7η ἑβδομάδα ΓΜ1 Ι. Δ. Πλατής

Διαφόριση συναρτήσεων πολλῶν μεταβλητῶν

—II—

Στό ἑξῆς θά θεωροῦμε μία συνάρτηση $z = f(x,y)$ δύο μεταβλητῶν. Ἡ πραγμάτευση εἶναι ἡ ἴδια ἀκριβῶς ὅταν ἡ f εἶναι συνάρτηση τριῶν, τεσσάρων ἤ ὁποιουδήποτε πλήθους μεταβλητῶν.

Θά ὑποθέσουμε ἐπίσης ὅτι τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $f(x,y)$ εἶναι ἕνα „καλό" χωρίο τοῦ $\mathbb{R}^2$. Λέγοντας καλό χωρίο ἐννοοῦμε τέτοιο ὥστε κάθε σημεῖο του νά μπορεῖ νά προσεγγίζεται ἀπό σημεῖα τοῦ χωρίου. Μέ ἄλλα λόγια δέν θέλουμε τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $z=f(x,y)$ νά ἔχει ἀπομονωμένα σημεῖα.

Θεωροῦμε τώρα τίς ἑξῆς δύο συναρτήσεις:

$$\varphi(x) = f_y(x) \quad , \quad \psi(y) = f_x(y).$$

Ἡ συνάρτηση $\varphi(x)$ παίρνεται ἀπό τήν $f(x,y)$ θεωρώντας ὅτι τό y εἶναι σταθερά, ἐνῶ ἀντίστοιχα, ἡ $\psi(y)$ παίρνεται ἀπό τήν f θεωρώντας ὅτι ἡ μεταβλητή x εἶναι σταθερά.

Ἐάν τώρα ἡ $\varphi(x)$ εἶναι παραγωγίσιμη, ὁρίζουμε τήν μερική παράγωγο $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ἀπό τήν

$$\frac{\partial f}{d x} = \frac{d\varphi}{dx}$$

Ἐάν ἡ $\psi(y)$ εἶναι παραγωγίσιμη, ὁρίζουμε τήν μερική παράγωγο $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ἀπό τήν

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d\psi}{dy}.$$

Παράδειγμα: Άν $z = f(x,y) = x^2 y + y^2 x$, τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yx$$

Παράδειγμα: Άν $w = f(x,y,z)$ (συνάρτηση τριών μεταβλητών)

έχουμε τρεῖς μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

Συνεπῶς, ἐάν δοῦμε τόν καταστατικό νόμο τῶν ἀερίων

$$PV = nRT$$

ὡς $P = P(R,T,V) = \frac{nRT}{V}$, ἔχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial R} = n\frac{T}{V}, \quad \frac{\partial P}{\partial T} = n\frac{R}{V}, \quad \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}$$

Παρατηρῆστε ὅτι: $n\frac{\partial P}{\partial V} + \frac{\partial P}{\partial R} \cdot \frac{\partial P}{\partial T} = 0$, ἔχουμε δηλαδή

