Εργαστήριο 3 3.2.1

① Αποδείξτε ότι κάθε ισομετρία μετρικού χώρου είναι 1-1 απεικόνιση

(X,d) : $f: X \to X$ επί με
$d(f(x), f(y)) = d(x,y) \quad \forall x,y \in X$

1-1 : Έστω $f(x) = f(y) \Rightarrow d(f(x), f(y)) = 0$ (d μετρική)
$\Rightarrow d(x,y) = 0$ (f ισομετρία) $\Rightarrow x = y$
d μετρική

Ισχύει ότι είναι και συνεχής σε κάθε $x_0 \in X$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon > 0 : \forall x$ με $d(x, x_0) \le \delta = \varepsilon$
$\Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

Επίσης ότι και η αντίστροφη είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in X$

Έχουμε λοιπόν ότι f ισομετρία $\Rightarrow$ f ομοιομορφισμός του (X,d)

② Αποδείξτε ότι το σύνολο ισομετριών ενός μετρικού (X,d) είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων

f^{-1} ισομετρία : Θέτω $f(x) = y$, $f(x') = y'$
$\Rightarrow x = f^{-1}(y)$, $x' = f^{-1}(y')$

Τότε $d(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) = d(x, x') = d(f(x), f(x')) =$
$= d(y, y')$

③ Δείξε ότι η (ήδη γνωστή) ανάκλαση σε (οποιοδήποτε) υπερεπίπεδο

$$W_{A,b} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot A = b,\ |A| = 1,\ b \in \mathbb{R} \}$$

Δίνεται από την

$$r_W(x) = x + 2(b - (x \cdot A))A, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Η προβολή ενός x στο $W_{A,b}$ είναι

$$pr(x) = x + (b - x \cdot A) \cdot A$$

$$pr(x) \cdot A = (x \cdot A) + (b - x \cdot A)|A|^2 =$$
$$= (x \cdot A) + b - (x \cdot A) = b \Rightarrow pr(x) \in W_{A,b}$$

Επίσης $pr(pr(x)) = pr(x) + (b - (pr(x)) \cdot A)A =$
$$= x + (b - x \cdot A)A + (b - b)A = pr(x)$$

Η απόσταση του x από την $pr(x)$: $\|x - pr(x)\| =$
$$= |b - (x \cdot A)|$$

Παίρνουμε την ευθεία που ενώνει τα x, $pr(x)$

$$c(t) = (1-t)x + t\,pr(x) =$$
$$= x - tx + tx + t(b - x \cdot A)A =$$
$$= x + t(b - x \cdot A)A$$

Θέλουμε το σημείο της ευθείας $c(t_0)$ με
$$\|x - c(t_0)\| = 2|b - (x \cdot A)|$$
$$\Rightarrow t = \pm 2$$

Για $t=-2$ έχουμε ότι αν $(x\cdot A)-b>0$ ως

$$(x-2(b-(x\cdot A))A)\cdot A-b=(x\cdot A)-2b+2(x\cdot A)-b=$$
$$=3((x\cdot A)-b)>0$$

άρα ανήκουν στον ίδιο ημιχώρο

Τελικά $t=\pm 2$

3.2.3.

(1) Αποδείξτε ότι:

α) Η σύνθεση 2 ανακλάσεων (εκ των οποίων η μία είναι αναγκαστικά μη γνήσια) σε παράλληλα υπερεπίπεδα είναι μεταφορά.

β) Η σύνθεση μεταφοράς και ανάκλασης είναι ίση με τη σύνθεση μη γνήσιας ανάκλασης με τη μεταφορά.

