M1 : 2η ἑβδομάδα , Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

2. Διαφορικός Λογισμός

Ἡ Χημεία ἐνδιαφέρεται γιά τίς μεταβολές, ἄρα μᾶς χρειάζεται ἡ μέθοδος πού χαρίζει τόν ρυθμό μεταβολῆς μέ ποσοτικό τρόπο.

2.1 Ὅρια

Ἡ ἰδέα εἶναι ἁπλή, ὅσο καί δυσεξήγητη γιά τόν λογισμό. Ἄν πάρουμε τήν $y=x^2$ γιά τιμές τοῦ x κοντά στό 3 ἀλλά ὄχι 3.

x	2.9	2.95	2.99	2.999	3.001	3.01
y	8.41	8.70	8.94	8.994	9.006	9.06

βλέπουμε ὅτι καθώς τό x πλησιάζει τό 3 ($x\to3$) καί ἀπό τά ἀριστερά ($x\to3^-$) ἀλλά καί ἀπό τά δεξιά ($x\to3^+$) τότε τό y πλησιάζει τό 9 ὅσο ἐπιθυμοῦμε ($\lim_{x\to3^-}x^2=\lim_{x\to3^+}x^2=9=\lim_{x\to3}x^2$)

Στήν γενική περίπτωση γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

Σέ ἕνα πιό περίπλοκο παράδειγμα

$$y=\frac{x^2-1}{x-1}$$

βλέπουμε κατ' ἀρχάς ὅτι τό 1 δέν ἀνήκει στό πεδίο ὁρισμοῦ. Ἄρα $y(1)=\frac{1-1}{1-1}=\boxed{\frac{0}{0}}$ κάτι πού δέν προσδιορίζεται. Ὅμως ἐπειδή γιά $x\neq1$, $y=x+1$, τότε εὔκολα βλέπουμε ὅτι $\lim_{x\to1}f(x)=1+1=2$

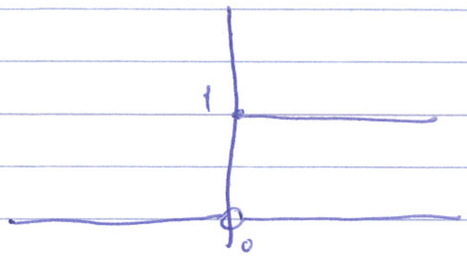
Γενικά, τό νά βροῦμε τό

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L$$

εἶναι εὔκολο εἴτε μέ ἀπευθείας ἀντικατάσταση (βάζοντας $x=x_0$) εἴτε, στήν περίπτωση πού κάτι τέτοιο μᾶς δίνει ἀπροσδιόριστη μορφή ὅπως $\boxed{\frac{0}{0}}$, νά ἄρουμε τήν ἀπροσδιοριστία χρησιμοποιώντας κάποιες ἁπλές ἀλγεβρικές πράξεις. Τί γίνεται ὅμως ὅταν καί πάλι δέν εἶναι δυνατόν ὅταν ἔχουμε ἕνα ὅριο ὅπως τό

$$\lim_{x\to1}\frac{\eta\mu x}{x}$$

Αποδεικνύεται ότι $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ χρησιμοποιώντας τις ανισότητες $\tan x \geq x \geq \sin x$ (όταν $x>0$). Μπορεί επίσης μία συνάρτηση να έχει όλες τις



$$f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

Βλέπουμε τότε ότι $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$

ενώ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1\neq 0$. Το όριο τότε

$\lim_{x\to 0} f(x)$ λέμε ότι δεν υπάρχει. Γενικά

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x)=L.$$

Όταν υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=M$, είναι

- $\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=L\pm M$
- $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=L\cdot M$
- $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}$ $\quad M\neq 0$
- $\lim_{x\to x_0} k f(x)=kL$ $\quad \forall k\in\mathbb{R}$

Τέλος, μερικές φορές μας παρουσιάζονται καταστάσεις όπως $\boxed{\frac{1}{0^-}}=-\infty$

$\boxed{\frac{1}{0^+}}=+\infty$. Το να γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ δεν σημαίνει ότι υπάρχει όριο, απλώς δείχνει μια ακατάσχετη αύξηση ή μείωση της f κοντά στο x_0

2.2 Συνέχεια

Στό προηγούμενό μας παράδειγμα $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ ἰσχύει ὅτι $\lim_{x\to 3} y(x) = y(3)$

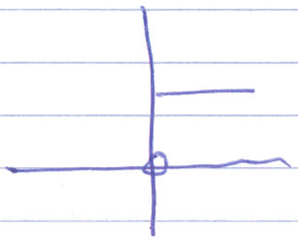
Λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση εἶναι συνεχής σέ x_0 ὅταν

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Προσοχή: τό x_0 πρέπει νά ἀνήκει στό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f. Ἐπίσης

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ ἄν κ' μόνο ἄν } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Ἡ συνέχεια μιᾶς f στό x_0 σημαίνει ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς f δέν παρουσιάζει τρῦπα ὅπως στό διπλανό σχῆμα.

