ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2015–16

ΜΕΜ 216 ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ 11

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Διαφορικές Μορφές

1. Έστω οι μορφές του $\mathbb{R}^3$:

$$\omega = xdx - ydy$$
$$\eta = zdx \wedge dy + xdy \wedge dz$$
$$\theta = zdy$$

α) Υπολογίστε τις $\omega \wedge \eta$, $\eta \wedge \theta$, $\theta \wedge \omega$, $d\omega$, $d\eta$, $d\theta$.

β) Έστω $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με

$$i(x, y) = (x, y, 0).$$

Δείξτε ότι $(i^*dx) = dx$, $(i^*dy) = dy$, $(i^*dz) = 0$ και κατόπιν υπολογίστε τα pull-back των μορφών του α) χρησιμοποιώντας και τις γνωστές σας ιδιότητες.

2. α) Γενικεύστε το προηγούμενο αποτέλεσμά σας ως εξής: έστω

$$i : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$$

με

$$i(x_1, ..., x_{n-1}) = (x_1, ..., x_{n-1}, 0).$$

Δείξτε ότι αν

$$\omega_x = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} \omega_{i_1 ... i_k}(x) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

είναι μια $k-$μορφή του $\mathbb{R}^n$ όπου $x = (x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$ τότε

$$(i^*\omega)_{(x_1,..,x_{n-1})} = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n-1} \omega_{i_1 ... i_k}(x_1, ..., x_{n-1}, 0) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}.$$

β) Έστω

$$s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$$

με

$$s(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = (x_1, ..., x_{n-1}).$$

Δείξτε ότι αν

$$\omega_x = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n-1} \omega_{i_1 ... i_k}(x) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

είναι μια $k-$μορφή του $\mathbb{R}^{n-1}$ όπου $x = (x_1, ..., x_{n-1})$ τότε

$$(s^*\omega)_{(x_1,..,x_{n-1},x_n)} = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n-1} \omega_{i_1 ... i_k}(x_1, ..., x_{n-1}) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

γ) Μπορείτε να εξηγήσετε χωρίς να κάνετε καθόλου πράξεις γιατί

$$i^*(dx_1 \wedge ... \wedge dx_n) = 0;$$

3. Η απόκλιση (divergence). Ως γνωστόν ένα διανυσματικό πεδίο X του $\mathbb{R}^n$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια διαφορίσιμη απεικόνιση $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $F = (f_1, ..., f_n)$ με τον εξής τρόπο: Αν $p \in \mathbb{R}^n$ τότε

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} f_i(p)(e_i)_p$$

όπου βεβαίως $B_p = \{(e_1)_p, ..., (e_n)_p\}$ είναι η κανονική βάση του $T_p(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε την απόκλιση $divX$ του X να είναι η συνάρτηση με τύπο

$$(divX)(p) = trace(DF)(p)$$

όπου $DF(p)$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της F στο p. Δείξτε ότι

$$divX = \sum_{i=1}^{n}(df_i)(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

και δείξτε ότι αν X είναι το διανυσματικό πεδίο που ορίζεται από την $F(x) = x$ στο $\mathbb{R}^n$ τότε $divX = n$.

4. Η βαθμίδα (gradient). Δίνεται C^∞ συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$ και $x_p \in T_p(\mathbb{R}^n)$ ορίζουμε $gradf$ να δίνεται από την σχέση

$$< gradf(p), x_p >= df_p(x_p).$$

Δείξτε ότι

$$gradf = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i$$

και συνεπώς το $gradf$ είναι ένα καλώς ορισμένο διανυσματικό πεδίο. Βρείτε έπειτα το $div(gradf)$.

(Υπόδειξη: αποδείξτε πρώτα πως αν

$$x_p = \sum_{i=1}^{n} a_i(e_i)_p \in T_p(\mathbb{R}^n)$$

τότε

$$a_i =< x_p, (e_i)_p >$$

Άρα,

$$gradf_p = \sum_{i=1}^{n} < gradf_p, (e_i)_p > (e_i)_p = ...$$

Για το $divgradf$ ισχύει

$$divgradf = \Delta f$$

όπου Δ ο γνωστός τελεστής του Laplace:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}).$$