α) $R(x)=x+2(b-(x\cdot A))A$

$R'(x)=x+2(b'-(x\cdot A))A$

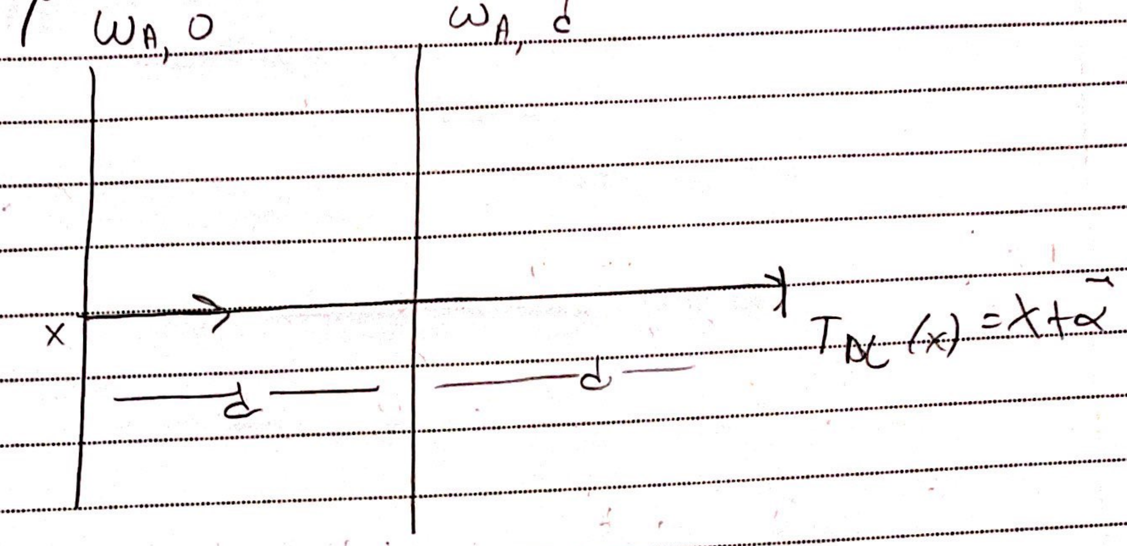
$$R'(R(x))=R(x)+2(b'-(R(x)\cdot A))A=$$
$$R'(R(x))=R(x)+2(b'-2b+(x\cdot A))A=$$
$$\Rightarrow R'(R(x))=R(x)+2b'A-4b\cdot A+2(x\cdot A)\cdot A=$$
$$=x+2b\cdot A-2(x\cdot A)\cdot A+$$
$$=x+C \quad \text{μεταφορά}$$

β) $T_A(x)=x+c$

$R(x)=x-2(x\cdot A)A$

$$T_\alpha(R(x))=x+\alpha-2(x\cdot A)A=$$
$$=x+\alpha-2[(x+\alpha-\alpha)\cdot A]A=$$
$$=x+\alpha+2(\alpha A-(x+A)\cdot A))A=R'(T_\alpha(x))$$

(2) Δείξε ότι κάθε στοιχείο της $T(n)$ γράφεται ως σύνθεση 2 ανακλάσεων σε παράλληλα υπερεπίπεδα



$$r_1(x) = x - 2(x \cdot A) \cdot A$$
$$r_2(x) = x + 2(d - (x \cdot A))A$$

$$r_2(r_1(x)) = r_1(x) + 2(d - (r_1(x) \cdot A))A =^{*}$$

$$r_1(x) \cdot A = (x \cdot A) - 2(x \cdot A) = -(x \cdot A)$$

άρα
$$*) = x - 2(x \cdot A) \cdot A + 2(d + (x \cdot A))A =$$
$$= x - 2(x \cdot A) \cdot A + 2d \cdot A + 2(x \cdot A) \cdot A =$$
$$= x + 2dA = x + \|\alpha\| \cdot \frac{\alpha}{\|\alpha\|} = x + \alpha$$

3.2.5

(1) Αποδείξτε ότι κάθε στοιχείο του $SO(2)$ είναι γινόμενο 2 ανακλάσεων και ότι η σύνθεση 2 ανακλ. είναι περιστροφή

κατά $2(\theta_1-\theta_2)$

Η ευθεία $y=\tan\theta\, x=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}x$

