

Γ11 ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ
1Η ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΡΤΙΟΥ
09/03/13

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. ΘΕΩΡΙΑ

1. Διατυπώστε το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης στο \mathbb{R}^n . Με τη βοήθεια αυτού, διατυπώστε και αποδείξτε το αντίστοιχο θεώρημα στις πολλαπλότητες.
2. Κατασκευάστε τον τυπικό C^∞ άτλαντα του πραγματικού προβολικού χώρου.
3. Δείξτε ότι κάθε διακριτή υποομάδα Γ μίας ομάδας Lie G δρα ελεύθερα και γνησίως ασυνεχώς στη G με αριστερές μεταφορές. Δικαιολογήστε γιατί η G/Γ είναι λεία πολλαπλότητα.
4. Αποδείξτε ότι μία ομαλή υποπολλαπλότητα είναι πολλαπλότητα.
5. Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα ομαλού συνόλου στάθμης.

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1.

- (1) Δώστε δύο μη C^∞ συμβατές, αλλά αμφιδιαφορικές δομές στο \mathbb{R} .
- (2) Δώστε δομή διδιάστατης λείας πολλαπλότητας στο \mathbb{R}^3 .

2. Περιγράψτε αναλυτικά τον άτλαντα της μοναδιαίας σφαίρας S^n που προκύπτει από την στερεογραφική προβολή. Δείξτε κατόπιν ότι η αντιποδική απεικόνιση $x \mapsto -x$ είναι αμφιδιαφόριση.

3. Δείξτε ότι ο πραγματικός προβολικός χώρος είναι συμπαγής πολλαπλότητα.

4. Έστω η ορθογώνια ομάδα $O(2)$ των στροφών του \mathbb{R}^2 . Για κάθε $A \in O(2)$ ορίζουμε τις απεικονίσεις $F_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{x} \mapsto \vec{y} = A\vec{x}$, $\vec{x} = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{y} = (y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2$.

- (1) Βρείτε την $(F_A)_*$ και γράψτε αναλυτικά τα $(F_A)_*(\partial/\partial x^1)$ και $(F_A)_*(\partial/\partial x^2)$ στους χάρτες (x^1, x^2) και (y^1, y^2) .
- (2) Δείξτε ότι η F_A είναι αμφιδιαφόριση για κάθε A και ότι το σύνολο

$$\text{Diff} = \{F_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid A \in O(2)\}$$

είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων. Δικαιολογήστε με ένα πειστικό επιχειρήμα γιατί η Diff είναι ομάδα Lie.

5. Βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο της τομής της σφαίρας $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$ και του κυλίνδρου $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$ που δέχεται δομή ομαλής υποπολλαπλότητας. Είναι το σύνολο αυτό συνεκτικό;