ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2015–16

ΜΕΜ 216 ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ
ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ
05/12/2015

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. **(15)** Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(A)$.

α) Υποθέτουμε ότι για δύο σημεία P_1 και P_2 του A, το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει κείται ολόκληρο εντός του A. Δείξτε τότε ότι υπάρχει $P \in A$ τέτοιο ώστε

$$f(P_2) - f(P_1) = \nabla f(P) \cdot (P_2 - P_1).$$

Εδώ, $\nabla f(P)$ είναι η κλίση της f στο P, το $\cdot$ συμβολίζει εσωτερικό γινόμενο και το $P_2 - P_1$ είναι το διάνυσμα με αρχή το P_1 και τέλος το P_2.

Λύση. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $l(t) = P_1 + t(P_2 - P_1)$, $t \in [0, 1]$, ώστε

$$l(0) = P_1, \quad l(1) = P_2.$$

Η συνάρτηση $g = f \circ l : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στη μία μεταβλητή. Κατά συνέπεια, Υπάρχει $t_0 \in (0, 1)$ ώστε

$$g'(t_0) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = f(P_2) - f(P_1).$$

Τώρα από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$g'(t_0) = f'(l(t_0))l'(t_0) = f'(l(t_0)).$$

Θέτοντας $P_0 = l(t_0)$, εξισώνουμε και παίρνουμε το ζητούμενο.

β) Υποθέτουμε τώρα ότι το A είναι *κυρτό*: για κάθε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του A,το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει κείται ολόκληρο εντός του A. Υποθέτουμε επίσης ότι η f έχει φραγμένη παράγωγο στο A. Δείξτε τότε ότι η f είναι *συνάρτηση Lipschitz*: υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε P_1 και P_2 σημεία του A ισχύει:

$$|f(P_2) - f(P_1)| \leq K|P_2 - P_1|.$$

Λύση. Υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε $|\nabla f(P)| \leq K$ για κάθε $P \in A$. Τότε, λόγω της κυρτότητας έχουμε από το α),

$$\begin{aligned} |f(P_2) - f(P_1) &= |\nabla f(P)||P_2 - P_1| \\ &\leq K|P_2 - P_1|. \end{aligned}$$

γ) Με τις προϋποθέσεις του β), δείξτε ότι η f είναι σταθερή αν και μόνο αν $\nabla f \equiv 0$ στο A.

Λύση. Αν η f είναι σταθερή, τότε προφανώς $\nabla f \equiv 0$ στο A. Αντιστρόφως, αν $\nabla f \equiv 0$ στο A, τότε από το α), για οποιαδήποτε δύο σημεία $P_1, P_2 \in A$ έχουμε

$$f(P_1) - f(P_2) = 0,$$

δηλαδή η f είναι σταθερή στο A.

2. **(15)** Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(A)$. Θεωρήστε την $f' : A \to \mathbb{R}^n$, όπου

$$f' = (D_1 f, \ldots, D_n f),$$

και την δεύτερη παράγωγο $f'' = ((f')^T)'$.

α) Γράψτε αναλυτικά τόν Ιακωβιανό πίνακα της f'' και δείξτε ότι το ίχνος του είναι ίσο με τη *Λαπλασιανή* της f, δηλαδή με

$$\Delta f = \sum_{i=n}^{n} D_{ii} f.$$

Λύση. Ο Ιακωβιανός πίνακας:

$$\begin{pmatrix} D_{11}f & D_{21}f & \ldots & D_{n1}f \\ D_{12}f & D_{22}f & \ldots & D_{n2}f \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ D_{1n}f & D_{2n}f & \ldots & D_{nn}f \end{pmatrix}.$$

Ο τύπος της Λαπλασιανής είναι τώρα προφανής.

β) Για την περίπτωση όπου $n = 2$, δείξτε ότι αν Δf είναι η Λαπλασιανή της f και $H(f)$ είναι ή ορίζουσα του πίνακα f'', τότε έχουμε την εξής εξίσωση πινάκων σε κάθε σημείο του A:

$$(f'')^2 - \Delta f \cdot f'' + H(f) \cdot I = 0,$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας. (Υπόδειξη: το αποτέλεσμα προκύπτει μετά από αντικατάσταση και εκτέλεση (αρκετών) πράξεων. Προσπαθήστε να σκεφτείτε ποιό γνωστό θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας μας το δίνει αμέσως).

Λύση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα f'' στο τυχαίο σημείο είναι

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \Delta f \cdot \lambda + H(f).$$

Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton, $P(f'') = 0$ που είναι ακριβώς ο ζητούμενος τύπος.