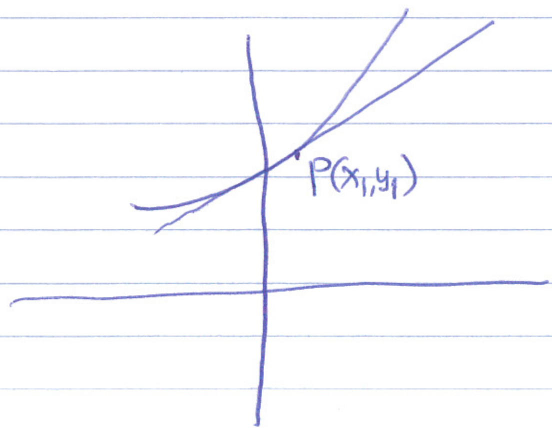


Μέ ἄλλα λόγια "κόβεται" στό $(x_0, f(x_0))$. Γενικά μία συνεχής συνάρτηση μπορεῖ νά σχεδιαστεῖ χωρίς νά χρειαστεῖ νά σηκώσουμε τό μολύβι ἀπό τό χαρτί. Σέ σημεῖα πού δέν ἀνήκουν στό πεδίο ὁρισμοῦ ἀλλά μπορεῖ νά ὁριστεῖ κάποιο πεδίο ὁρίου λέμε ὅτι ὑπάρχει ἐν γένει ἀσυνέχεια.

Οἱ συνεχεῖς συναρτήσεις ἔχουν τίς παρακάτω ἰδιότητες: ἄν f, g συνεχεῖς στό x_0, τότε καί οἱ $f \pm g$, λf, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ εἶναι συνεχεῖς στό x_0 - ἡ τελευταία μέ τήν προϋπόθεση $g(x_0) \neq 0$. Ὅλες οἱ συναρτήσεις πού ἔχουμε δεῖ εἶναι "σχεδόν" συνεχεῖς. Οἱ ἀσυνέχειές τους φαίνονται στό σχῆμα τους.

2.3 Παραγώγιση

Θυμηθεῖτε τήν κλίση μιᾶς εὐθείας: $\text{κλίση} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ὅπου (x_1, y_1)



καί (x_2, y_2) εἶναι ὁποιαδήποτε σημεῖα τῆς εὐθείας. Προφανῶς δέν μποροῦμε νά κάνουμε κάτι παρόμοιο σέ ὁποιαδήποτε καμπύλη. Μποροῦμε ὅμως σέ κάθε σημεῖο $P(x_1, y_1)$ νά φέρουμε τήν ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης στό P καί νά μετρήσουμε τήν κλίση της

Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι καθόλου σίγουρο ότι θά αποτελέσει μία ακριβή διαδικασία. Από αυτά παίρνουμε ένα σημείο Q τής καμπύλης $y=f(x)$ διαφορετικό από τό P καί έστω $Q(x_2, y_2)$. Τότε

$$\text{κλίση τού } PQ = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Εάν πάρουμε ένα άλλο σημείο $Q'(x_3, y_3)$ μεταξύ τών P καί Q ή κλίση τού PQ' θά είναι πιό κοντά στήν κλίση τής εφαπτομένης στό P. Καί καταλαβαίνουμε μέ αυτόν τόν τρόπο ότι παίρνουμε βέλτιστη προσέγγιση τής κλίσης τής εφαπτομένης όσο πιό κοντά στό P παίρνουμε τό Q. Πρός τούτο λοιπόν, παίρνουμε ένα h μικρό καί τό σημείο τής καμπύλης $(x_1+h, f(x_1+h))$. Τότε ή κλίση θά είναι

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \quad (\text{Πηλίκο Νεύτωνα})$$

καί ή βέλτιστη προσέγγιση παίρνεται αφήνοντας τό $h \to 0$:

$$\text{Κλίση στό } P = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

Ή κλίση τής καμπύλης $y=f(x)$ είναι ό ρυθμός μεταβολής τού y μέ τό x. Είναι μία προφανώς σημαντική ποσότητα καί λέγεται <u>Παράγωγος</u> τής y ώς πρός x. Υπάρχουν διάφοροι συμβολισμοί:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Εάν γιά κάποια συνάρτηση f υπάρχει ή $f'(x)$ τότε λέγεται παραγωγίσιμη στό x. Άν αυτό συμβαίνει γιά όλα τά x, τότε ή $f'(x)$ είναι συνάρτηση πού καλείται (πρώτη) παράγωγος τής f.

