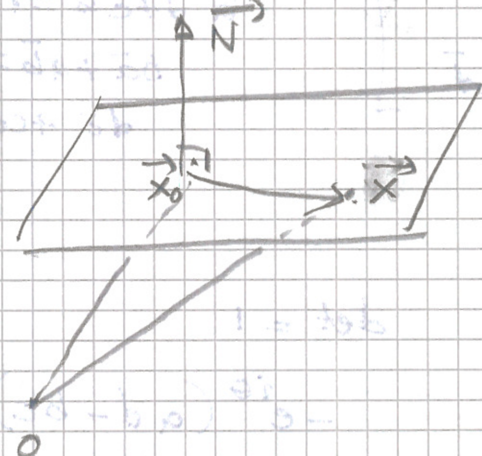
M1 11η ἑβδομάδα — Ι. Δ. Πλατής

Περὶ διανυσμάτων, μέρος Β

Εἴδαμε μέχρι τώρα τὶς παραμετρικὲς ἐξισώσεις τῶν ἐπιπέδων.
Ἐπικεντρωνόμαστε τώρα στὸν χῶρο $\mathbb{R}^3$, καὶ ἔστω ἕνα ἐπίπεδο μὲ κάθετο διάνυσμα $\vec{N} = (A, B, C)$.



$\vec{x} = (x, y, z)$

$\vec{x_0} = (x_0, y_0, z_0)$

Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ ἀρχὴ τοῦ $\vec{N}$ εἶναι σὲ ἕνα σημεῖο x_0 τοῦ ἐπιπέδου, δοθέν. Τότε, ἂν $\vec{x}$ τυχαῖο σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου,

$$\vec{N} \cdot (\vec{x} - \vec{x_0}) = 0$$

Ἰσοδύναμα

$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z) = 0$$

Δηλαδὴ

$$\boxed{Ax + By + Cz = D}, \quad \text{ὅπου } D = Ax_0 + By_0 + Cz_0.$$

Ἡ παραπάνω λέγεται καρτεσιανὴ ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου.

Π.χ. ἂν μᾶς δοθεῖ τὸ

$$3x - y + z = 1$$

ὥστε $\vec{N} = (3, -1, 1)$. Γιὰ τὸ

$$x + z = 0,$$

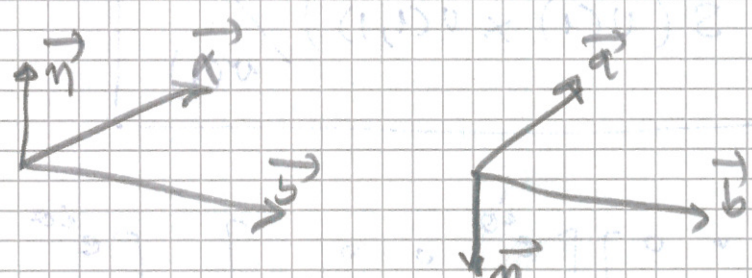
$\vec{N} = (1, 0, 1)$ κ.ο.κ.

Από την αρχή, δοθέντος ενός καθέτου διανύσματος $\vec{N}$ και ενός σημείου $\vec{x_0}$, μπορούμε να προσδιορίσουμε το επίπεδο που είναι κάθετο στο $\vec{N}$ και περνά από το $\vec{x_0}$. Για παράδειγμα, το επίπεδο που είναι κάθετο στο $(1,-4,2)$ και περνά από το $(0,0,1)$ είναι το

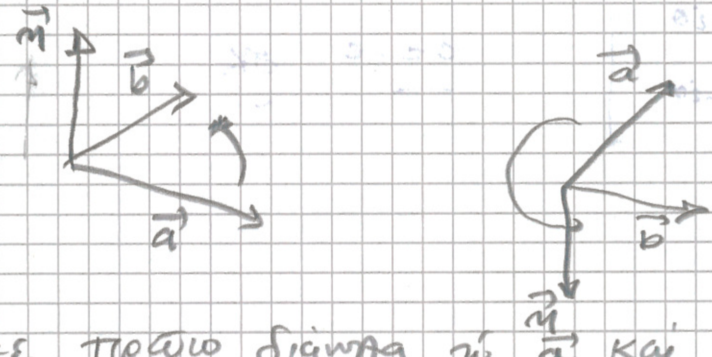
$$1\cdot x - 4y + 2\cdot z = 1\cdot 0 + (-4)\cdot 0 + 2\cdot 1$$

$$x - 4y + 2z = 2$$

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει τώρα, είναι το εξής: Δοθέντων $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ με $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$, να βρεθεί ~~μοναδικό~~ ένα κάθετο διάνυσμα στα $\vec{a}, \vec{b}$. Μπορούμε να αντιληφθούμε ότι υπάρχουν δύο τέτοια διανύσματα



άρα, με κάποιο τρόπο θα πρέπει να καθορίσουμε τη φορά του $\vec{n}$. Επιλέγουμε το $\vec{n}$ με τον εξής τρόπο:



αν θεωρούμε πρώτο διάνυσμα το $\vec{a}$ και μετά το $\vec{b}$.

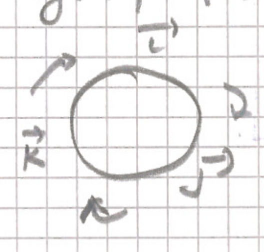
Μένει νά προσδιορίσουμε τό μέτρο τοῦ $\vec{\eta}$, τό ὁποῖο στό ἑξῆς θά καλοῦμε $\vec{a} \wedge \vec{b}$, τό ἐξωτερικό γινόμενο τῶν $\vec{\alpha}, \vec{b}$.

