M1 3η εβδομάδα Ι. Δ. ΠΛΑΤΗΣ

2.6.3 Σχεδίαση καμπύλης

Είναι συχνά χρήσιμο νά είμαστε σέ σχέση νά κάνουμε ένα πρόχειρο σχέδιο μιάς καμπύλης δείχνοντας τά βασικά της χαρακτηριστικά, χωρίς κατ' ανάγκη νά έχουμε απόλυτη ακρίβεια. Μέ ένα Παράδειγμα, δείχνουμε τή διαδικασία: Έστω η

$$y = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$$

1) Βρίσκουμε τίς τιμές πού μηδενίζεται η y. Εδώ είναι $x=1$, $x=2$

2) Βρίσκουμε τήν τιμή $y(0)=1$

3) Εξετάζουμε τή συμπεριφορά της y στό $\pm\infty$. Εδώ

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} = 1.$$

Στήν περίπτωση αυτή, έχουμε ότι η $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη

4) Εξετάζουμε τή συμπεριφορά της y στά σημεία πού δέν ορίζεται. Εδώ είναι τά $x=-1$, $x=-2$.

Δείτε τώρα ότι $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to-1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)} =$

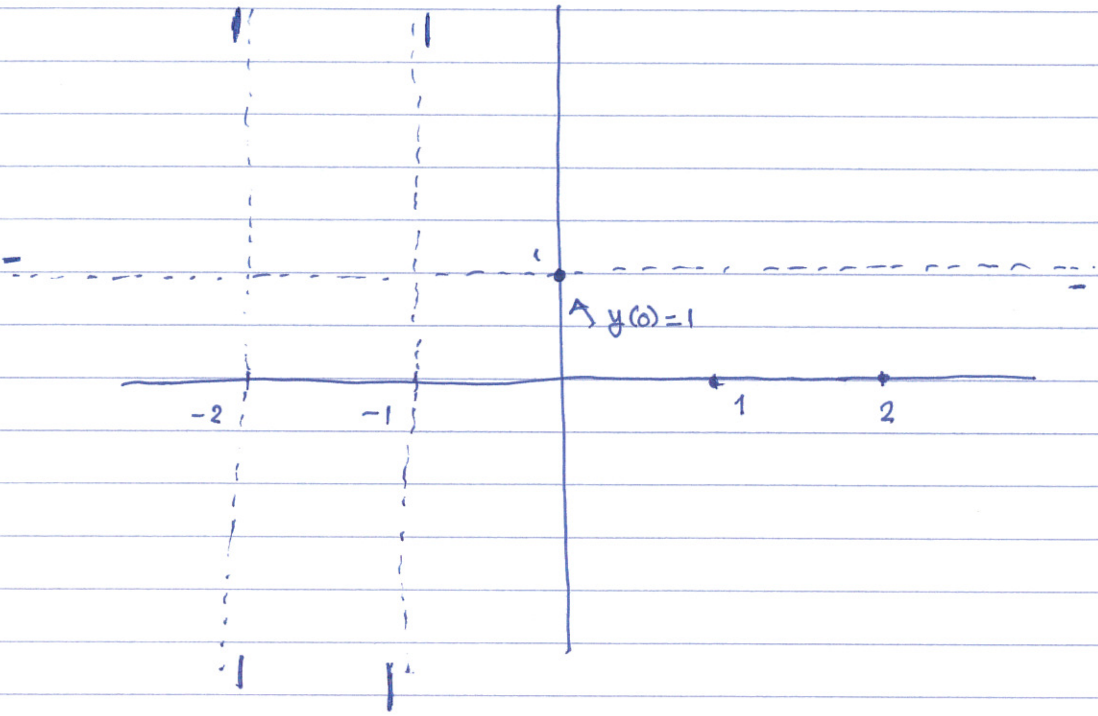
$= \displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{6}{x+1}$. Εδώ προσοχή! $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} \frac{6}{x+1} = \boxed{\frac{6}{0^-}} = -\infty$

εδώ $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} \frac{6}{x+1} = \boxed{\frac{6}{0^+}} = +\infty$

