Ο τύπος για το curl **F** σε σφαιρικές συντεταγμένες αποδεικνύεται όμοια, με χρήση του τύπου (5) της Παραγράφου 8.2, δηλαδή της

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}(\mathrm{P})\cdot\mathbf{n}(\mathrm{P}) = \lim_{S\to \mathrm{P}} \frac{1}{A(S)}\int_{\partial S}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}.$$

Η απόδειξη των αντίστοιχων τύπων στις κυλινδρικές συντεταγμένες είναι ανάλογη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω S μια κλειστή επιφάνεια. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Gauss δείξτε ότι αν **F** είναι ένα C^2 διανυσματικό πεδίο, τότε $\int_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}=0$. (Κάντε τη σύγκριση με την Άσκηση 14 της Παραγράφου 8.2.)

2. Έστω $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$. Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα του **F** πάνω στη μοναδιαία σφαίρα.

3. Υπολογίστε το $\int_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, όπου $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ και Ω είναι ο μοναδιαίος κύβος (στο πρώτο ογδοημόριο). Κάντε απ' ευθείας υπολογισμό και επαλήθευση με τη βοήθεια του θεωρήματος απόκλισης.

4. Επαναλάβετε την Άσκηση 3 για τα

(a) $\mathbf{F}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$

5. Έστω $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$. Υπολογίστε το $\int_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ για κάθε ένα από τα ακόλουθα χωρία Ω:

(a) $x^2+y^2\le z\le 1$

(b) $x^2+y^2\le z\le 1$ και $x\ge 0$

(c) $x^2+y^2\le z\le 1$ και $x\le 0$

6. Επαναλάβετε την Άσκηση 5 για το $\mathbf{F}=(x-y)\mathbf{i}+(y-z)\mathbf{j}+(z-x)\mathbf{k}$.

7. Έστω S η επιφάνεια του χωρίου Ω. Δείξτε ότι

$$\int_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,dS = 3\,\text{φορές ο όγκος}\,(\Omega).$$

Προσπαθήστε να εξηγήσετε την ισότητα γεωμετρικά. (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Υποθέστε ότι $(0,0,0)\in\Omega$ και θεωρήστε τον λοξό κώνο με κορυφή το $(0,0,0)$, βάση ΔS και ύψος $\|\mathbf{r}\|$. Ο όγκος του είναι $\frac{1}{3}(\Delta S)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})$.)

8. Υπολογίστε το $\int_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, όπου $\mathbf{F}=3xy^2\mathbf{i}+3x^2y\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$ και S είναι η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας.

9. Υπολογίστε το $\int\int_{\partial W}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA$, όπου $\mathbf{F}(x,y,z)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}-z\mathbf{k}$ και W είναι ο μοναδιαίος κύβος στο πρώτο ογδοημόριο. Κάνετε απ' ευθείας υπολογισμό και επαληθεύστε χρησιμοποιώντας το θεώρημα της απόκλισης.

10. Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_{\partial S}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA$, όπου $\mathbf{F}(x,y,z)=\mathbf{i}+\mathbf{j}+z(x^2+y^2)^2\mathbf{k}$ και ∂S είναι η επιφάνεια του κυλίνδρου $x^2+y^2\le 1, 0\le z\le 1$.

11. Αποδείξτε ότι

$$\iiint_W (\nabla f)\cdot\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial W} f\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS - \iiint_W f\nabla\cdot\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz.$$

12. Αποδείξτε την ταυτότητα

$$\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=\mathbf{G}\cdot(\nabla\times\mathbf{F})-\mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G}).$$

***13.** Δείξτε ότι $\int_\Omega(1/r^2)\,dx\,dy\,dz=\int_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}/r^2)\,dS$ όπου $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.

14. Σταθεροποιούμε κάποια διανύσματα $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in\mathbf{R}^3$ και αριθμούς (φορτία) $q_1,\dots,q_k$. Ορίζουμε την $\phi(x,y,z)=\sum_{i=1}^k q_i/(4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{v}_i\|)$, όπου $\mathbf{r}=(x,y,z)$. Δείξτε ότι για μια κλειστή επιφάνεια S και $\mathbf{E}=-\nabla\phi$,

$$\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=Q,$$

όπου Q είναι το συνολικό φορτίο μέσα στην S. (Υποθέτουμε ότι ο νόμος του Gauss από το

Θεώρημα 10 εφαρμόζεται και ότι κανένα από τα φορτία δεν ανήκει στην S.)

15. Αποδείξτε τις *ταυτότητες του Green*

$$\int_{\partial\Omega} f\nabla g \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV$$

και

$$\int_{\partial\Omega} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dV.$$

16. Υποθέτουμε ότι το $\mathbf{F}$ ικανοποιεί τις $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ και $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Δείξτε ότι μπορούμε να γράψουμε $\mathbf{F} = \nabla f$, όπου $\nabla^2 f = 0$.

*17. Έστω ρ μια συνεχής συνάρτηση στον $\mathbf{R}^3$ τέτοια ώστε $\rho(\mathbf{q}) = 0$ εκτός από τα $\mathbf{q}$ σε κάποιο χωρίο Ω. Τα $\mathbf{q} \in \Omega$ συμβολίζονται με $\mathbf{q} = (x, y, z)$. Το *δυναμικό* της ρ είναι η συνάρτηση

$$\phi(\mathbf{p}) = \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{q})}{4\pi \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|} dV(\mathbf{q}),$$

όπου $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$ είναι η απόσταση των $\mathbf{p}$ και $\mathbf{q}$.

