

**Μ104 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2–ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ**

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΩΝ MARSDEN–TROMBA

1. Ασκήσεις της Παραγράφου 3.3. Οι 1–8 είναι εύκολες. Οι 9–10 έχουν μικρή δυσκολία.
2. Ασκήσεις της Παραγράφου 3.4. Σε πρώτη φάση μπορείτε να παραλείψετε τις 12–15.
2. Ασκήσεις της Παραγράφου 3.5. Όλες είναι υπολογιστικές. Οι 11 και 12 είναι σημαντικές, θα θυμηθείτε τον κανόνα της αλυσσίδας και τις πολικές, σφαιρικές συντεταγμένες.

2. ΔΙΑΦΟΡΕΣ

1. Έστω το διανυσματικό πεδίο $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $F(x, y) = (4x, 2y)$.
 - (1) Είναι το F πεδίο κλίσεων; Δικαιολογήστε.
 - (2) Έστω $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ γραμμή ροής του F . Δείξτε ότι οι παρακάτω δ. ε. ικανοποιούνται:

$$\dot{x}(t) = 4x(t), \quad \dot{y}(t) = 2y(t).$$

- (3) Λύνοντας τις παραπάνω δ. ε. δείξτε ότι οι γραμμές ροής είναι παραβολές. Σχεδιάστε.
2. Έστω το διανυσματικό πεδίο $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $F(x, y, z) = (2xz, xyz, y^3xz)$ και η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = x^2yz$. Υπολογίστε τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} & a) \nabla f, \quad b) \operatorname{div} F, \quad c) \operatorname{curl} F, \quad d) F \times \nabla f, \\ & e) F \cdot \nabla f, \quad f) \nabla(F \cdot \nabla f), \quad g) \operatorname{div}(\operatorname{curl} F). \end{aligned}$$

3. Δώστε συνθήκες ώστε $\operatorname{curl} F \perp F$.
4. Έστω το διανυσματικό πεδίο

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

- (1) Αν \mathbf{u} είναι μοναδιαίο διάνυσμα, τότε δείξτε ότι η $\gamma(t) = t\mathbf{u}$ είναι γραμμή ροής του F .
 - (2) Δείξτε ότι $\operatorname{div} F > 0$ στο πεδίο ορισμού του F .
 - (3) Δείξτε ότι $\operatorname{curl} F = 0$. Σχεδιάστε και εξηγήστε.
5. Έστω το διανυσματικό πεδίο

$$F(x, y, z) = (3x^2y, x^3 + y^3, 0).$$

Δείξτε ότι $\operatorname{curl} F = \mathbf{0}$ και βρείτε συνάρτηση f ώστε $\nabla f = F$.