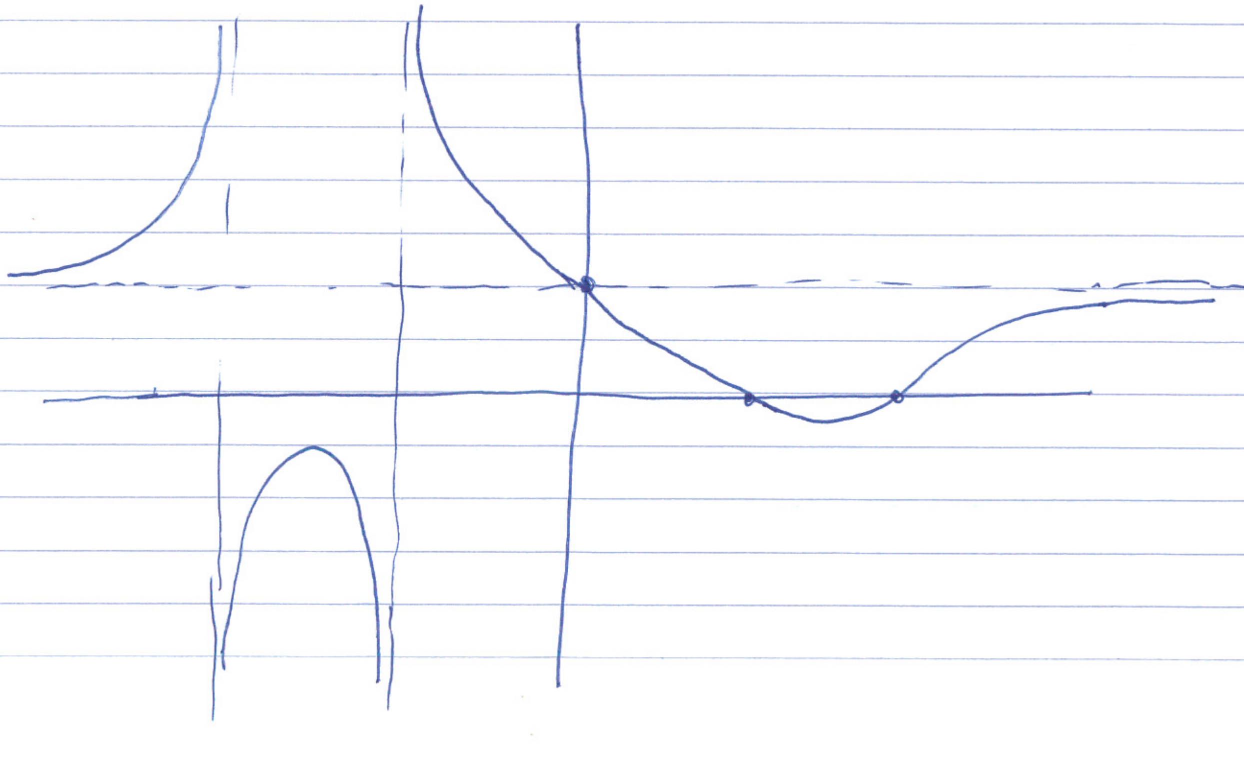
Δέν έχει καμμία σημασία πού τά όρια είναι διαφορετικά. Σέ κάθε περίπτωση η $x=-1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη. Μέ τόν ίδιο τρόπο, μπορείτε νά δείξετε ότι

$$\lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{-12}{x+2} \begin{cases} +\infty & \text{ἄν } x\to -2^{-} \\ -\infty & x\to -2^{+}. \end{cases}$$

Ἄρα καὶ ἡ $x=-2$ εἶναι ὀριζόντια ἀσύμπτωτη. Οἱ πληροφορίες πού ἔχομε ἕως τώρα βρίσκονται στό παρακάτω σχῆμα.



Ὁπότε, θά μποροῦσε κανεὶς ἀπό τίς πληροφορίες αὐτές κ μόνο νά "συμπληρώσει" τό σχῆμα τῆς y ὡς ἑξῆς



Αυτό το σχέδιο είναι σχεδόν ακριβές και δείχνει ότι δεν χρησιμοποιήσαμε πουθενά τα κριτήρια της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου. Αυτό γιατί τα κριτήρια αυτά είναι τοπικής σημασίας, μας προσδιορίζουν τοπικά ακρότατα κ' σημεία καμπής. Ουσιαστικά λοιπόν, το πιο πάνω σχέδιο έγινε με τη χρήση ορίων και της συνέχειας της y.