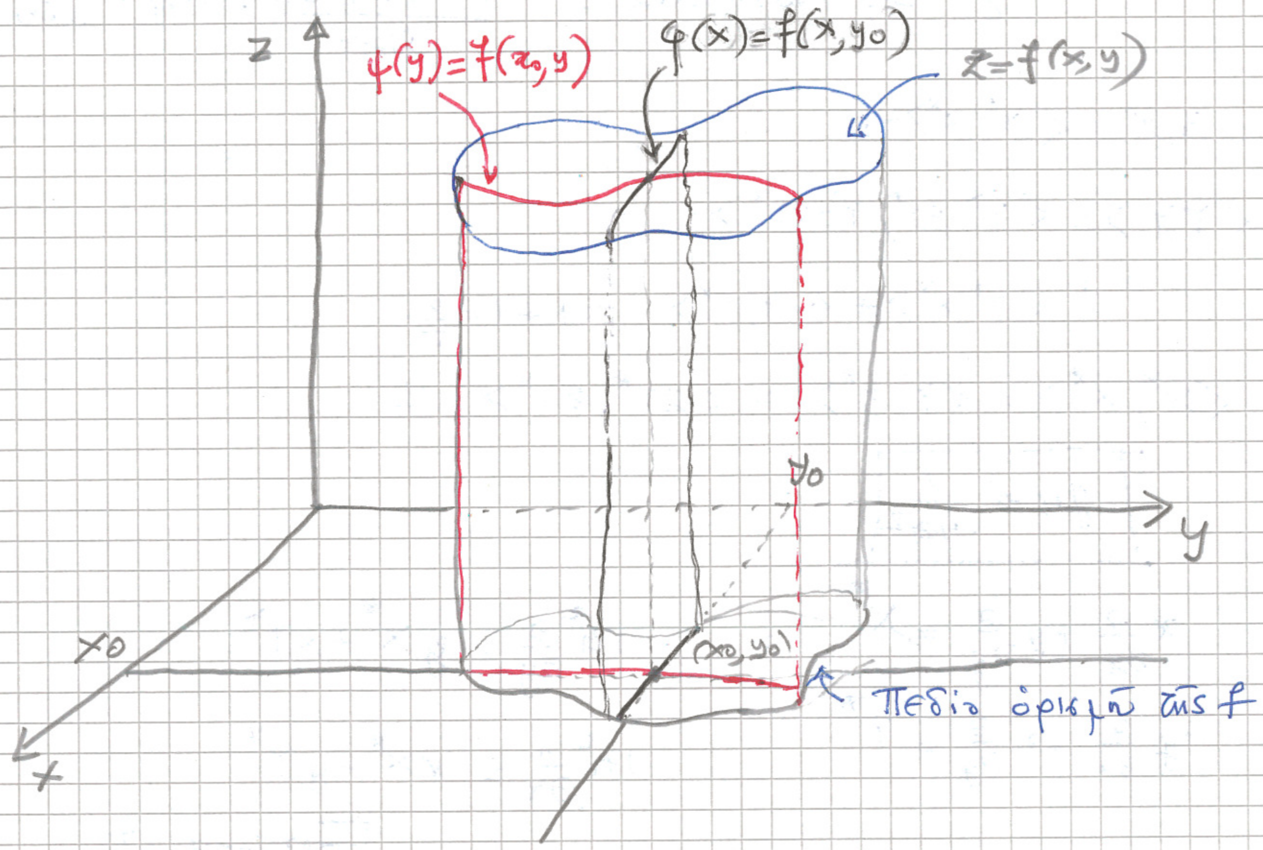
μία <u>διαφορική ἐξίσωση μέ μερικές παραγώγους</u>

Ἀπό τόν ὁρισμό, προκύπτουν τά ἑξῆς γιά (x_0, y_0) σημεῖο τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς $f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h} \quad \text{καί}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}.$$

Γεωμετρική ερμηνεία της μερικής παραγώγου



Οι $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ είναι οι παράγωγοι των φ και ψ στα x_0, y_0, αντίστοιχα.

Εάν μία συνάρτηση $z = f(x, y)$ έχει μερικές παραγώγους στο σημείο $P_0 = (x_0, y_0)$, τότε το εφαπτόμενο επίπεδο της f στο P_0 δίνεται από τον τύπο

$$z - f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0)$$

Το διάνυσμα $\nabla f(P_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right)$ λέγεται ανάδελτα (ή κλίση) της f στο P_0. Έτσι, ο τύπος του εφαπτόμενου επιπέδου γράφεται και ως

$$z - f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot (P - P_0)$$

ὅπου $P = (x,y)$ καί ἡ $\cdot$ συμβολίζει τό βαθμωτό (ἐσωτερικό) γινόμενο.

Παράδειγμα Ἔστω ἡ $z = x^2 + y^2$ καί $P_0 = (1,-1)$.