$\Rightarrow \sin\theta\, x-\cos\theta\, y=0$

$A=(\sin\theta,-\cos\theta)$

Η ανάκλαση

$R_\theta(x,y)=(x,y)-2[(x,y)\cdot(\sin\theta,-\cos\theta)](\sin\theta,-\cos\theta)=$

$=(x,y)-2(x\sin\theta-y\cos\theta)(\sin\theta,-\cos\theta)=$

$=(x,y)-2(x\sin^2\theta-y\sin\theta\cos\theta,-x\sin\theta\cos\theta+y\cos^2\theta)=$

$=(x,y)-2(x\sin^2\theta-y\sin\theta\cos\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta x+(1-2\cos^2\theta)y)=$

$=((1-2\sin^2\theta)x+2\sin\theta\cos\theta y,\ 2\sin\theta\cos\theta x-\cos(2\theta)y)$

$=(\cos 2\theta x+\sin 2\theta y,\ \sin(2\theta)x-\cos(2\theta)y)$

$$R_{\theta_1}\cdot R_{\theta_2}=\begin{pmatrix}\cos(2\theta_1) & \sin(2\theta_1)\\ \sin(2\theta_1) & -\cos(2\theta_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(2\theta_2) & \sin(2\theta_2)\\ \sin(2\theta_2) & -\cos(2\theta_2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos 2(\theta_1-\theta_2) & -\sin 2(\theta_1-\theta_2)\\ \sin 2(\theta_1-\theta_2) & \cos(2\theta_1-\theta_2)\end{pmatrix}$$ περιστροφή

Αν $\alpha\varphi\in SO(2)$ επιλέγω τις κατάλληλες ανακλάσεις

γράψε $\varphi=2(\theta_1-\theta_2)$ για κατάλληλα θ_1,θ_2

③ Αποδείξτε ότι για κάθε ανάκλαση του σε υπερεπίπεδο $W = W_A$ υπάρχει ορθοκανονική βάση στην οποία ο πίνακας της του είναι διαγώνιος τ.ω. τα στοιχεία της διαγωνίου να είναι όλα 1, εκτός από 1 που είναι −1.

Ιδιοτιμές 1, −1

Ιδιοχώρος της 1 είναι ο W_A

$\mathbb{R}^n = \{A\} \oplus \{A\}^\perp$ ορθ. βάση του W_A

3.2.9

① Αποδείξτε πως για κάθε ισομετρία $f \in \mathcal{E}(n)$ υπάρχει ισομετρία $\tilde{f} \in \mathcal{E}(n+1)$ τ.ω. $\tilde{f}_{\mathbb{R}^n} = f$

$\tilde{x}_{n-1} = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $\bar{x} = (\tilde{x}_{n-1}, x_n)$

$\bar{y}_{n-1} = (y_1, \dots, y_{n-1})$, $\bar{y} = (\bar{y}_{n-1}, y_n)$

$\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\|^2 =$

$= \|(f(\tilde{x}_{n-1}), x_n) - (f(\tilde{x}_{n-1}), x_n)\|^2 =$

$= \|(f(\tilde{x}_{n-1}), x_n)\|^2 + \|(f(\tilde{y}_{n-1}), y_n)\|^2$
$- 2(f(\tilde{x}_{n-1}), x_n)(f(\tilde{y}_{n-1}), y_n) =$

$= \|f(\hat{x}_{n-1})\|^2 + x_n^2 + \|f(\tilde{y}_{n-1})\|^2 + y_n^2$
$- 2 f(\tilde{x}_{n-1}) \cdot f(\hat{y}_{n-1}) - 2x_n y_n =$
$= \|\tilde{x}_{n-1}\|^2 + x_n^2 + \|\tilde{y}_{n-1}\|^2 + y_n^2 - 2\tilde{x}_n \tilde{y}_n - 2x_n y_n$

$= \|\bar{x} - \bar{y}\|^2$