Δείτε τώρα τη συνοψία να υπολογίσουμε ακριβώς τα ακρότατα και τα σημεία καμπής. Ήδη, η πρώτη παράγωγος έχει κάποιους υπολογισμούς:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6\,(x^2-2)}{(x^2+3x+2)^2}.$$

Όμως, το πρόσημό της εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του ~~παρονομαστή~~ αριθμητή, καθώς ο παρονομαστής είναι πάντοτε θετικός. Έτσι, έχουμε τον παρακάτω πίνακα (μονοτονίας)

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
dy/dx		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y		$\searrow$	‖	$\searrow$		$\nearrow$	‖	$\nearrow$		$\searrow$	

Καταλαβαίνουμε ότι η y έχει τοπικό ελάχιστο στο $-\sqrt{2}$, το -34 και τοπικό μέγιστο στο $\sqrt{2}$, το -0.029 (περίπου)

Το μόνο που μας απέμεινε είναι τα σημεία καμπής. Η δεύτερη παράγωγος

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12\,(-x^3+6x+6)}{(x^2+3x+2)^3}$$

μηδενίζεται όταν $-x^3+6x+6=0$. Προσέξτε ότι η εξίσωση είναι πολυωνυμική τρίτου βαθμού και δεν υπάρχουν "εύκολες" ρίζες (δηλαδή ακέραιες). Για την ακρίβεια $\frac{d^2y}{dx^2}=0 \doteq 2,87$.

Συμπεραίνετε ότι η πιο πάνω υπολογιστική πληροφορία συνέβαλε μάλλον λίγο σε μια πρόχειρη σχεδίαση της y. Γενικά, αυτό συμβαίνει όταν οι y είναι απλές συναρτήσεις, δηλαδή πολυωνυμικές ρητές, κ.λ.π.

Παράδειγμα. Ἡ ἐξίσωση van der Waals

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

Οἱ κρίσιμες σταθερές βρίσκονται ὑπολογίζοντας τὶς τιμὲς τῶν P, V, T γιά τὶς ὁποῖες $\frac{dP}{dV} = 0$. Οἱ σταθερές αὐτές συμβολίζονται ἀντίστοιχα

μὲ P_c, V_c, T_c καὶ εἶναι ὅτι πιό καινότερο στὴν PVT συμπεριφορά ἑνός ἀερίου κοντά στό σημεῖο ὑγροποίησης. Δεῖξτε σάν ἄσκηση:

$$T_c = \frac{8a}{27bR}, \quad V_c = 3b, \quad P_c = \frac{a}{27b^2}.$$

2.7 Διαφορικά

Θυμηθεῖτε ὅτι ἡ παράγωγος

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Αὐτό μπορεῖ νά γραφεῖ

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - hf'(x)}{h} = 0$$

Γιά νά ἔχει νόημα τό ὅριο,

$$f(x+h) - f(x) \approx hf'(x) \quad \text{γιά } h \text{ μικρό}$$

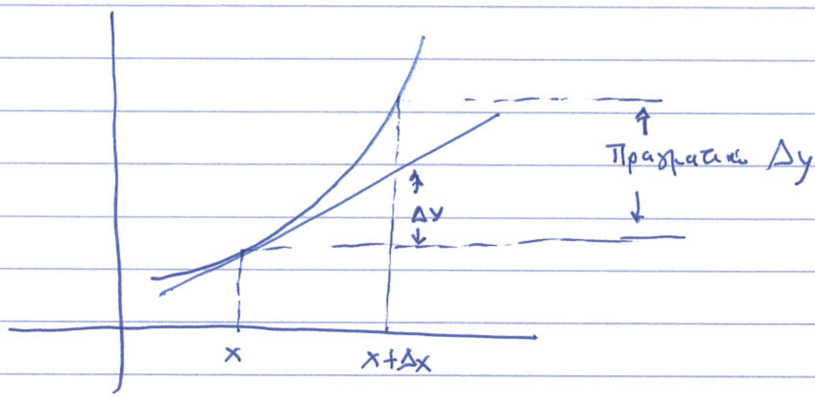
δηλαδή ἀκόμη,

$$f(x+h) - f(x) = h(f'(x) + \phi(h)) \quad \text{ὅπου } \lim_{h \to 0} \phi(h) = 0$$