(Προσέξτε: ἔχει σημασία ποιό εἶναι τό πρῶτο διάνυσμα καί ποιό εἶναι τό δεύτερο!)

Ὑπάρχουν διάφοροι τρόποι νά προσδιορίσουμε τό $|\vec{a} \wedge \vec{b}|$, ἄρα καί τό $\vec{a} \wedge \vec{b}$. Θά ξεκινήσουμε ἀπό τά διανύσματα τῆς βάσης

$$\vec{\imath} = (1, 0, 0) \quad \vec{\jmath} = (0, 1, 0) \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

καί θά βρίσκουμε τά ἐξωτερικά τους γινόμενα ὡς ἑξῆς



$$\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \quad \vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath} \quad \vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$ (δεῖτε τό πιό πάνω "ρολόϊ"!)

Ἀλλά καί $\quad \vec{\imath} \wedge \vec{k} = -\vec{\jmath} \quad \vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = -\vec{k} \quad \vec{k} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$

Ἔχοντας τούς κανόνες αὐτούς δεδομένους, γράφουμε

$$\vec{a} = a_1 \vec{\imath} + a_2 \vec{\jmath} + a_3 \vec{k} \qquad \vec{b} = b_1 \vec{\imath} + b_2 \vec{\jmath} + b_3 \vec{k}$$

$$\vec{\alpha} \wedge \vec{b} = (\alpha_1 \vec{\imath} + a_2 \vec{\jmath} + a_3 \vec{k}) \wedge (b_1 \vec{\imath} + b_2 \vec{\jmath} + b_3 \vec{k})$$

$$= a_1 b_2 \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} + a_1 b_3 \vec{\imath} \wedge \vec{k}$$

$$+ a_2 b_1 \vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} + a_2 b_3 \vec{\jmath} \wedge \vec{k}$$

$$+ a_3 b_1 \vec{k} \wedge \vec{\imath} + a_3 b_2 \vec{k} \wedge \vec{\jmath} =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{k} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{j} =$$

= (σχηματική ορίζουσα)

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Με τον τρόπο αυτό, έχουμε π.χ.

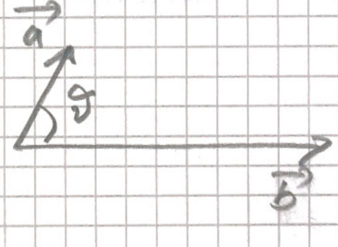
$\vec{a} = (1, 2, 0)$ $\quad \vec{b} = (0, -1, 3)$

$$\vec{\alpha} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = (6, -3, 1).$$

Επίσης, για κάθε $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$,

$$\vec{\alpha} \wedge \vec{\alpha} = \vec{0} \qquad \vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

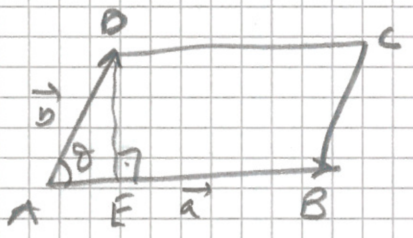
Το μόνο που μένει να υπολογίσουμε είναι το $|\vec{a} \wedge \vec{b}|$. Θυμηθείτε



$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Είναι τώρα, $\sin\theta = \dfrac{|\vec{a} \wedge \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

Δηλαδή, τό $|\vec{a} \wedge \vec{b}|$ εἶναι τό ἐμβαδόν τοῦ παραλληλογράμμου τῶν $\vec{a}, \vec{b}$. Πράγματι, τό ἐμβαδόν τοῦ ABCD εἶναι



$$(ABCD) = |\vec{a}| \cdot DE = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$$

<u>Παράδειγμα</u> Νά βρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου πού ὁρίζουν τά $\vec{\alpha} = (1,0,1)$ $\vec{b} = (0,-1,2)$ καί περνᾶ ἀπό τήν ἀρχή.

Ἔχουμε
$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = (1, -2, -1)$$

Ἄρα τό ἐπίπεδο εἶναι

$$1 \cdot x - 2 \cdot y - 1 \cdot z = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0$$

$$x - 2y - z = 0$$

<u>Παράδειγμα</u> Νά βρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου πού περνᾶ ἀπό τά σημεῖα $P_1 = (1,1,1)$ $P_2 = (1,2,1)$ $P_3 = (0,1,-1)$

Ἔστω $\vec{\alpha} = \overrightarrow{P_1P_2} = (0,1,0)$ $\vec{b} = \overrightarrow{P_1P_3} = (-1, 0 -2)$

$$\vec{\alpha} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2, 0, 1).$$

Ἄρα τό ζητούμενο ἐπίπεδο ἔχει ἐξίσωση

$$-2x - 2z = (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -1$$

δηλαδή $x + z = \frac{1}{2}$.

Τό τελευταίο γινόμενο διανυσμάτων πού θά μάς απασχολήσει είναι τό μικτό γινόμενο (στον $\mathbb{R}^3$)

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$$

Αν $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$

τότε

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

<u>Γεωμετρική σημασία</u> $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ είναι ο όγκος τού <u>Πρίσματος</u> των $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: