ΑΣΚΗΣΕΙΣ

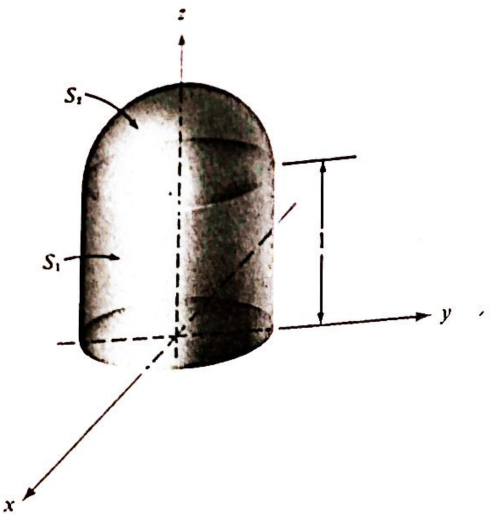
1. Επαναλάβετε την Άσκηση 5 της Παραγράφου 7.6, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes.

2. Επαναλάβετε την Άσκηση 6 της Παραγράφου 7.6, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes.

3. Επαληθεύστε το θεώρημα του Stokes για το άνω ημισφαίριο $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z \geq 0$, και το ακτινικό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

4. Έστω S μια επιφάνεια με σύνορο ∂S, και ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{E}$ είναι ένα ηλεκτρικό πεδίο κάθετο στο ∂S. Δείξτε ότι η επαγόμενη μαγνητική ροή διαμέσου της S είναι σταθερή σαν συνάρτηση του χρόνου. (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Χρησιμοποιήστε το νόμο του Faraday.)

5. Έστω S η κυλινδρική επιφάνεια με την οροφή που βλέπετε στο Σχήμα 8.2.8. Η S είναι ένωση δύο επιφανειών S_1 και S_2, όπου S_1 είναι το σύνολο των (x, y, z) με $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$, και S_2 είναι το σύνολο των (x, y, z) με $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, z \geq 1$. Θέτουμε $\mathbf{F}(x, y, z) =$



Σχήμα 8.2.8 Η κυλινδρική (με οροφή) επιφάνεια είναι η ένωση των S_1 και S_2.

$(zx+z^2y+x)\mathbf{i}+(z^3yx+y)\mathbf{j}+z^4x^2\mathbf{k}$. Υπολογίστε το $\int_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$. (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Το θεώρημα του Stokes ισχύει γι' αυτή την επιφάνεια.)

6. Έστω η $\boldsymbol{\sigma}$ που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα (1, 0, 0), (0, 1, 0) και (0, 0, 1) και έστω S το τρίγωνο με αυτές τις κορυφές. Επαληθεύστε απ' ευθείας το θεώρημα του Stokes με $\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$.

7. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int\int_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$, όπου S είναι το τμήμα της επιφάνειας της σφαίρας που ορίζεται από τις $x^2+y^2+z^2=1$ και $x+y+z\geq 1$ και $\mathbf{F}=\mathbf{r}\times(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.*

8. Δείξτε ότι οι υπολογισμοί στην Άσκηση 7 απλοποιούνται με την παρατήρηση ότι $\int_{\partial S}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{\partial\Sigma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ για κάθε άλλη επιφάνεια Σ με το ίδιο σύνορο. Επιλέγοντας την κατάλληλη Σ, το $\int_\Sigma(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$ είναι δυνατόν να υπολογιστεί πολύ εύκολα. Δείξτε ότι αυτό συμβαίνει αν πάρουμε σαν Σ το κομμάτι του επιπέδου $x+y+z=1$ στο εσωτερικό του κύκλου ∂S.

9. Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int\int_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$ όπου S είναι το ημισφαίριο $x^2+y^2+z^2=1, x\geq 0$ και $F=x^3\mathbf{i}-y^3\mathbf{j}$.