2.4 Κανόνες παραγώγισης

Αναφέρουμε παρακάτω ορισμένους κανόνες παραγώγισης πού θά μάς είναι χρήσιμοι σέ ότι θά ακολουθήσει.

2.4.1 Παράγωγοι δυνάμεων τού x

i) Ἂν $y = c$ σταθερά, τότε $\frac{dy}{dx} = 0$

ii) Ἂν $y = x$, τότε $\frac{dy}{dx} = 1$,

iii) Ἂν $y = x^2$, τότε $\frac{dy}{dx} = 2x$.

iv) Ἂν $y = x^3$, τότε $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, καί γενικότερα,

v) Ἂν $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}$. (Ὁ τύπος ἰσχύει καί γιά $n \in \mathbb{R}$!)

2.4.2 Παράγωγος ἀθροίσματος: Ἂν $f(x)$, $g(x)$ εἶναι παραγωγίσιμες τότε ἡ $y = f(x) + g(x)$ εἶναι παραγωγίσιμη καί

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

2.4.3. Παράγωγος γινομένου: Ἂν $f(x)$, $g(x)$ εἶναι παραγωγίσιμες τότε ἡ $y = f(x) \cdot g(x)$ εἶναι παραγωγίσιμη κ'

$$\frac{dy}{dx} = g\frac{df}{dx} + f\frac{dg}{dx} \quad \text{(Κανόνας Leibniz)}$$

2.4.4. Παράγωγος πηλίκου. Ἂν $f(x)$, $g(x)$ εἶναι παραγωγίσιμες καί $g(x) \neq 0$ τότε ἡ $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ εἶναι παραγωγίσιμη καί

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x) \cdot \frac{df}{dx} - f(x)\frac{dg}{dx}}{g^2(x)}.$$

2.4.5. Ὁ κανόνας τῆς ἁλυσίδας μᾶς ἐπιτρέπει νά παραγωγίζουμε συνθέσεις παραγωγισίμων συναρτήσεων, ὅπως γιά παράδειγμα τήν

$$y = (x^2 + 3x + 5)^{5/2}.$$

Ἂν θέσουμε $u = x^2 + 3x + 5$, μποροῦμε νά γράψουμε $y = u^{5/2}$, όπου ή u είναι μια συνάρτηση τού x, $g(x) = x^2+3x+5$. Στό παράδειγμα τής

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

μπορούμε νά θέσουμε $u = \frac{x+1}{x-1} = g(x)$, ώστε $y = \sqrt{u}$.

Τέτοιου είδους καταστάσεις προκύπτουν συχνότατα καί εξηγούμε τώρα πώς ό κανόνας τής αλυσίδας μάς βοηθά γιά νά παραγωγίσουμε τέτοιες συναρτήσεις.

ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ Άν $y = f(u)$, $u = g(x)$, τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Στά παραδείγματά μας: γιά τήν $y = (x^2+3x+5)^{5/2}$ είναι

$$\frac{dy}{du} = \frac{5}{2}u^{\frac{3}{2}} \quad \frac{du}{dx} = 2x+3. \quad \text{Άρα } \frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}(x^2+3x+5)^{3/2} \cdot (2x+3).$$

Γιά τήν $y = \left((x+1)/(x-1)\right)^{1/2}$ είναι $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-1/2}$ $\frac{du}{dx} = -\frac{2}{(x-1)^2}$

Άρα $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \left(-\frac{2}{(x-1)^2}\right) = -\frac{1}{(x+1)^{1/2}(x-1)^{3/2}}.$$

2.4.6. Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x \qquad \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

Χρησιμοποιώντας τόν κανόνα τού πηλίκου παίρνετε επίσης

$$\frac{d(\tan x)}{dx} = -\frac{1}{\cos^2 x}.$$

και ως άσκηση δείξτε:

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x.$$

2.4.7. Παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης

Θυμηθείτε ότι $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Μπορούμε να παραγωγίσουμε αυτή τη σειρά όρο προς όρο: Παίρνουμε

$$\frac{de^x}{dx} = e^x!$$

Αυτό είναι πολύ σημαντικό: η εκθετική συνάρτηση θα μπορούσε να έχει ορισθεί ως η συνάρτηση που έχει παράγωγο τον εαυτό της.