Ἡ αὔξηση τῆς f στό x εἶναι ἡ $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ καὶ ἔτσι μποροῦμε

νά γράψουμε $\Delta y = f'(x)\Delta x$ ὅπου $\Delta x = (x+h) - x = h$

Πρακτικά, αὐτό πού κάνουμε εἶναι μία γραμμικοποίηση τῆς f κοντά στό x, καί ἀντί νά μελετᾶμε τίς πραγματικές αὐξήσεις μελετᾶμε τίς αὐξήσεις στήν ἐφαπτομένη (τήν γραμμικοποίηση).



Πού χρησιμοποιεῖται αὐτό; Ἄς δώσουμε ἕνα παράδειγμα ὅπου καλούμαστε νά ὑπολογίσουμε τόν ὄγκο ἑνός λεπτοῦ σφαιρικοῦ κελύφους ἐσωτερικῆς ἀκτίνας r καί πάχους Δr. Ὁ ὄγκος σφαίρας ἀκτίνας r εἶναι

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{ὁπότε}$$

$$\Delta V \simeq \frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\Delta r = 4\pi r^2 \Delta r.$$

Ὁ πραγματικός ὄγκος ἀπό τήν ἄλλη εἶναι:

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi (r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 =$$

$$4\pi r^2 \Delta r + 4\pi r (\Delta r)^2 + \frac{4}{3}\pi (\Delta r)^3$$

Ὁπότε οἱ δυνάμεις οἱ ἀνώτερες τῆς δευτέρας γιά τό Δr ἀγνοοῦνται.

Ἡ σχέση $\Delta y \simeq f'(x)\Delta x$ εἶναι πάντοτε προσεγγιστική, σέ ἀντίθεση

μέ τήν $dy = f'(x)dx$ πού ὁρίζει τό διαφορικό, καί εἶναι ἡ προηγούμενη σχέση ἀλλά ὅμως στό ὅριο. Γιά νά γίνει αὐτό σαφές, δεῖτε ὅτι

$$dV = (4\pi r^2)\, dr$$ (καί ὄχι $\simeq$ ὅπως στή σχέση μέ τά ΔV, Δr).

Εἶναι σύνηθες καί στή Χημεία, ἀλλά καί στή Φυσική νά προκύπτει σχέση τῆς μορφῆς

$$\Delta y \simeq f'(x)\,\Delta x$$

καί κατόπιν, περνώντας στό ὅριο νά ἀνάγομε

$$dy = f'(x)\,dx$$

καί νά παίρνομε ἔκφραση γιά τήν παράγωγο.

Ἄς δώσομε ἕνα παράδειγμα. Ἡ ποσότητα ἑνός ἀερίου σέ πίεση P πού βρίσκεται ἐντός κυλίνδρου διατομῆς A. Πιέζοντας ἐσωτερικό πιστόνι κατά Δl καί ὑποθέτοντας ὅτι ἡ P παραμένει περίπου σταθερή, τό ἔργο πού παράγει τό ἀέριο, ΔW γίνεται ἀπό τή δύναμη $PA \cdot \Delta L$. Ἔτσι,

$$\Delta W \simeq PA \cdot \Delta l$$

Ἐπειδή $A \cdot \Delta l = \Delta V$, ἡ ἀλλαγή τοῦ ὄγκου,

$$\Delta W \simeq P\Delta V.$$ Ἀφήνοντας $\Delta V \to 0$

$$dW = P\,dV$$

Ἐκφράσαμε λοιπόν τό φυσικό μας πρόβλημα μέ μία ἔκφραση πού περιέχει διαφορικά. Θά δοῦμε ἀργότερα πῶς ἀπό αὐτή τή σχέση μποροῦμε νά προσδιορίσομε τήν συνάρτηση W.