10. Βρείτε το $\int\int_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$ όπου S είναι το ελλειψοειδές $x^2+y^2+2z^2=10$ και $\mathbf{F}=(\sin xy)\mathbf{i}+e^x\mathbf{j}-yz\mathbf{k}$.

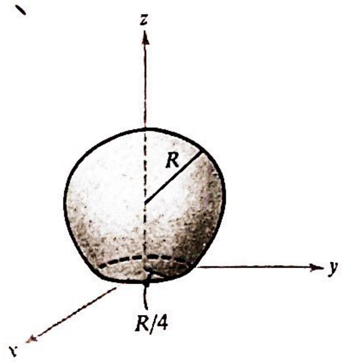
11. Έστω $\mathbf{F}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+zx^3y^2\mathbf{k}$. Υπολογίστε το $\int\int_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dA$, όπου S είναι η επιφάνεια $x^2+y^2+z^2=1, z\leq 0$.

12. Ένα μπαλόνι γεμάτο με θερμό αέριο έχει το κολοβό σφαιρικό σχήμα που βλέπετε στο Σχήμα 8.2.9. Το θερμό αέριο διαφεύγει μέσα από το πορώδες υλικό του μπαλονιού με διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων το

$$\mathbf{V}(x,y,z)=\nabla\times\mathbf{\Phi}(x,y,z)$$

όπου

$$\mathbf{\Phi}(x,y,z)=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$$



Σχήμα 8.2.9 Ένα μπαλόνι γεμάτο με θερμό αέρα.

Αν $R=5$, υπολογίστε το ρυθμό διαρροής (ως προς τον όγκο) του αερίου διαμέσου της επιφάνειας.

13. Αποδείξτε ότι από το νόμο του Faraday έπεται η $\nabla\times\mathbf{E}=-\partial\mathbf{H}/\partial t$.

14. Έστω S μια επιφάνεια και $\mathbf{F}$ ένα πεδίο κάθετο στην εφαπτομένη του συνόρου της S. Δείξτε ότι

$$\int_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}=0.$$

Ποιά είναι η φυσική σημασία αυτού του αποτελέσματος αν το $\mathbf{F}$ είναι ένα ηλεκτρικό πεδίο;

15. Θεωρούμε δύο επιφάνειες S_1, S_2 με το ίδιο σύνορο ∂S. Περιγράψτε με πρόχειρα σχήματα τον προσανατολισμό που πρέπει να έχουν οι S_1 και S_2 για να ισχύει ότι

$$\int_{S_1}(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}=\int_{S_2}(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}.$$

16. Για μια επιφάνεια S και ένα δοσμένο διάνυσμα $\mathbf{v}$, αποδείξτε ότι

* (Σ.τ.Ε.): Μπορεί να λυθεί με τρεις τουλάχιστον διαφορετικούς τρόπους.

$$2\int_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS = \int_{\partial S}(\mathbf{v}\times\mathbf{r})\cdot d\mathbf{s},$$

όπου $\mathbf{r}(x,y,z) = (x,y,z)$.

17. Αποδείξτε (χωρίς αυστηρότητα) ότι αν S είναι μια κλειστή επιφάνεια, τότε

$$\int_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S} = 0$$

(δείτε την Άσκηση 15). (*Κλειστή επιφάνεια* είναι αυτή που αποτελεί το σύνορο ενός χωρίου στον χώρο· έτσι, για παράδειγμα, μια σφαίρα είναι κλειστή επιφάνεια.)

18. Αν C είναι μια κλειστή καμπύλη που είναι το σύνορο μιας επιφάνειας S και οι f και g είναι δύο συναρτήσεις κλάσεως C^2, δείξτε ότι
(a) $\int_C f\nabla g\cdot d\mathbf{s} = \int_S(\nabla f\times\nabla g)\cdot d\mathbf{S}$
(b) $\int_C (f\nabla g + g\nabla f)\cdot d\mathbf{s} = 0$

19. (a) Αν C είναι μια κλειστή καμπύλη που είναι το σύνορο μιας επιφάνειας S και $\mathbf{v}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα, δείξτε ότι

$$\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} = 0.$$

(b) Δείξτε ότι αυτό ισχύει ακόμα κι αν η C δεν είναι το σύνορο κάποιας επιφάνειας S.