Εάν έχουμε $e^{f(x)}$, τότε με τον κανόνα της αλυσίδας

$$\frac{d}{dx}\left(e^{f(x)}\right) = e^{f(x)}\frac{df(x)}{dx}$$ Για $f(x)=a$ σταθερό,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{ax}\right) = ae^{ax}$$

Το παραπάνω, παρόλη την απλότητά του, απηχεί την σύνθετη μαθηματική ιδέα των ιδιοσυναρτήσεων ενός τελεστή. Εδώ τελεστής είναι το $\frac{d}{dx}$ πού δρα στη συνάρτηση e^{ax} για να δώσει την ae^{ax}, δηλαδή την συνάρτηση πολλαπλασιασμένη με μία σταθερά

Λέμε τότε ότι η e^{ax} είναι ιδιοσυνάρτηση του τελεστή $\frac{d}{dx}$.

Άλλα παραδείγματα:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = -\frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{4x^2+2x}\right) = 8x+2 \quad e^{4x^2+2x}.$$

2.4.8. Παράγωγος της λογαριθμικής συνάρτησης

Αν $y = \ln x$ τότε $x = e^{\ln y}$ και ιδίως

$$x = e^{\ln x}$$

Παραγωγίζοντας

$$1 = \frac{d\left(e^{\ln x}\right)}{dx} = e^{\ln x}\,\frac{d\ln x}{dx} = x\,\frac{d\ln x}{dx}$$

Οπότε

$$\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Για διάφορες λογαριθμικές παραστάσεις, χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αλυσίδας, π.χ.,

$$\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = \frac{1}{f(x)}\,\frac{df(x)}{dx}.$$

2.4.9. Παράγωγος της a^x

Μπορούμε πάντοτε να γράψουμε

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x\ln a}.$$

Οπότε

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \cdot \ln a.$$

2.4.10 Υπερβολικές συναρτήσεις

Δείξτε σάν άσκηση:

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

2.4.11. Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Θυμηθείτε ότι $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Παραγωγίστε τήν δεξιά σχέση ώς πρός $\underline{y}$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{df^{-1}(y)}{dy} \quad \text{δηλαδή}$$

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{df}{dx}}$$

Αυτός ό κανόνας θά μπορούσε νά έχει ήδη εφαρμοστεί γιά νά βρούμε τήν παράγωγο τού λογαρίθμου, αλλά τόν εφαρμόζουμε γιά νά βρούμε τήν παράγωγο τών αντιστρόφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

$$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y \qquad y \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\sin y}{dy} = \cos y = +\sqrt{1-\sin^2 y} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ως άσκηση, και με τον ίδιο τρόπο δείξτε

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}(x)\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}x\right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

2.5. Παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Η δεύτερη παράγωγος $\frac{d^2y}{dx^2}$ μιας $y=f(x)$ ορίζεται

ως η $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ και συμβολίζεται επίσης με $f''(x)$.

Μπορούμε να ορίσουμε την τρίτη παράγωγο

$$\frac{d^3y}{dx^3} \quad ή \quad f'''(x)$$

την τέταρτη παράγωγο

$$\frac{d^4y}{dx^4} \quad ή \quad f^{(iv)}(x)$$

και γενικότερα τη n-οστή παράγωγο

$$\frac{d^{(n)}(y)}{dx^n} \quad ή \quad f^{(n)}(x)$$

• Δεῖξτε σὰν ἄσκηση: Ἡ n-οστὴ παράγωγος πολυωνύμου βαθμοῦ n−1 εἶναι 0.

Προσοχὴ μὲ τὶς ἀντίστροφες: Εἶναι

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{ἀλλά}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} \quad \text{δὲν εἶναι ἴσο μὲ} \quad \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

2.6 Ἐφαρμογὲς τῆς παραγώγισης

2.6.1 Ρυθμὸς μεταβολῆς

Ἡ παράγωγος συνάρτησης $y=f(x)$ εἶναι ὁ ρυθμὸς μεταβολῆς τοῦ y μὲ τὸ x. Ἄρα ἡ παράγωγος περιγράφει κάθε μὴ στάσιμο σύστημα ὅπως:

• Ραδιενεργὴ μείωση: $\frac{dx}{dt} = -\lambda x$

Εἶναι ἡ διαφορικὴ ἐξίσωση ποὺ δίνει τὸ ρυθμὸ μείωσης τῆς ποσότητας x μὲ τὸν χρόνο t.

