8.1

① Υπολογίστε το $\int_C y\,dx - x\,dy$ όπου C το σύνορο του τετραγώνου $[-1,1]\times[-1,1]$ προσανατολισμένο κατά τη φορά την αντίθετη των δεικτών του ρολογιού.

$Q(x,y)=y$, $P(x,y)=-x$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο R^2

από Θ. Green:

$$\oint_C y\,dx - x\,dy = \iint_u \left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= -2\iint_u dx\,dy = -2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dy\,dx = -8$$

② Εμβαδόν δίσκου D ακτίνας R

$$A = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx$$

∂D: κύκλος ακτίνας R, κέντρου $(0,0)$

$(R\cos t, R\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$

άρα $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2\,dt =$

$$= \frac{R^2}{2}\left[t\right]_0^{2\pi} = \frac{\cancel{2}\pi R^2}{\cancel{2}} = \pi R^2$$

(3) α) $P(x,y) = xy^2$, $Q(x,y) = -yx^2$

$D: x^2+y^2 \le R^2$

$C: x^2+y^2 = R^2$

P, Q έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^2$

Από Θ. Green

$$\int_C y^2x\,dx - x^2y\,dy = \iint_D \frac{\partial(-yx^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2)}{\partial y}\,dxdy =$$

$$= \iint_D -2xy - 2xy\,dxdy = -4\iint_D xy\,dxdy$$

πολικές

$$= -4\int_0^{2\pi}\int_0^R r\cdot R^2\cos\theta\sin\theta\,dr\,d\theta =$$

$$= -4R^2\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\cos\theta\sin\theta\right]_0^R d\theta = -4R^4\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta =$$

$= 0$ (κατά παράγοντες)

~~β) P(x,y) = e^x, Q(x,y) = y~~

Για το $\int_C y^2x\,dx - x^2y\,dy$ έχω

$r(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

Άρα $$\oint_C y^2x\,dx - x^2y\,dy = \int_0^{2\pi} -R^2\sin^2t\,R\cos t\cdot R\sin t - R^2\cos^2t\cdot R\sin t\cdot R\cos t$$

$$= R^4\int_0^{2\pi} -\sin^3t\cos t - \cos^3t\sin t\,dt =$$

$$= -R^4 \int_0^{2\pi} \sin t \cos t \,(\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 0.$$

(5) Εμβαδόν χωρίου που περικλείει αναλογα σε τόξο κυκλοειδούς $x = \alpha(\theta - \sin\theta)$

(προσανατολισμός) $y = \alpha(1 - \cos\theta)$, $\alpha > 0$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$$A = -\left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \alpha(\theta - \sin\theta) \cdot \alpha \cdot \sin\theta - \alpha(1-\cos\theta)\,\alpha(1-\cos\theta)\, d\theta\right) =$$

$$= -\frac{\alpha^2}{2} \int_0^{2\pi} \theta \sin\theta - \sin^2\theta - 1 + \cos\theta + \cos\theta - \cos^2\theta \, d\theta =$$

$$= -\frac{\alpha^2}{2} \int_0^{2\pi} \theta \sin\theta - 2 + 2\cos\theta \, d\theta =$$

$$= -\frac{\alpha^2}{2} \Big[-2\sin\theta - 2\theta\Big]_0^{2\pi} + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^{2\pi} \theta \sin\theta \, d\theta$$

$$= -\left(-2\pi\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Big[-\theta\cos\theta\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} -\cos\theta \, d\theta\right) =$$

$$= -\left(-2\pi\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}(-2\pi) + \Big[-\sin\theta\Big]_0^{2\pi}\right) =$$

$$= -(-3\pi\alpha^2) = 3\pi\alpha^2$$

(7) $\int_C (2x^3-y^3)dx + (x^3+y^3)dy$

C κυκλος ακτινας ... Επαληθευστε το Θ. green

$r(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$\int_0^{2\pi} -(2\cos^3 t - \sin^3 t)\sin t + (\cos^3 t + \sin^3 t)\cos t \; dt =$

$= \int_0^{2\pi} \sin^4 t - 2\cos^3 t \sin t + \cos^4 t + \sin^3 t \cos t \; dt =$

$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 - 2\cos^3 t \sin t + \sin^3 t \cos t + \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt$

$= \int_0^{2\pi} \frac{1-2\cos 2t+\cos^2 2t + 1+2\cos 2t+\cos^2 2t}{4} - 2\cos^3 t \sin t + \sin^3 t \cos t \; dt$