20. Δείξτε ότι η παραμετρικοποίηση $\mathbf{\Phi}$: $D\to\mathbf{R}^3, D = [0,\pi]\times[0,2\pi]$, $\mathbf{\Phi}(\phi,\theta) = (\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$ της μοναδιαίας σφαίρας απεικονίζει το σύνορο του D στο μισό ενός μέγιστου κύκλου της S.

21. Επαληθεύστε το Θεώρημα 6 για το ελικοειδές $\mathbf{\Phi}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$, $(r,\theta)\in[0,1]\times[0,\pi/2]$, και το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x,y,z) = (z,x,y)$.

22. Αποδείξτε το Θεώρημα 6.

23. Έστω $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + (2xy+x)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Έστω C η περιφέρεια $x^2+y^2 = 1$ και S ο δίσκος $x^2+y^2\le 1$ μέσα στο επίπεδο $z = 0$.
(a) Βρείτε τη ροή του $\mathbf{F}$ προς το εξωτερικό μέρος της S.
(b) Βρείτε την κυκλοφορία του $\mathbf{F}$ γύρω από την C.
(c) Βρείτε τη ροή του $\nabla\times\mathbf{F}$. Επαληθεύστε το θεώρημα του Stokes σ' αυτή την περίπτωση (με απ' ευθείας υπολογισμό).

***24.** Ο νόμος του Faraday συνδέει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (β' είδους) του ηλεκτρικού πεδίου πάνω σ' έναν βρόγχο C με το επιφανειακό ολοκλήρωμα του ρυθμού μεταβολής του μαγνητικού πεδίου σε μια επιφάνεια S με σύνορο C. Αν θεωρήσουμε την $\nabla\times\mathbf{E} = -\partial\mathbf{H}/\partial t$ σαν τη βασική εξίσωση, ο νόμος του Faraday είναι συνέπεια του θεωρήματος του Stokes, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 4.
Υποθέστε ότι δίνονται ένα ηλεκτρικό και ένα μαγνητικό πεδίο στον χώρο που ικανοποιούν την $\nabla\times\mathbf{E} = -\partial\mathbf{H}/\partial t$. Υποθέστε επίσης ότι C είναι το σύνορο της ταινίας του Möbius που είδαμε στα Σχήματα 7.6.3 και 7.6.4. Αφού η ταινία του Möbius δεν είναι προσανατολίσιμη, το θεώρημα του Stokes δεν εφαρμόζεται. Τί συμβαίνει με τον νόμο του Faraday; Μπορείτε να μαντέψετε με τί ισούται το $\int_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$;

25. Ολοκληρώστε το $\nabla\times\mathbf{F}, \mathbf{F} = (3y, -xz, -yz^2)$ πάνω στο κομμάτι της επιφάνειας $2z = x^2+y^2$ που βρίσκεται κάτω από το επίπεδο $z = 2$, και απ' ευθείας και με χρήση του θεωρήματος του Stokes.

8.3 Συντηρητικά Πεδία

Είδαμε στην Παράγραφο 7.2 ότι στην περίπτωση ενός πεδίου κλίσεων $\mathbf{F} = \nabla f$, τα επικαμπύλια ολοκληρώματα (β' είδους) του $\mathbf{F}$ υπολογίζονται ως εξής:

$$\int_{\boldsymbol\sigma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = f(\boldsymbol\sigma(b)) - f(\boldsymbol\sigma(a)).$$

Η τιμή του ολοκληρώματος εξαρτάται μόνο από τα άκρα $\boldsymbol\sigma(b)$ ...καμπύλης. Μ' άλλα λόγια, αν χρησιμοποιούσαμε μια