• Θέση, ταχύτητα. Ἂν $x=f(t)$ δίνει τὴ θέση σωματιδίου στὸν χρόνο t, τότε

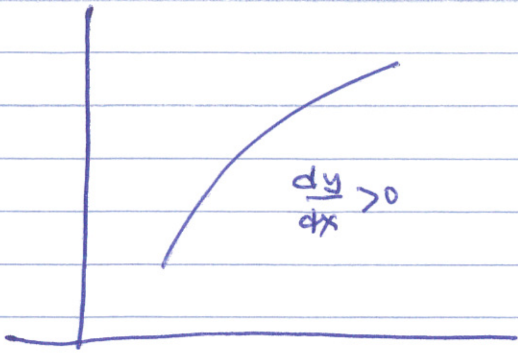
$$v(t) = \frac{dx}{dt} \quad \text{ἡ ταχύτητά του}$$

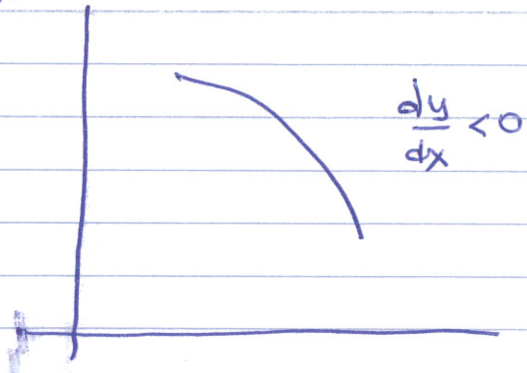
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{ἡ ἐπιτάχυνσή του.}$$

2.6.2 Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα

Μὲ τὰ παρακάτω σχήματα θὰ θυμηθοῦμε πράγματα γνωστὰ ἀπὸ τὸ σχολεῖο:

$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

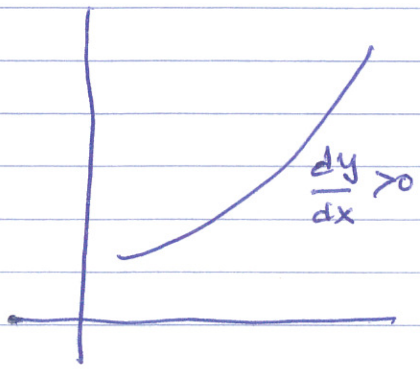


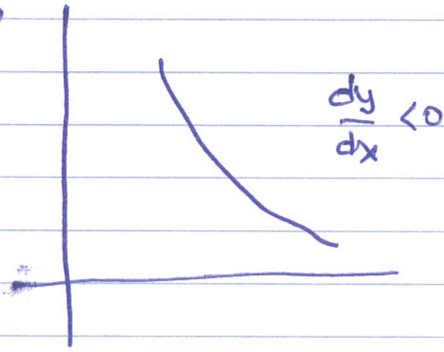


y γνησίως αύξουσα
καί κυρτή
(στρέφει τά κοίλα άνω)

y γνησίως φθίνουσα
καί κυρτή
(στρέφει τά κοίλα ~~κάτω~~ άνω)

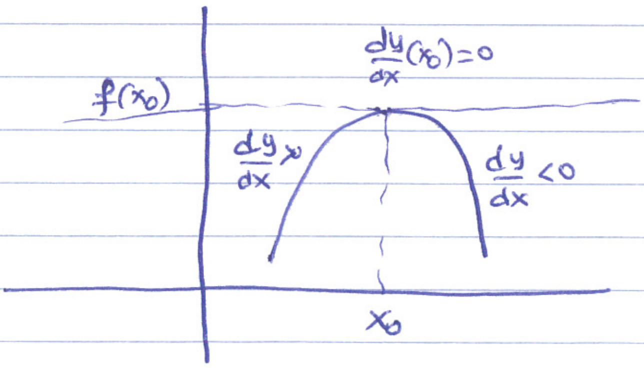
$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$



