$\boxed{8.2}$

③ $z = \sqrt{1-x^2-y^2}\ , \ z \geq 0.$

$F(x,y,z) = xi + yj + zk$

$I = \int_C x\,dx + y\,dy + z\,dz$

$C: r(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad t \in [0, \ ]$

$I = \int_0^{\ } -\cos t \sin t + \sin t \cos t \quad dt = 0$

$\nabla \times F = (0, 0, 0)$

لذا $\qquad \int_S \nabla \times F \, dS = 0.$

⑤ $S_1: \{(x,y,z) : x^2+y^2=1 \ , 0 \leq z \leq 1$

$S_2: \{(x,y,z): x^2+y^2+(z-1)^2 = 1, \quad z \geq 1$

$F = (zx + z^2y + x)i + (z^3yx + y)j + z^4x^2k$

$\int_S (\nabla \times F) \cdot dS$

Scanned with CamScanner

$$\nabla \times F = (3z^2yx,\ x+2zy-2xz^4,\ z^3y-z^2)$$

$$\int_S \nabla \times F \, dS = \int_C 3z^2yx\,dx + x+2zy-2xz^4\,dy + z^3y-z^2\,dz$$

Ο κύκλος $x^2+y^2=1$ είναι η κοινή συνοριακή καμπύλη των 2 επιφανειών

άρα $\int_S \nabla \times F \, dS = \int_{S_1} \nabla \times F \, dS + \int_{S_2} \nabla \times F \, dS =$

$= \int_C - \int_C = 0$ (λόγω προσανατολισμού καθώς διανύονται των επιφανειών)

(10) $S: \; x^2+y^2+2z^2=10$ (ελλειψοειδές)

$$\mathbf{F} = \sin xy \, i + e^x j - yz k$$

Η τομή της S με το xy επίπεδο

είναι ο κύκλος $C: x^2+y^2=10$.

Ο C χωρίζει την S σε S_1 (πάνω μέρος)

και S_2 (κάτω μέρος).

$$\iint_S \nabla\times F \, dS = \iint_{S_1} (\nabla\times F)\, dS + \iint_{S_2} (\nabla\times F)\, dS =$$

$$\overset{*}{=} \int_C F\cdot T\, ds - \int_C F\cdot T\, ds = 0.$$

* αν η τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα της S με κατεύθυνση προς την εξωτερική μεριά της C ως συνοριακής καμπύλης η φορά διαγραφής της C ως συν. της S_1 είναι θετική ενώ της στο xy-επίπεδο. καμπύλη της S_2 και αρνητική

$F = (x^2, 2xy + x, z)$ (23)

C : περιφέρεια $x^2 + y^2 = 1$

S : $x^2 + y^2 \leq 1$ [illegible] στο $z=0$.

α) $T:(x, y, 0)$

$T_x = (1, 0, 0)$, $T_y = (0, 1, 0)$

$T_x \times T_y = (0, 0, 1)$

$$\int_S F\, dS = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z\, dx\, dy \overset{z=0}{=} 0.$$

b) , $C:(\cos t, \sin t, 0)$ $t \in [0, 2\pi]$

κυκλοφορία: $\int_C F\, ds =$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t, 2\cos t \sin t + \cos t, 0)(-\sin t, \cos t, 0)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin t \cos^2 t + 2\cos^2 t \sin t + \cos^2 t\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t + \cos^2 t\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t + \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \left[-\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \pi$$

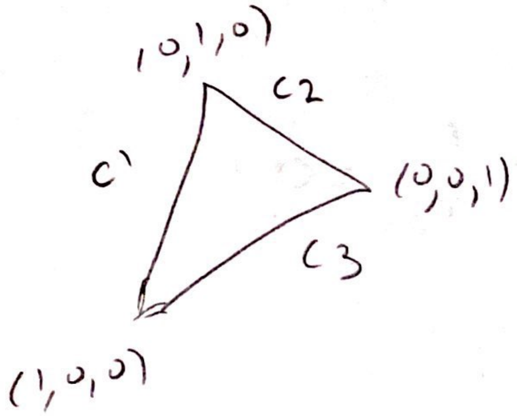
c) $\int_S \text{curl } F \, dS = \int_C F \cdot ds = \pi$