Εἶναι $z(P_0) = 2$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$, ἄρα

$$\frac{\partial z}{\partial x}(P_0) = 2 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(P_0) = -2.$$

Ὁπότε, τό ἐφαπτόμενο ἐπίπεδο τῆς z στό P_0 εἶναι

$$\begin{aligned} z - 2 &= (2,-2)\cdot(x-1, y+1) \\ &= 2(x-1) - 2(y+1) \\ &= 2x - 2y - 4 \end{aligned}$$

Ἄρα

$$z = 2x - 2y - 2.$$

Τό ἐφαπτόμενο ἐπίπεδο συνάρτησης πολλῶν μεταβλητῶν σέ σημεῖο της, εἶναι τό ἀνάλογο τῆς ἐφαπτόμενης εὐθείας συνάρτησης μιᾶς μεταβλητῆς σέ σημεῖο της. Θυμηθεῖτε ὅτι ἐνδέχεται μιά συνάρτηση μιᾶς μεταβλητῆς νά ἔχει ἐφαπτόμενη εὐθεία σέ σημεῖο της ἀλλά νά μήν εἶναι παραγωγίσιμη στό σημεῖο αὐτό. Τό ἴδιο ἰσχύει καί στίς πολλές μεταβλητές καί ὑπό αὐτήν τήν ἔννοια, δέν μποροῦμε μόνο μέ αὐτά πού ἔχουμε ὡς τώρα νά ὁρίσουμε σωστά τήν παράγωγο. Πολύ περισσότερο, ἐπειδή ἀποδεικνύεται ὅτι μιά συνάρτηση μπορεῖ κάλλιστα νά ἔχει μερικές παραγώγους ἀλλά νά μήν εἶναι συνεχής!

Ποιός εἶναι λοιπόν ὁ σωστός ὁρισμός τῆς παραγώγου; Ἄς θυμηθοῦμε τόν ὁρισμό στή μία μεταβλητή. Ἡ πρόταση "ἡ f εἶναι παραγωγίσιμη στό x_0 μέ παράγωγο $f'(x_0)$ ἄν

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0 \text{ ",}$$

μπορεῖ νά διαβαστεῖ καί ὡς ἑξῆς "ἡ f εἶναι παραγωγίσιμη στό x_0 ἄν ὑπάρχει ἀριθμός $f'(x_0)$ τέτοιος ὥστε

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot h|}{|h|} = 0. \text{"}$$

Γράφουμε τώρα τόν ὁρισμό τῆς παραγώγου συνάρτησης ὁσωνδήποτε μεταβλητῶν διανυσματικά: Ἡ $f = f(x_1,\dots,x_n) = f(\vec{x})$ εἶναι παραγωγίσιμη στό $\vec{x_0} = (x_1^0,\dots,x_n^0)$ ἄν γιά τό

$$\nabla f(\vec{x_0}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x_0}),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x_0})\right)$$

ἰσχύει

$$\lim_{\vec{h}\to 0} \frac{|f(\vec{x_0}+\vec{h})-f(\vec{x_0})-\nabla f(\vec{x_0})\cdot\vec{h}|}{|\vec{h}|} = 0$$

Ἐδῶ, $\vec{h} = (h_1,\dots,h_n)$ καί $|\vec{h}| = \sqrt{h_1^2+\dots+h_n^2}$.

Βλέπετε ὅτι ἁπλῶς γράψαμε διανυσματικά τόν ὁρισμό στήν μία μεταβλητή. Βεβαίως, εἶναι μᾶλλον δύσκολο νά ἐλέγχουμε κάθε φορά τήν ὕπαρξη αὐτοῦ τοῦ ὁρίου. Ὅμως γνωρίζουμε ὅτι τό ὅριο αὐτό ὄντως ὑπάρχει ὅταν ὅλες οἱ μερικές παράγωγοι εἶναι συνεχεῖς. Τό ἀντίστροφο δέν ἰσχύει, ἀλλά ἐμεῖς θά βρίσκουμε μόνο τέτοιες "καλές" συναρτήσεις. Θά λέμε τώρα ὅτι

$$f'(P_0) = \nabla f(P_0)$$

δηλαδή ἡ παράγωγος εἶναι ἕνα διανυσματικό μέγεθος.

