf{R}^3$, όπου D είναι το ορθογώνιο $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$ και η $\mathbf{\Phi}$ δίνεται από τις εξισώσεις

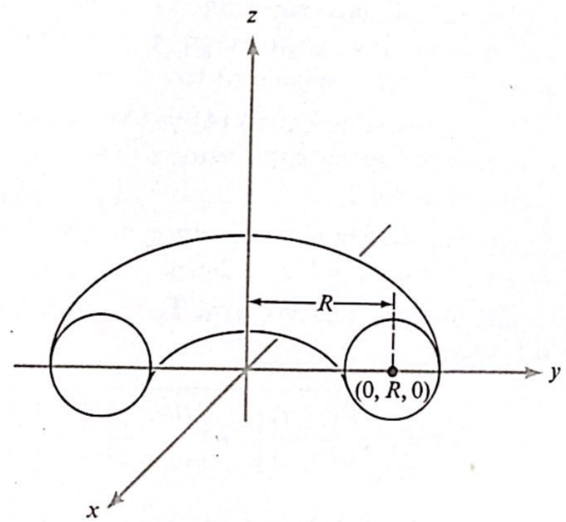
$$x = \cos\theta \sin\phi, \quad y = \sin\theta \sin\phi, \quad z = \cos\phi.$$

Παρατηρήστε ότι μπορούμε να παραστήσουμε παραμετρικά ολόκληρη τη σφαίρα, αλλά δεν μπορούμε να την παραστήσουμε στη μορφή $z = f(x, y)$. Συγκρίνατε με το Παράδειγμα 3.

2. Στην Άσκηση 1, τί συμβαίνει αν επιτρέψουμε στη ϕ να μεταβάλλεται από $-\pi/2$ ώς $\pi/2$; Από 0 ώς 2π; Γιατί παίρνουμε διαφορετικά αποτελέσματα;

3. Βρείτε το εμβαδόν του ελικοειδούς στο Παράδειγμα 2 αν το χωρίο D είναι το $0 \leq r \leq 1$ και $0 \leq \theta \leq 3\pi$.

4. Ο τόρος T παριστάνεται παραμετρικά από τη συνάρτηση $\mathbf{\Phi}$: $D \to \mathbf{R}^3$, όπου η $\mathbf{\Phi}$ δίνεται από τις συναρτήσεις συντεταγμένων $x = (R + \cos\phi)\cos\theta, y = (R + \cos\phi)\sin\theta, z = \sin\phi$, D είναι το ορθογώνιο $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, δηλαδή, $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$, και το $R > 1$ είναι σταθερό (δείτε το Σχήμα 7.4.8). Δείξτε ότι



Σχήμα 7.4.8 Μια διατομή του τόρου.

$A(T) = (2\pi)^2 R$, πρώτα χρησιμοποιώντας τον τύπο (3) και, μετά, χρησιμοποιώντας τον τύπο (7).

5. Έστω $\mathbf{\Phi}(u, v) = (u - v, u + v, w)$ και D ο μοναδιαίος δίσκος στο επίπεδο uv. Βρείτε το εμβαδόν της $\mathbf{\Phi}(D)$.

6. Βρείτε το εμβαδόν του τμήματος της μοναδιαίας σφαίρας που αποκόπτεται από τον κώνο $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ (δείτε την Άσκηση 1).

7. Δείξτε ότι μπορούμε να γεμίσουμε τον εσωτερικό χώρο της επιφάνειας $x = 1/\sqrt{y^2 + z^2}, 1 \leq x < \infty$, όχι όμως και να την βάψουμε!

8. Βρείτε μια παραμετρικοποίηση της επιφάνειας $x^2 - y^2 = 1$, όπου $x > 0, -1 \leq y \leq 1$ και $0 \leq z \leq 1$. Χρησιμοποιώντας την εκφράστε το εμβαδόν της επιφάνειας σαν ένα ολοκλήρωμα.

9. Παραστήστε παραμετρικά το ελλειψοειδές E:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

και γράψτε το ολοκλήρωμα που δίνει το εμβαδόν της επιφάνειάς του, $A(E)$. (Μήν υπολογίσετε το ολοκλήρωμα.)

10. Υποθέτουμε ότι η καμπύλη $y = f(x), a \leq x \leq b$, περιστρέφεται γύρω από τον άξονα y. Δείξτε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας που διαγράφεται είναι

$$A = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,|x|\,dx.$$

Δώστε την ερμηνεία του τύπου χρησιμοποιώντας μήκος τόξου και κεκλιμένο ύψος.

11. Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$, γύρω από τον άξονα y.

12. Χρησιμοποιήστε τον τύπο (4) για να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας του κώνου του Παραδείγματος 1.

13. Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζεται από τις $x + y + z = 1, x^2 + 2y^2 \leq 1$.