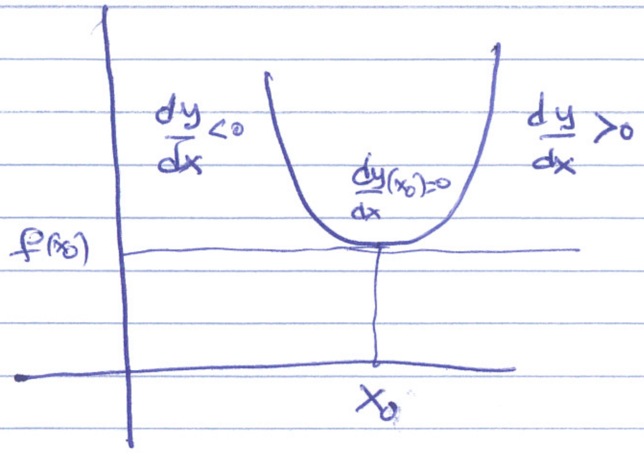


y γνησίως αύξουσα
καί κοίλη
(στρέφει τά κοίλα κάτω)

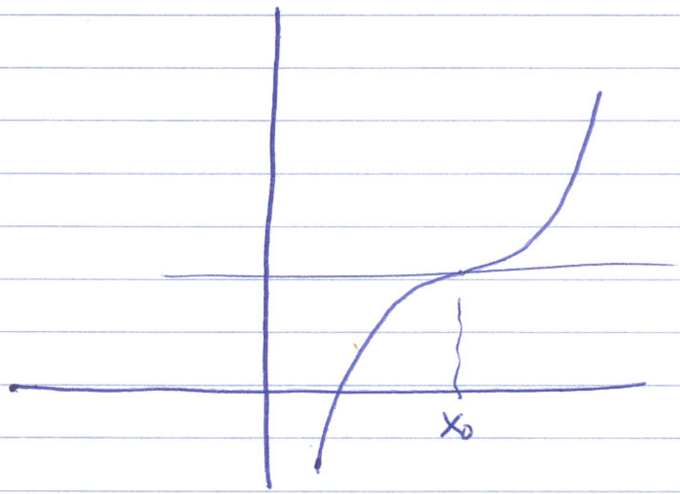
y γνησίως φθίνουσα
καί κυρτή
(στρέφει τά κοίλα κάτω)



Ἡ $y = f(x)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στό x_0



Ἡ $y = f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ἐλάχιστο στό x_0



Ἡ f παρουσιάζει σημεῖο καμπῆς στό x_0: Ἡ κυρτότητά της ἀλλάζει

$\frac{d^2y}{dx^2}(x_0) = 0.$

Παράδειγμα: Ἔστω ἡ συνάρτηση $y = \frac{x^2}{2} - 3x + 3\ln x + \frac{1}{x}$

Παίρνουμε τήν $\frac{dy}{dx} = x - 3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$ καί βρίσκουμε τά κρίσιμα σημεῖα δηλαδή ἐκεῖ πού $\frac{dy}{dx} = 0$. Βλέπουμε ὅτι $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = 1$.

Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \quad \text{και βρίσκουμε}$$

ότι $\frac{d^2y}{dx^2}(1) = 0$ άρα έχουμε σημείο καμπής στο $x_0 = 1$

Η ταχύτητα μιας αυτοκαταλυτικής αντίδρασης δίνεται από την

$$v = kx(a-x)$$

όπου a είναι η αρχική συγκέντρωση του αντιδρώντος υλικού, και x είναι η ποσότητα που αποσυντίθεται στον χρόνο t. Το k είναι σταθερά.

Παραγωγίζουμε: $\frac{dv}{dx} = ka - 2kx$ $\quad \frac{dv}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$, δηλαδή όταν ήδη το μισό του αρχικού υλικού έχει χρησιμοποιηθεί.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -2k \quad \text{που είναι αρνητική για } k>0$$

Σε σταθερή πίεση, ο όγκος V 1 gr νερού ως συνάρτηση της θερμοκρασίας T δίνεται από την

$$V(T) = a + bT + cT^2 + dT^3$$

Ο συντελεστής ανάπτυξης α είναι ο

$$\alpha = \frac{1}{V_0}\left(\frac{dV}{dt}\right)_p$$

όπου V_0 είναι ο όγκος στους $0^\circ C$. Ο όγκος ελαχιστοποιείται όταν $\frac{dV}{dt} = 0$ δηλαδή όταν $b + 2cT + 3dT^2 = 0$. Η δεύτερη παράγωγος εκεί είναι θετική:

$$2c + 6dT.$$