ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2015–16

ΜΕΜ 216 ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ 10

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Εξωτερικη Αλγεβρα

1. Έστω $V = \mathbb{R}^n$ και $B = \{e_1, ..., e_n\}$ η κανονική βάση του και $B^* = \{e_1^*, ..., e_n^*\}$ είναι η δυϊκή βάση της B.

α) Δείξτε ότι αν $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ τότε $e_i^*(x) = x_i$, για κάθε $i = 1, ..., n$ και

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega(e_i)x_i$$

για κάθε αντισυμμετρικό τανυστή $\omega \in \Lambda^1(V)$.

β) Δείξτε ότι αν $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ τότε

$$(e_i^* \wedge e_j^*)(x, y) = x_i y_j - x_j y_i$$

και

$$\omega(x, y) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \omega(e_i, e_j)(x_i y_j - x_j y_i).$$

για κάθε αντισυμμετρικό τανυστή $\omega \in \Lambda^2(V)$.

γ) Έστω $\omega = e_1^* \wedge ... \wedge e_n^*$. Δείξτε ότι για κάθε $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^n$,

$$\omega(x_1, ..., x_n) = \det(x_1, ..., x_n).$$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον τύπο

$$\omega(x_1, ..., x_n) = \det(x_1, ..., x_n)\omega(e_1, ..., e_n).)$$

2. Έστω $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^4)$ με

$$\omega(x) = x_1 + 2x_4$$

για κάθε $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, και $\theta \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ με

$$\theta(x, y) = 3(x_2 y_4 - x_4 y_2) + 4(x_3 y_4 - x_4 y_3).$$

για κάθε $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$.

α) Δείξτε ότι αν B είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$ και B^* η δυϊκή της τότε

$$\omega = e_1^* + 2e_4^*$$

και

$$\theta = 3e_2^* \wedge e_4^* + 4e_3^* \wedge e_4^*.$$

(Υπόδειξη: Συμβουλευτείτε την προηγούμενη άσκηση).

β) Εάν x, y, z είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^4$ βρείτε την τιμή

$$(\omega \wedge \theta)(x, y, z).$$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το α) και τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου για να δείξετε ότι

$$\omega \wedge \theta = 3e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_4^* + 4e_1^* \wedge e_3^* \wedge e_4^*.$$

Τώρα,

$$(\omega \wedge \theta)(x, y, z) = (\omega \wedge \theta)(\sum_{i=1}^{4} x_i e_i, \sum_{i=1}^{4} y_i e_i, \sum_{i=1}^{4} z_i e_i) =$$

λόγω γραμμικότητος

$$\sum_{1 \leq i,j,k \leq 4} (\omega \wedge \theta)(e_i, e_j, e_k) x_i y_j z_k = ...)$$

3. Δείξτε ότι αν V, W είναι δ.χ., $f : V \to W$ γραμμική απεικόνιση, $f^* : \Lambda^k(W) \to \Lambda^k(V)$ η απεικόνιση pull-back για κάθε $k = 1, ..., \dim W$ και $\omega \in \Lambda^r(W), \theta \in \Lambda^s(W)$, $r, s \leq \dim W$ τότε

$$f^*(\omega \wedge \theta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\theta).$$

(Υπόδειξη: Ξεκινήστε ως εξής:

$$(f^*(\omega \wedge \theta))(v_1, ..., v_r, ..., v_{r+s}) = (\omega \wedge \theta)(f(v_1), ..., f(v_r), ..., f(v_{r+s})) =$$

$$\frac{(r+s)!}{r!s!} Alt(\omega \otimes \theta)(f(v_1), ..., f(v_r), ..., f(v_{r+s})) = ...)$$

4. Έστω V δ.χ., $v \in V$. Για κάθε $k \geq 1$ και για κάθε $T \in T^k(V)$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$i_v : T^k(V) \to T^{k-1}(V)$$

όπου

$$(i_v T)(v_1, ..., v_k) = T(v_1, .., v_k, v).$$

α) Δείξτε ότι η i_v είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ο $i_v T$ είναι τανυστής $k-1$ τάξεως. Εάν $B = \{e_1, ..., e_n\}$ μια βάση του V και

$$T = \sum_{1 \leq i_1, ..., i_k \leq n} T(e_{i_1}, ..., e_{i_k}) e_{i_1}^* \otimes ... \otimes e_{i_k}^*$$

δείξτε ότι αν $v = v_1 e_1 + ... + v_n e_n$ τότε

$$i_v T = \sum_{i=1}^{n} v_i (i_{e_i} T).$$

β) Έστω $V = \mathbb{R}^2$, $v = (v_1, v_2) \in V$ και

$$T = E e_1^* \otimes e_1^* - F(e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_1^*) + G e_2^* \otimes e_2^*$$

όπου $E, F, G \in \mathbb{R}$. Δείξτε χρησιμοποιώντας το α) ότι

$$i_v T = (E v_1 - F v_2) e_1^* + (G v_2 - F v_1) e_2^*.$$

γ) Δείξτε ότι αν $S \in T^k(V)$ και $T \in T^l(V)$

$$S \otimes (i_v T) = i_v(S \otimes T).$$