ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΗΜΑ ΧΗΜΙΚΩΝ

Χειμερινό εξάμηνο 2017-18

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ I-ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ, ΤΜΕΜ

1. Παραδοση την πεμπτη 30/11

(Παραδώστε μόνο τις **1.** β), γ), **2.**).

1. Βρείτε τα παρακάτω διπλά ολοκληρώματα με τη βοήθεια του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες:

α) της $f(x,y) = x^2$ στον δίσκο $x^2 + y^2 \leq 16$,
β) της $f(x,y) = (x^2+y^2)^2$ στο κομμάτι του δίσκου $x^2 + y^2 \leq 1$ όπου $y \geq 0$,
γ) της $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ στο κομμάτι του δίσκου $x^2 + y^2 \leq R^2$ όπου $x \leq 0$ και $y \leq 0$.

2. Έστω η καμπύλη c που αποτελείται από τις πλευρές του τριγώνου με κορυφές $(0,0), (0,2)$ και $(2,0)$ προσανατολισμένη με τη θετική φορά. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Green υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_c x^2y dx - y^2 x dy.$$

3. Έστω c κλειστή καμπύλη προσανατολισμένη με τη θετική φορά. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Green υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_c (x^2+y)dx + (x-y^2)dy.$$

4. Εφαρμόστε το θεώρημα του Green για να εκφράσετε το

$$\frac{1}{2}\oint_c xdy - ydx,$$

ως διπλό ολοκλήρωμα στο εσωτερικό $\text{Int}(c)$ της c. Τί παρατηρείτε; Αποδείξτε κατόπιν σε μία γραμμή ότι αν c είναι ο μοναδιαίος κύκλος προσανατολισμένος με τη θετική φορά, τότε

$$\frac{1}{2}\oint_c xdy - ydx = \pi.$$

5. Θυμηθείτε την άσκηση 5 από το 8ο φυλλάδιο. Έστω $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο στο $\mathbb{R}^2$. Ορίζουμε την *απόκλιση* του F με τη σχέση

$$\text{div}(F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Δείξτε ότι αν c κλειστή καμπύλη προσανατολισμένη με τη θετική φορά και $\mathrm{Int}(c)$ είναι το εσωτερικό της c, τότε

$$\iint_{\mathrm{Int}(c)} \mathrm{div}(F)\; dxdy = \oint_c Pdy - Qdx.$$

Αυτό είναι το *θεώρημα απόκλισης* στο επίπεδο και είναι ισοδύναμο με το θεώρημα του Green. Για να το αποδείξετε, εφαρμόσετε στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα το θεώρημα του Green (μισή γραμμή!).

Εφαρμογή: Έστω $\vec{r} = (x, y)$, q είναι σημειακό φορτίο και

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

η δύναμη που δέχεται το q που βρίσκεται στο σημείο $\vec{r}$ του ηλεκτρικού πεδίου

$$\vec{E} = \frac{kQ}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

ενός άλλου σημειακού φορτίου Q. Εδώ, $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(1) Βρείτε την απόκλιση της $\vec{F}$. (Απάντηση: $\mathrm{div}(\vec{F}) = -kQ/|r|^3$.)

(2) Με χρήση του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητής σε πολικές συντεταγμένες, υπολογίστε το

$$\iint_A \mathrm{div}(\vec{F}) dxdy$$

όπου A ο δακτύλιος ανάμεσα στους ομόκεντρους κύκλους $x^2+y^2 = R_1$ και $x^2+y^2 = R_2$, $0 < R_1 < R_2$. (Υπόδειξη: Το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής σας δίνει

$$\iint_A \mathrm{div}(\vec{F}) dxdy = -kQ \iint_{[R_1,R_2]\times[0,2\pi]} \frac{r}{r^3} dr d\theta.)$$