14. Δείξτε ότι για τα διανύσματα $\mathbf{T}_u$ και $\mathbf{T}_v$ ισχύει ο τύπος

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\right]^2}.$$

15. Υπολογίστε το εμβαδόν της επιφάνειας που δίνεται από τις

$$x = r\cos\theta, \quad y = 2r\cos\theta, \quad z = \theta,$$

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

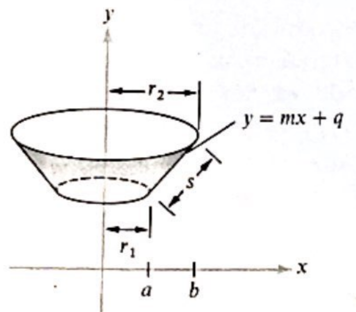
Σχεδιάστε την.

16. Αποδείξτε το *Θεώρημα του Πάππου*: Έστω $\boldsymbol{\sigma}$: $[a, b] \to \mathbf{R}^2$ μια καμπύλη C^1 της οποίας η εικόνα βρίσκεται στο δεξιό ημιεπίπεδο και είναι απλή κλειστή καμπύλη. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή της εικόνας της $\boldsymbol{\sigma}$ γύρω από τον άξονα y είναι ίσο με $2\pi\bar{x}l(\boldsymbol{\sigma})$, όπου $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή των συντεταγμένων x των σημείων της $\boldsymbol{\sigma}$, και $l(\boldsymbol{\sigma})$ είναι το μήκος της $\boldsymbol{\sigma}$. (Δείτε τις Ασκήσεις 8 ώς 11, της Παραγράφου 7.1, που αφορούν τις μέσες τιμές.)

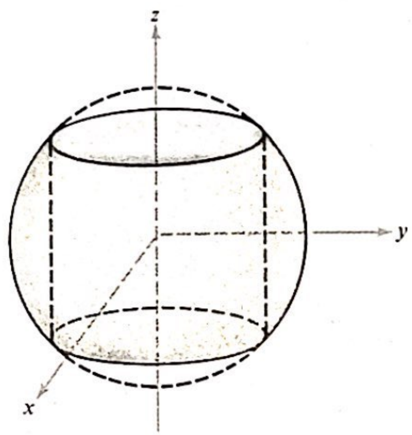
17. Ο κύλινδρος $x^2 + y^2 = x$ διαιρεί τη μοναδιαία σφαίρα S σε δύο χωρία S_1 και S_2, από τα οποία το S_1 είναι στο εσωτερικό του κυλίνδρου, ενώ το S_2 έξω από αυτόν. Βρείτε το λόγο των εμβαδών $A(S_2)/A(S_1)$.

18. Υποθέτουμε ότι μια επιφάνεια S που είναι το γράφημα μιας συνάρτησης $z = f(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$, περιγράφεται επίσης σαν το σύνολο των $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ με $F(x, y, z) = 0$ (είναι δηλαδή επιφάνεια στάθμης). Βρείτε έναν τύπο για το $A(S)$ στον οποίο να εμφανίζεται μόνο η F.

19. Υπολογίστε το εμβαδόν του κόλουρου κώνου του Σχήματος 7.4.9, χρησιμοποιώντας (a) μόνο γεωμετρική αιτιολόγηση και (b) έναν τύπο για το εμβαδόν επιφάνειας.



Σχήμα 7.4.9 Ένα ευθύγραμμο τμήμα που περιστρέφεται γύρω από τον άξονα y γεννάει έναν κόλουρο κώνο.



Σχήμα 7.4.10 Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του σκιασμένου χωρίου.

20. Ανοίγουμε μια κυλινδρική οπή ακτίνας 1 διαμέσου μιας στερεάς μπάλας ακτίνας 2, και κατασκευάζουμε ένα ''δακτυλιοειδές πόμολο'' όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.4.10. Βρείτε τον όγκο και την εξωτερική επιφάνεια του ''πόμολου'' (γραμμοσκιασμένη περιοχή).

21. Βρείτε το εμβαδόν του γραφήματος της συνάρτησης $f(x, y) = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$ το οποίο βρίσκεται πάνω από το χωρίο $[0, 1] \times [0, 1]$.

22. Εκφράστε το εμβαδόν της επιφάνειας καθενός από τα παρακάτω γραφήματα πάνω από το χωρίο D που κάθε φορά υποδεικνύεται, σαν ένα διπλό ολοκλήρωμα. Μην το υπολογίσετε.

(a) $(x + 2y)^2$, $D = [-1, 2] \times [0, 2]$

(b) $xy + x/(y + 1)$, $D = [1, 4] \times [1, 2]$

(c) $xy^3 e^{x^2 y^2}$, D =ο μοναδιαίος δίσκος με κέντρο την αρχή των αξόνων.

(d) $y^3 \cos^2 x$, D =το τρίγωνο με κορυφές τα $(-1, 1), (0, 2)$ και $(1, 1)$.