Μέ τόν ἴδιο τρόπο πού ὁρίσαμε μερικές παραγώγους πρώτης τάξης, μποροῦμε νά ὁρίσουμε μερικές παραγώγους δεύτερης, ἀλλά καί ὑψηλότερης τάξης. Σέ συνάρτηση δύο μεταβλητῶν ἄς ποῦμε ἔχουμε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

καί ἀνάλογα ὁρίζονται οἱ μερικές παράγωγοι τρίτης κλπ τάξης

<u>Παράδειγμα</u> $\quad z = x \cos(yx)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(yx) - xy \sin(yx)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 \sin(yx)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y \sin(yx) - y \sin(yx) - xy^2 \cos(yx)$$

$$= -2y \sin(yx) - xy^2 \cos(yx)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2x \sin(yx) - x^2 y \cos(yx)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -x \sin(yx) - x \sin(yx) - x^2 y \cos(yx)$$

$$= -2x \sin(yx) - x^2 y \sin(yx)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^3 \cos(yx)$$

Παρατηρῆστε ὅτι $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$!

Αὐτό δέν συμβαίνει τυχαῖα. Συμβαίνει σέ ὅλες τίς συναρτήσεις ὅλων τῶν μεταβλητῶν γιά μερικές παραγώγους κάθε τάξης ὅταν οἱ συναρτήσεις μας αὐτές εἶναι πάρα πολύ καλές ἀπό ἄποψη παραγωγισιμότητας. Τό θεώρημα πού μᾶς τό ἐξασφαλίζει αὐτό λέγεται Λῆμμα τοῦ Schwarz. Ἔτσι, ἐκτός ἀπό τήν

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

ἔχουμε π.χ.,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial x} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Περίπτωση I τοῦ κανόνα τῆς ἁλυσίδας.

Θά δοῦμε ἀργότερα ὅτι ὁ κανόνας τῆς ἁλυσίδας γιά συναρτήσεις πολλῶν μεταβλητῶν, ἔχει μία ἑνιαία ἔκφραση. Πρός τό παρόν ὅμως ἄς ἀρκεστοῦμε στήν περίπτωση που

$z = f(x, y)$ $\quad c(t) = (x(t), y(t))$ καί ὁρίζεται ἡ

$$\varphi(t) = (f \circ c)(t)$$

Πρίν δώσουμε τόν τύπο, ἄς μιλήσουμε λίγο γιά παραγώγους καμπυλῶν $c(t) = (x(t), y(t))$. Ὅ,τι θά ποῦμε παρακάτω ἰσχύει γενικά γιά καμπύλες $c(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ τοῦ $\mathbb{R}^n$.

Ἡ c εἶναι παραγωγίσιμη ἄν καί μόνο ἄν οἱ $x(t)$, $y(t)$ εἶναι παραγωγίσιμες. Ἡ παράγωγος εἶναι τό διάνυσμα

$$\frac{dc}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

Ἡ σημασία τοῦ διανύσματος αὐτοῦ εἶναι ὅτι εἶναι ἐφαπτόμενο στὴν καμπύλη, ἤ, ἐὰν φανταστοῦμε τὴν καμπύλη ὡς ἕνα δρόμο πάνω στὸν ὁποῖο κινεῖται ἕνα σωματίδιο στὸν χρόνο t, τότε $\frac{dc}{dt} = v(t)$ εἶναι ἡ ταχύτητα τοῦ σωματιδίου.

Ἐπιστρέφουμε στὸν κανόνα τῆς ἁλυσίδας. Ὁ τύπος εἶναι

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d(f\circ c)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \quad \text{ἤ,}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \vec{\nabla} f(c(t)) \cdot \frac{dc}{dt}.$$

Παράδειγμα Ἡ θερμοκρασία σὲ κυκλικὸ δίσκο ἀκτίνας 1 δίνεται ἀπὸ τὴν $T(x,y) = x^2 - y^2$. Νὰ βρεθεῖ ὁ ρυθμὸς μεταβολῆς τῆς T ὡς πρὸς τὸν χρόνο στὸν ἐξωτερικὸ κύκλο τοῦ δίσκου.

Τότε, ἔχουμε τὴν καμπύλη $c(t) = (\cos t, \sin t)$ ποὺ παριστάνει τὸν ἐξωτερικὸ κύκλο τοῦ δίσκου.