$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\left(2+2\cos^2 2t\right) dt - \left[\frac{2\cos^4 t}{4} + \frac{\sin^4 t}{4}\right]_0^{2\pi} =$

$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} 2 + \cos 4t + 1 \; dt - \left(\cancel{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}\right) =$

$= \frac{1}{4}\left[2t + \frac{\sin 4t}{4} + t\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}$

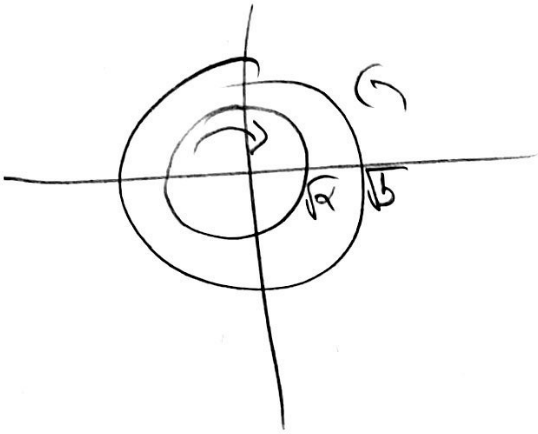
Θ. green

$\iint_D \frac{\partial (x^3+y^3)}{\partial x} - \frac{\partial (2x^3-y^3)}{\partial y} \; dx\,dy =$

$= \iint_D 3x^2 + 3y^2 \; dx\,dy \xrightarrow{\text{πολικές}} 3\int_0^1\int_0^{2\pi} r^3 \, d\theta\, dr =$

$= 3\int_0^1 2\pi r^3 \, dr = 6\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{2}$

9) Επαλήθευση το Θ. Green για την συνάρτηση με $P = 2x^3 - y^3$, $Q = x^3 + y^3$ και στο χωρίο D $\quad a \le x^2 + y^2 \le b$



Ονομάζω C_1 τον κύκλο με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $\sqrt{b}$ (θετική φορά) και C_2 —//— $(0,0)$ —//— $\sqrt{a}$ (αρνητική φορά).

$$\iint_D \left(\frac{\partial (x^3+y^3)}{\partial x} - \frac{\partial (2x^3 - y^3)}{\partial y} \right) dx\,dy =$$

$$= \underbrace{\oint_{C_1} (2x^3 - y^3)dx + (x^3+y^3)\,dy}_{I_1} + \underbrace{\oint_{C_2} (2x^3 - y^3)dx + (x^3+y^3)\,dy}_{I_2}$$

I_1: $\quad x = \sqrt{b}\cos t$, $t \in [0, 2\pi]$
$\quad\quad y = \sqrt{b}\sin t$

$$\int_0^{2\pi} -\sqrt{b}\sin t \left(2b\sqrt{b}\cos^3 t - b\sqrt{b}\sin^3 t\right) + \left(b\sqrt{b}(\cos^3 t + \sin^3 t)\right)\sqrt{b}\cos t\,dt$$

$$= b^2 \int_0^{2\pi} -\sin t\left(2\cos^3 t - \sin^3 t\right) + \left(\cos^3 t + \sin^3 t\right)\cos t\,dt$$

$$= b^2 \int_0^{2\pi} -2\cos^3 t \sin t + \sin^4 t + \cos^4 t + \sin^3 t \cos t\,dt$$

$$= b^2 \int_0^{2\pi} -2\cos^3 t \sin t + \sin^3 t \cos t + \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt =$$

$$= b^2 \int_0^{2\pi} -2\cos^3 t \sin t + \sin^3 t \cos t + \frac{1}{4}\left(2 + 2\cos^2 2t\right) dt =$$

$$= b^2 \int_0^{2\pi} -2\cos^3 t \sin t + \sin^3 t \cos t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1+\cos 4t}{2}\right) dt =$$

$$= b^2 \left[\frac{2\cos^4 t}{4} \sin t + \frac{\sin^4 t}{4} + \frac{t}{2} + \frac{t + \frac{\sin 4t}{4}}{4} dt \right]_0^{2\pi}$$

$$= b^2 \left(\frac{2\pi}{2} + \frac{2\pi}{4}\right) = \frac{6\pi}{4} b^2 = \frac{3\pi}{2} b^2$$

$$I_2 = \frac{3\pi}{2} a^2$$

Άρα αυτό που ψάχνουμε

$$\text{άρα } I = \frac{3\pi}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial(x^3+y^3)}{\partial x} - \frac{\partial(2x^3-y^3)}{\partial y} \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_D 3x^2 + 3y^2 \; dx\,dy = 3 \iint_D x^2+y^2 \, dx\,dy$$

Θέτω $x = r\cos t$, $y = r\sin t$

Ιακωβιανή $= r$.

