ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Χειμερινό εξάμηνο 2012-13

Μ214 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Βρείτε ένα κανονικό τμήμα επιφάνειας για τον ορθό κύλινδρο που έχει οδηγό την έλλιψη

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

του επιπέδου xy.

2. Βρείτε έναν λείο άτλαντα του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

(Υπόδειξη: εργαστείτε με όμοιο τρόπο όπως στην S^2).

3. Βρείτε την εξ·ισωση του καθέτου επιπ΄δου και της κάθετης ευθείας του τμήματος επιφάνειας

$$\sigma(u,v)=(u+v,u-v,uv)$$

στο σημείο $(0,2,-1)$.

4. Έστω τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} U_1&=\{(\theta,\phi)\in(0,2\pi)\times(0,2\pi)\}\\ U_2&=\{(\theta,\phi)\in(-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi)\}\\ U_3&=\{(\theta,\phi)\in(-\pi/2,3\pi/2)\times(-\pi/2,3\pi/2)\}\end{aligned}$$

και η απεικόνιση $\sigma:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\sigma(\theta,\phi)=((b+a\sin\phi)\cos\theta,(b+a\sin\phi)\sin\theta,a\cos\phi)\,.$$

Δείξτε ότι οι χάρτες (U_i,σ) σχηματίζουν έναν λείο άτλαντα για τόν τόρο.

5. Ποιες από τις επόμενες επιφάνειες είναι συμπαγείς;

(1) $x^2-y^4+z^6=1$,
(2) $x^2-2x+y^2+z^4=1$.

(Απάντηση: (1) όχι (2) ναι).

6.$*$ Έστω $\mathcal{S}$ λεία επιφάνεια και $f:\mathcal{S}\to\mathbb{R}$ λεία συνάρτηση. Έστω $p\in\mathcal{S}$. Το *διαφορικό* df_p της f στο p είναι μία απεικόνιση $T_p(\mathcal{S})\to\mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής: έστω $\mathbf{v}\in T_p(\mathcal{S})$ και γ επιφανειακή καμπύλη που περνά από το p με $\dot\gamma(t_0)=\mathbf{v}$ για κάποιο t_0. Η $\tilde f=f\circ\gamma$ είναι μια συνάρτηση του $\mathbb{R}$ και έστω $v=\dot{\tilde f}(t_0)$. Ορίζουμε

$$df_p(\mathbf{v})=v.$$

Εργαστείτε όπως στην παράγραφο 4.4 για να δείξετε ότι ο ορισμός εξαρτάται μόνο από τα $f, p, \mathbf{v}$. Επίσης, αν σ είναι τμήμα επιφάνειας που περιέχει το p, και

$$f(\sigma(u,v)) = g(u,v), \quad p = \sigma(u_0, v_0)$$

τότε

$$df_p(\mathbf{v}) = df_p(\lambda\sigma_u(u_0,v_0) + \mu\sigma_v(u_0,v_0)) = \nabla g(u_0,v_0) \cdot (\lambda, \mu).$$

7. Θεωρήστε το ανοικτό άνω ημισφαίριο

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2}, \quad (x,y) \mid x^2+y^2<1$$

και την παραμέτρηση

$$\sigma(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}).$$

Βρείτε τα σ_u, σ_v και το τυπικό μοναδιαίο κάθετο $\mathbf{N}$. Βρείτε επίσης τις παραμετρικές καμπύλες $u =$σταθ. και $v =$σταθ. και εντοπίστε τα σημεία όπου αυτές τέμνοντα κάθετα. Υπάρχουν σημεία του ημισφαιρίου όπου η βάση σ_u, σ_v είναι ορθομοναδιαία;