Εἶναι $\frac{\partial T}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -2y$

$\frac{dx}{dt} = -\sin t \quad \frac{dy}{dt} = \cos t$. Ἄρα

$$\frac{d(T\circ c)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = -2x\sin t - 2y\cos t$$

$$= -2\cos t\sin t - 2\sin t\cos t$$

$$= -4\cos t\sin t$$

Περίπτωση II του κανόνα της αλυσίδας

$$z = f(x,y) \qquad x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$$

Τότε, η σύνθετη $z = f(x(u,v), y(u,v))$ είναι μία συνάρτηση των u,v και είναι

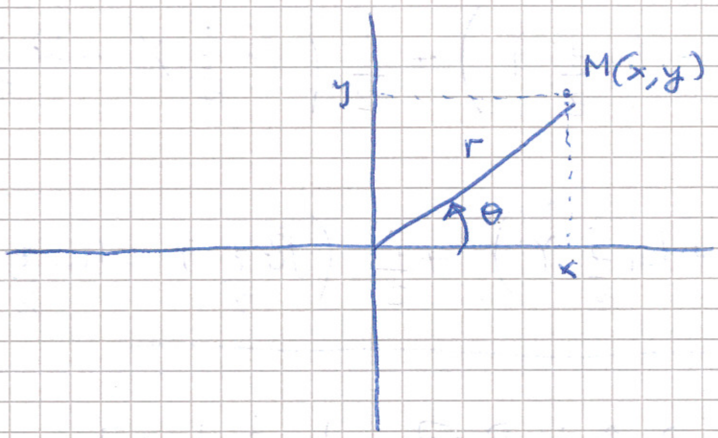
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

Το κλασικό παράδειγμα είναι όταν $x = x(r,\theta) = r\cos\theta$

$y = y(r,\theta) = r\sin\theta$

Είναι ο μετασχηματισμός των πολικών συντεταγμένων:



Δείτε ότι

$$r^2 = x^2 + y^2$$

δηλαδή

$$r = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}. \quad (x \neq 0)$$

Είναι $\dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \qquad \dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$

$\dfrac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \qquad \dfrac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$

Έτσι, αν $z = f(x,y)$ και $x = x(r,\theta)$, $y = y(r,\theta)$ όπως παραπάνω,

Παίρνουμε

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta).$$

Παρατηρῆστε τὰς δύο αὐτὲς ἐξισώσεις· οὐσιαστικὰ πρόκειται γιὰ ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ "ἀγνώστους" $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

Ἡ ὁρίζουσα τοῦ συστήματος εἶναι $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

Ὁπότε, ἂν $r \neq 0$, παίρνουμε

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} & \sin\theta \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & r\cos\theta \end{vmatrix}}{r} = \cos\theta \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} \cos\theta & \frac{\partial z}{\partial r} \\ -r\sin\theta & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}}{r} = \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} + \sin\theta \frac{\partial z}{\partial r}$$

Βρήκαμε δηλαδὴ πάλι τὸν κανόνα τῆς ἀλυσίδας ἀπὸ τὴν ἀνάποδη. Αὐτὸ δὲν εἶναι δυνατὸ σὲ ὅλες τὶς περιπτώσεις.

Δοθέντος $x = x(u,v)$ $y = y(u,v)$,

δὲν σημαίνει καθόλου ὅτι μποροῦμε νὰ λύσουμε

$$u = u(x,y) \qquad v = v(x,y).$$

Αὐτὸ γίνεται σὲ πολὺ καλοὺς μετασχηματισμούς· ἕνας ἐξ αὐτῶν εἶναι καὶ ὁ μετασχηματισμὸς τῶν πολικῶν συντεταγμένων.

Νὰ παρατηρήσουμε μόνο, ὅτι ἐνδέχεται μὲν νὰ μὴν μποροῦμε νὰ λύσουμε τὸν τυχαῖο μετασχηματισμὸ $x = x(u,v)$ $y = y(u,v)$ ὡς $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, ἀλλά, ἐὰν ἱκανοποιεῖται μία συγκεκριμένη συνθήκη, τότε μποροῦμε νὰ ὑπολογίσουμε τὶς $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, ἀπὸ τὶς $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$. Ἀλλὰ αὐτό, θὰ τὸ δοῦμε λίγο ἀργότερα.