ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΗΜΑ ΧΗΜΙΚΩΝ

Χειμερινό εξάμηνο 2017-18

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι-ΠΡΟΤΥΠΟ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ, ΤΜΕΜ

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Διάρκεια εξέτασης: 90 λεπτά.

1. Χρησιμοποιώντας παραγώγους πεπλεγμένων συναρτήσεων, βρείτε την dy/dx όταν

$$(x^2+y^2)^2+x^2-y^2=0.$$

Απάντηση: Παραγωγίζοντας ως προς x την παραπάνω παίρνουμε

$$2(x^2+y^2)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)+2x-2y\frac{dy}{dx}=0.$$

Ισοδύναμα,

$$y(x^2+y^2-1)\frac{dy}{dx}=-x(x^2+y^2+1).$$

Συνεπώς, όταν $y\neq 0$ και $x^2+y^2\neq 1$ είναι

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x(x^2+y^2+1)}{y(x^2+y^2-1)}.$$

2. Δείξτε ότι το

$$\omega=2xy\;dx+(x^2-y^2)\;dy$$

είναι ολικό διαφορικό και βρείτε τη συνάρτηση δυναμικού ϕ της ω που ικανοποιεί $\phi(0,0)=0$.

Απάντηση: Θέτουμε

$$P=2xy,\quad Q=x^2-y^2.$$

Είναι

$$P_y=2x=Q_x,$$

άρα το ω είναι ολικό διαφορικό. Αν ϕ συνάρτηση δυναμικού, τότε θα πρέπει

$$d\phi=\phi_x\;dx+\phi_y\;dy=\omega,$$

άρα

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=2xy, \tag{0.1}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=x^2-y^2. \tag{0.2}$$

Ολοκληρώνουμε την (0.1) ως προς x:

$$\phi(x,y)=2y\int x\;dx=yx^2+c(y) \tag{0.3}$$

Παραγωγίζουμε την (0.3) ως προς y:

$$\phi_y = x^2 + c'(y) = x^2 - y^2, \quad \text{από την } (0.2). \tag{0.4}$$

Συνεπώς η (0.4) γράφεται

$$c'(y) = -y^2 \implies c(y) = -y^3/3 + c.$$

Παίρνουμε τελικά από την (0.3) ότι

$$\phi(x,y) = yx^2 - y^3/3 + c.$$

Για $(x,y) = (0,0)$ προκύπτει $c = 0$, άρα η ζητούμενη συνάρτηση δυναμικού είναι η

$$\phi(x,y) = yx^2 - y^3/3.$$

3. Αέριο αρχικού όγκου V_0 θερμαίνεται και επεκτείνεται. Υποθέτουμε την ισχύ της καταστατικής εξίσωσης

$$F(P,V,T) = 0$$

για κάποια παραγωγίσιμη F. Υποθέτοντας επίσης ότι $F_V \neq 0$, βρείτε έκφραση του συντελεστή θερμικής επέκτασης

$$\sigma = \frac{1}{V_0}\frac{\partial V}{\partial T},$$

μέσω των μερικών παραγώγων της F.

Απάντηση: Παίρνουμε το διαφορικό της F:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial P}\,dP + \frac{\partial F}{\partial V}\,dV + \frac{\partial F}{\partial T}\,dT = 0.$$

Όταν $F_V \neq 0$ έχουμε τότε

$$dV = -\frac{F_P}{F_V}\,dP - \frac{F_T}{F_V}\,dT.$$

Είναι όμως και

$$dV = V_P\,dP + V_T\,dT.$$

Εξισώνοντας προκύπτει

$$V_T = -\frac{F_T}{F_V}.$$

Άρα,

$$\sigma = \frac{1}{V_0}\frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{1}{V_0}\frac{\frac{\partial F}{\partial T}}{\frac{\partial F}{\partial V}}.$$

4. Η θερμοκρασία μίας ομογενούς πλάκας στο σημείο (x,y) και στον χρόνο t δίνεται από την

$$T(x,y,t) = \frac{1}{t}\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}.$$

Δείξτε ότι η T ικανοποιεί την εξίσωση διάχυσης της θερμότητας

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Απάντηση: Πράξεις:

$$T_t = (-1/t^2) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}} + (1/t)((x^2+y^2)/4t^2) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}} = ((x^2+y^2)/4t^3 - 1/t^2) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}.$$

$$T_x = (1/t)(-2x/4t) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}} = (-x/(2t^2)) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}},$$

$$T_{xx} = (-1/(2t^2)) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}} + (-1/(2t^2))(-2x/4t) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}} = (x^2/4t^3 - 1/2t^2) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}.$$

Ομοίως,

$$T_{yy} = (y^2/4t^3 - 1/2t^2) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}},$$

και έχουμε

$$T_{xx} + T_{yy} = T_t.$$

5. Έστω καμπύλη c που αποτελείται από τις πλευρές του τριγώνου με κορυφές $(0,0)$, $(1,0)$ και $(0,1)$, προσανατολισμένη με τη θετική φορά. Με τη βοήθεια του θεωρήματος Green υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_c (x-y^2)\,dx + (y-x^2)\,dy.$$

Απάντηση: Έστω T η επιφάνεια του τριγώνου. Θέτουμε

$$P(x,y) = x - y^2, \quad Q(x,y) = y - x^2.$$

Το θεώρημα του Green μας λέει τότε ότι

$$\oint_c (x-y^2)\,dx + (y-x^2)\,dy = \iint_T (Q_x - P_y)\,dxdy = \iint_T (-2x+2y)\,dxdy = 2\iint_T (y-x)\,dxdy$$

Γράφουμε:

$$T = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\iint_T (y-x)\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (y-x)\,dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left[y^2/2 - xy\right]_{y=0}^{y=1-x}\,dx \\
&= \int_0^1 ((1-x)^2/2 - x(1-x))\,dx \\
&= \int_0^1 3x^2/2 - 2x + (1/2)\,dx \\
&= \left[x^3/2 - x^2 + x/2\right]_0^1 = 1/2 - 1 + 1/2 = 0.
\end{aligned}$$

Είναι συνεπώς και

$$\oint_c (x-y^2)\,dx + (y-x^2)\,dy = 0.$$