Τό παρακάτω παράδειγμα τῆς ἐξίσωσης Clapeyron-Clausius εἶναι χρήσιμο. Ἔχομε

$$V_1\,dP - S_1\,dT = V_2\,dP - S_2\,dT$$

ὅπου V_1, V_2, S_1, S_2 εἶναι ὁ μοριακός ὄγκος καί ἡ μοριακή ἐντροπία σέ δύο φάσεις καί dP καί dT εἶναι τά διαφορικά τῆς πίεσης καί τῆς θερμοκρασίας. Μποροῦμε νά γράψομε

$$\Delta V\,dP = \Delta S\,dT$$

Ἐδῶ τά ΔV καί ΔS παριστάνουν ἀλλαγές ὄγκου καί ἐντροπίας πού <u>δέν</u> εἶναι κατ' ἀνάγκη μικρές. Δέν μποροῦμε λοιπόν νά ποῦμε $dV \cdot dP = dS \cdot dT$(!)

2.8 Παραγώγιση πεπλεγμένων συναρτήσεων

Ἐὰν θέλαμε νὰ βροῦμε τὴν παράγωγο τῆς πεπλεγμένης συνάρτησης

$$y^2-2xy+1=0$$

θὰ μπορούσαμε, νὰ γράψουμε ἰσοδύναμα

$$y=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2-4}}{2} \qquad (x^2-1>0)$$

καὶ νὰ παραγωγίσουμε. Ὑπάρχουν πολλὰ "στραβὰ" ἐδῶ, Ἐκτὸς τῆς προϋπόθεσης $x^2-1>0$ ἔχουμε δύο συναρτήσεις. Ἀκόμα καὶ ἔτσι ὅμως, αὐτὸ δὲν θὰ μπορούσαμε (εὔκολα τουλάχιστον) νὰ τὸ κάνουμε γιὰ τὴν ἔκφραση

$$x^5+4xy^3-3y^5=2 \qquad (*)$$

Αὐτὸ ποὺ μποροῦμε νὰ κάνουμε, εἶναι νὰ θεωρήσουμε ὅτι τὸ y εἶναι $y(x)$ (ἤ, τὸ $x=x(y)$) καὶ νὰ παραγωγίσουμε τὴν σχέση ὡς πρὸς x (ἀντίστοιχα, ὡς πρὸς y).

Στὴν πρώτη περίπτωση παίρνουμε

$$\frac{d}{dx}(y^2)-\frac{d}{dx}(2xy)+\frac{d}{dx}(1)=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}-\left[2y+2x\frac{dy}{dx}\right]=0 \quad \text{ὁπότε}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y-x} \quad \text{ἂν } y\neq x.$$

Γιὰ ἐξάσκηση βρεῖτε τὴν $\frac{dx}{dy}$ στὴν $(*)$.

Ἡ παράγωγος λέμε ὅτι δίνεται ὑπὸ πεπλεγμένη μορφὴ καθόσον περιέχει καὶ τὴν ἀνεξάρτητη καὶ τὴν ἐξαρτημένη μεταβλητή.

2.9. Λογαριθμική Παράγωγος

Γιά νά παραγωγίσουμε ἐκφράσεις ὅπως ἡ

$$y = \frac{(3x^2+2x+4)^{3/2}}{(x^4+5x^2+2x)^2\,(x+1)}$$

μέ τίς ἰδιότητες πού ξέρουμε, εἶναι μᾶλλον χρονοβόρο. Ἐδῶ, ἴσως κλέβοντας λίγο παίρνουμε τόν κανονικό λογάριθμο:

$$\ln y = \frac{3}{2}\ln(3x^2+2x+4) - 2\ln(x^4+5x^2+2x) - \ln(x+1)$$

καί ἐνθυμούμενοι ὅτι $\dfrac{d\ln f(x)}{dx} = \dfrac{df/dx}{f}$ αὐτό δίνει

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{3}{2}\,\frac{6x+2}{3x^2+2x+6} - 2\,\frac{4x^3+20x+2}{x^4+5x^2+2x} - \frac{1}{x+1}$$

Ἡ $\dfrac{dy}{dx}$ τώρα βρίσκεται πολ/ντας τό δεξιό μέλος μέ y.