

**Μ104 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 24/01/2012**

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ

- (1) Όσοι/ες επιθυμούν να κρατήσουν τον βαθμό της προόδου, γράφουν μόνο τα θέματα του δεύτερου μέρους (θέματα 4,5 και 6). Άριστα το 50. Διάρκεια εξέτασης 90 λεπτά.
- (2) Οι υπόλοιποι/ες γράφουν όλα τα θέματα. Υποχρεωτικά πρέπει να γράψουν τουλάχιστον ένα θέμα από κάθε μέρος. Άριστα το 100. Διάρκεια εξέτασης 180 λεπτά.

1. ΜΕΡΟΣ Ι

1. **(15)** Διατυπώστε το Θεώρημα του Green και εξετάστε αν ισχύει όταν

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

στον μοναδιαίο δίσκο $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Πληροί το F τις προϋποθέσεις του θεωρήματος;

2. **(20)** Διατυπώστε το Θεώρημα του Stokes και εξετάστε εάν ισχύει όταν S είναι το άνω ημισφαίριο με τύπο $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, προσανατολισμένο με το κάθετο διάνυσμα να δείχνει προς τα έξω, με συνοριακή καμπύλη C , και F το διανυσματικό πεδίο

$$F(x, y, z) = (z^2, y^2, 0).$$

3. **(15)** Βρείτε συνάρτηση δυναμικού ϕ για το διανυσματικό πεδίο F του \mathbb{R}^2 με τύπο

$$F(x, y) = (y^2 - x^2, 2xy)$$

τέτοια ώστε $\phi(0, 0) = 0$. Κατόπιν, και χωρίς να κάνετε ιδιαίτερες πράξεις βρείτε την λύση του προβλήματος αρχικής τιμής

$$(y^2 - x^2)dx + 2xydy = 0, \quad y(0) = 0.$$

Γυρίστε σελίδα

2. ΜΕΡΟΣ ΙΙ

4. (15) Με την μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων, να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - y' - 2y = f(x),$$

όπου f είναι συνεχής συνάρτηση του \mathbb{R} .

5. (15) Λύστε το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y'(x) = y^{1/3}, \quad y(0) = 0.$$

Παρατηρήστε ότι και η $y(x) = 0$ είναι επίσης μία λύση που δεν προκύπτει όμως από το γενικό ολοκλήρωμα. Τι μπορείτε να πείτε σε σχέση με το Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας;

6. (20) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

με τη μέθοδο των πινάκων.

Καλή επιτυχία.