4α $\quad 3\iint_D x^2+y^2 \, dx\,dy = 3\int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} r^3 \, dr\, dt =$

$$= \frac{3\pi}{2}\left(b^2-a^2\right)$$

(11) α) Επαληθεύσετε το θεώρημα της απόκλισης για $F = x\,i + y\,j$ και $D: x^2+y^2 \leq 1$.

β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της καθετης συνιστώσας του $2xy\,i - y^2\,j$ πάνω στην έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

α) $\operatorname{div} F = 1 + 1 = 2.$

$$\iint_D 2\,dx\,dy \overset{\text{πολικές}}{=} 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 d\theta = 2\pi$$

$r(t) = (\cos t, \sin t)$

$$n = \frac{(\cos t, \sin t)}{\sqrt{1}} = (\cos t, \sin t)$$

$$F \cdot n = (\cos t, \sin t)\cdot(\cos t, \sin t) = 1$$

άρα $\displaystyle\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi$

β) $\operatorname{div} F = 2y - 2y = 0$

άρα είναι ίσο με μηδέν

από θ. απόκλισης

12

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

D : μοναδιαίος δίσκος.

Γιατί το Θ. Green αποτυγχάνει γι' αυτές τις P, Q;

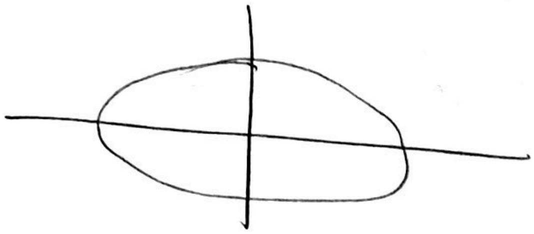
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{x^2+y^2 - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{-x^2-y^2+y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}\right\} \text{δεν είναι συνεχείς στο } (0,0)..$$

15) Εμβαδόν του εσωτερικού της έλλειψης

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Παραμέτρηση έλλειψης

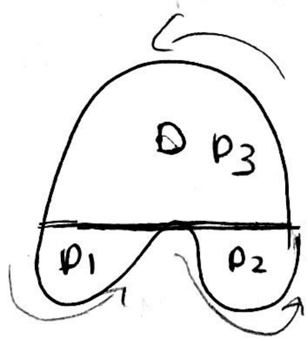
$c(t) = (a\cos t, b\sin t),\ t \in [0, 2\pi]$



$$A = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a\cos t \cdot b\cos t - b\sin t\, a(-\sin t)\, dt =$$

$$= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} 1\, dt = ab\pi$$

17)



$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$

Εφαρμόζω Θ. Green σε καθε ένα από τα D_1, D_2, D_3 και προσθέτω τα αποτελέσματα

(19) Χρησιμοποιώντας το Θ. Green βρείτε το εμβαδόν ενός φύλλου του τετράφυλλου τριφυλλιού

$r = 3\sin 2\theta$

(Υπόδειξη : $x\,dy - y\,dx = r^2 d\theta$)

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 9\sin^2(2\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4\theta}{2}\, d\theta = \frac{9}{4}\left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{9\pi}{8}$$

(30) Αποδείξτε $\int_D dx\,dy = \int_{D^*} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$

για έναν μετασχηματισμό $(u,v) \to (x(u,v), y(u,v))$

$$\iint_D dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx$$

$dx = x_u\,du + x_v\,dv$, $dy = y_u\,du + y_v\,dv$

$$\text{αρα} = \frac{1}{2}\int_{\partial D^*} \underbrace{(x x_u - y y_u)}_{P}\, du + (\underbrace{x\cdot x_v - y y_v}_{Q})\, dv =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{D^*} \left|\left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right)\right| du\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{D^*} \Big| \big(x_u x_v + x\cancel{x_{uv}} - y_u x_v - y\cancel{y_{vu}} - x_v x_u - x\cdot\cancel{x_{uv}} + y_v y_u + y\cancel{y_{uv}}$$

$$= \iint_{D^*} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$