(a) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Θεωρήματος 10, δείξτε ότι $\int_{\partial W} \nabla\phi \cdot \mathbf{n} dS = -\int_W \rho dV$ για όλα τα χωρία W που διασπώνται σε πεπερασμένη ένωση χωρίων τύπου IV.

(b) Δείξτε ότι η ϕ ικανοποιεί την *εξίσωση του Poisson*

$$\nabla^2 \phi = -\rho.$$

(ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Χρησιμοποιήστε το μέρος (a)). (Παρατηρήστε ότι αν η ρ είναι κάποια πυκνότητα φορτίου, τότε το ολοκλήρωμα που ορίζει την ϕ είναι το άθροισμα των δυναμικών στο $\mathbf{p}$ που προκαλούνται από σημειακά φορτία κατανεμημένα πάνω στο Ω σύμφωνα με την πυκνότητα ρ.)

18. Υποθέτουμε ότι το $\mathbf{F}$ εφάπτεται στην κλειστή επιφάνεια S ενός χωρίου Ω. Αποδείξτε ότι

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{F}) dV = 0.$$

*19. Χρησιμοποιήστε το νόμο του Gauss και τη συμμετρία για να αποδείξετε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται σε ένα φορτίο Q άρτια κατανεμημένο πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας είναι το ίδιο έξω από την επιφάνεια με το πεδίο που οφείλεται σε ένα σημειακό φορτίο Q τοποθετημένο στο κέντρο της σφαίρας. Ποιό είναι το πεδίο στο εσωτερικό της σφαίρας;

*20. Επαναδιατυπώστε την Άσκηση 19 στην ορολογία των πεδίων βαρύτητας.

21. Δείξτε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Gauss για να λύσουμε το μέρος (b) της Άσκησης 25 στην Παράγραφο 8.3.

*22. (Θεώρημα της Μεταφοράς.) Έστω $\phi(\mathbf{x}, t)$ η ροή του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$ στον $\mathbf{R}^3$ (δείτε την Παράγραφο 3.4), και έστω $J(\mathbf{x}, t)$ η Ιακωβιανή της απεικόνισης $\phi_t : \mathbf{x} \to \phi(\mathbf{x}, t)$ για t σταθερό.

(a) Χρησιμοποιώντας την απόδειξη του Θεωρήματος 3, της Παραγράφου 3.4, δείξτε ότι

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\mathbf{x}, t) = [\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x})] J(\mathbf{x}, t).$$

(b) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα της Αλλαγής Μεταβλητών και το μέρος (a), δείξτε ότι αν $f(x, y, z, t)$ είναι δεδομένη συνάρτηση και $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ οποιοδήποτε χωρίο, τότε

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} f(x, y, z, t) dx dy dz = \iiint_{\Omega_t} \left(\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \mathbf{F} \right) dx dy dz \quad \text{(εξίσωση της μεταφοράς)}$$

όπου $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$, το οποίο είναι το χωρίο κινούμενο μαζί με τη ροή, και $Df/Dt = \partial f/\partial t + \mathbf{D}_{\mathbf{x}} f \cdot \mathbf{F}$ είναι η υλική παράγωγος (όπως ορίσθηκε στην Άσκηση 9, Παράγραφος 3.3).

(c) Παίρνοντας $f = 1$ στο μέρος (b) δείξτε ότι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(i) $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$

(ii) όγκος(Ω_t) =όγκος(Ω)

(iii) $J(\mathbf{x}, t) = 1$

*23. Έστω $\phi, J, \mathbf{F}, f$ όπως ορίσθηκαν στην Άσκηση 22. Αποδείξτε την διανυσματική μορφή του θεωρήματος της μεταφοράς, δηλαδή,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} (f\mathbf{F}) dx dy dz = \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial t}(f\mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla(f\mathbf{F}) + (f\mathbf{F}) \operatorname{div} \mathbf{F} \right] dx dy dz,$$

όπου με $\mathbf{F} \cdot \nabla(f\mathbf{F})$ συμβολίζουμε τον 3×3 πίνακα-παράγωγο $\mathbf{D}(f\mathbf{F})$ που δρα στο διάνυσμα-στήλη $\mathbf{F}$. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, $\mathbf{F} \cdot \nabla\mathbf{G}$ είναι το διάνυσμα του οποίου η i-οστή συντεταγμένη είναι το

$$\sum_{j=1}^{3} F_j \frac{\partial G^i}{\partial x_j}$$

(όπου αντί του (x, y, z) γράψαμε (x_1, x_2, x_3)).

8.5 Εφαρμογές στη Φυσική και στις Διαφορικές Εξισώσεις

ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΗ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τις έννοιες που μελετήσαμε σ' αυτό το κεφάλαιο, στην επεξεργασία κάποιων φυσικών θεωριών. Ας συζητήσουμε πρώτα μια σημαντική εξίσωση, γνωστή σαν *εξίσωση της διατήρησης*. Για τα ρευστά εκφράζει τη διατήρηση της μάζας. και για την ηλεκτρομαγνητική θεωρία, τη διατήρηση του φορτίου. Θα εφαρμόσουμε αυτή την εξίσωση στη θερμική αγωγιμότητα και τον ηλεκτρομαγ...