(6) $F = yz\,i + xz\,j + xy\,k$

S τρίγωνο με κορυφές $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ και $(0,0,1)$

$\nabla \times F = (0, 0, 0)$

άρα $\int_S \nabla \times F \, dS = 0.$



$\sigma = c_1 + c_2 + c_3$

$c_1: \; x(t) = (1-t), \quad t \in [0,1]$

$y(t) = t$

$z(t) = 0$

$\sigma_1(t) = (1-t, t, 0)$

$\int_{c_1} F \, ds = \int_0^1 (0, 0, t(1-t)) \cdot (-1, 1, 0) \, dt = 0$

C_2: $x(t)=0$

$y(t)=1-t$

$z(t)=t \qquad , t\in[0,1]$

$\sigma_2(t)=(0,1-t,t)$

$$\int_{C_2} F\,ds=\int_0^1 (t(1-t),0,0)\cdot(0,-1,1)\,dt=0$$

C_3: $x(t)=t$

$y(t)=0 \qquad , t\in[0,1]$

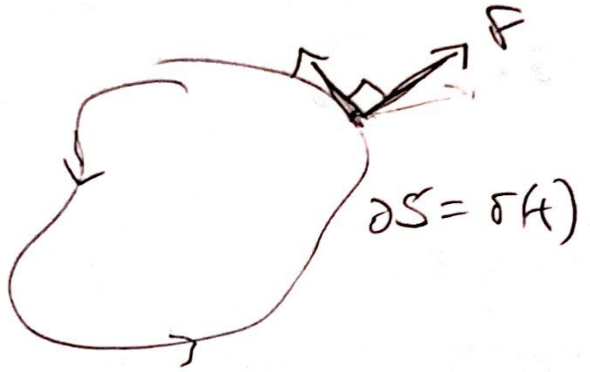
$z(t)=1-t$

$$\int_{C_3} (0,t(1-t),0)\,(1,0,-1)\,dt=0$$

Άρα $\displaystyle\int_\sigma F\,ds=\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}=0.$

1) Εστω S μια επιφάνεια και F ενα πεδιο καθετο στην επιφανεια του συνορος της S.

Δειξτε οτι $\int_S (\nabla \times F) \cdot dS = 0$



$$\int_S (\nabla \times F)\, dS = \int_{\partial S} F(r(t))\, r'(t)\, dS = 0$$

αφου $F \perp r'(t)$

(15) S_1, S_2 με ίδιο σύνορο ∂S.

Περιγράψτε τον προσανατολισμό που πρέπει να έχουν οι S_1 και S_2 για να ισχύει

$$\int_{S_1} \nabla \times F \, dS = \int_{S_2} \nabla \times F \, dS$$

Οι S_1 και S_2 σχηματίζουν μια κλειστή επιφάνεια S. Έστω C η κοινή συνοριακή καμπύλη.

Για να είναι η φορά διαγραφής της C ίδια και για τις δύο επιφάνειες πρέπει τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα της S_1 να κατευθύνονται προς το εξωτερικό του S και της S_2 προς το εσωτερικό.

16

$v = (v_1, v_2, v_3)$

$$v \times r = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= (v_2 z - v_3 y)\hat{i} + (v_3 x - v_1 z)\hat{j} + (v_1 y - v_2 x)\vec{k}$$

$$\equiv F$$

$$\int_{\partial S} (v \times r) \cdot ds = \int_{\partial S} F \cdot ds \overset{\text{Stokes}}{=} \iint_S \text{curl}\, F \cdot dS$$

$$\text{curl}\, F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ v_2 z - v_3 y & v_3 x - v_1 z & v_1 y - v_2 x \end{vmatrix} =$$

$$= (v_1 + v_1)\hat{i} + (v_2 + v_2)\hat{j} + (v_3 + v_3)\hat{k} =$$

$$= 2v$$