γ) Με τη βοήθεια του β), δείξτε ότι η f'' έχει ιδιοτιμή το 0 σε κάθε σημείο του A αν και μόνο αν $H(f) \equiv 0$ στο A. Αν το A είναι επίσης κυρτό, δείξτε τότε ότι η f είναι γραμμική απεικόνιση από το A στο $\mathbb{R}$ (δηλαδή παριστάνει ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$) συνεπάγεται ότι $H(f) \equiv 0$ στο A.

Λύση. Το 0 είναι ιδιοτιμή σε κάθε σημείο του A αν και μόνο αν $P(0) = 0$, ισοδύναμα $H(f) \equiv 0$ στο A. Αν το A κυρτό, η f είναι γραμμική απεικόνιση αν και μόνο αν $f'' = 0$ (επαναλαμβάνουμε δύο φορές το αποτέλεσμα του πρώτου θέματος). Συνεπάγεται (προφανώς) $H(f) \equiv 0$.

3. (**25**) Μία $\mathcal{C}^1$ τρισδιάστατη υπερεπιφάνεια $\mathcal{S}$ του $\mathbb{R}^4$ μπορεί να οριστεί από τον τύπο

$$\Phi(x,y,z,w)=0,$$

όπου $\Phi\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^4)$, δηλεδή ως το σύνολο μηδενικής στάθμης L_0 της Φ. Έστω $P_0=(x_0,y_0,z_0,w_0)\in L_0$.

α) Βρείτε συνθήκη ώστε σε περιοχή U του $Q_0=(x_0,y_0,z_0)$, το w να εκφράζεται ως $\mathcal{C}^1$ συνάρτηση

$$w=f(x,y,z).$$

Υπολογίστε κατόπιν τις μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial f}{\partial x}(Q_0),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(Q_0),\quad \frac{\partial f}{\partial z}(Q_0),$$

βάσει των μερικών παραγώγων της Φ.

Λύση. Από το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων η συνθήκη είναι

$$\frac{\partial \Phi}{\partial w}(P_0)\neq 0.$$

Για την μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial x}(Q_0)$ παραγωγίζουμε τη σχέση

$$\Phi(x,y,z,f(x,y,z))=0$$

ως προς x στο P_0:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(P_0)\cdot\frac{\partial x}{\partial x}(Q_0)+\frac{\partial \Phi}{\partial y}(P_0)\cdot\frac{\partial y}{\partial x}(Q_0)+\frac{\partial \Phi}{\partial z}(P_0)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(Q_0)+\frac{\partial \Phi}{\partial w}(P_0)\cdot\frac{\partial w}{\partial x}(Q_0)=0.$$

Επειδή

$$\frac{\partial x}{\partial x}(Q_0)=1,\quad \frac{\partial y}{\partial x}(Q_0)=0,\quad \frac{\partial z}{\partial x}(Q_0)=0,\quad \frac{\partial w}{\partial x}(Q_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(Q_0),$$

έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(Q_0)=-\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}(P_0)}{\frac{\partial \Phi}{\partial w}(P_0)}.$$

Παρομοίως, παραγωγίζοντας ως προς y και z έχουμε αντίστοιχα

$$\frac{\partial f}{\partial y}(Q_0)=-\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}(P_0)}{\frac{\partial \Phi}{\partial w}(P_0)},\quad \frac{\partial f}{\partial z}(Q_0)=-\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial z}(P_0)}{\frac{\partial \Phi}{\partial w}(P_0)}.$$

β) Εξηγήστε με βάση το α) και το Θεώρημα Αντιστροφής το πότε οι συντεταγμένες (x,y,z,w) του $\mathbb{R}^4$ μπορούν να αντικατασταθούν σε περιοχή του P_0 με τις

$$(x,y,z,w'=w-f(x,y,z)).$$

Δείξτε ότι κάτι τέτοιο συμβαίνει για τήν μοναδιαία σφαίρα $x^2+y^2+z^2+w^2=1$ του $\mathbb{R}^4$ σε κάθε σημείο της (x,y,z,w) με $w\neq 0$. Ποιές είναι οι νέες συντεταγμένες τότε;

Λύση. Ο Ιακωβιανός πίνακας του μετασχηματισμού

$$(x,y,z,w)\mapsto(x,y,z,w')$$

είναι ο

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\f_x&f_y&f_z&1\end{pmatrix}$$

και προφανώς έχει ορίζουσα 1 παντού στο $U \times I$ όπου I περιοχή του 0. Από το Θεώρημα Αντιστροφής, οι (x, y, z, w) μπορούν εκεί να αντικατασταθούν από τις (x, y, z, w') και με αυτές τις συντεταγμένες η $\mathcal{S}$ έχει εξίσωση $w' = 0$. Γιά τη μοναδιαία σφαίρα, εάν $w \neq 0$ οι νέες συντεταγμένες είναι οι

$$(x, y, z, w \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}).$$

(Το πρόσημο στην τέταρτη συντεταγμένη εξαρτάται από το πρόσημο του w).

γ) Η απεικόνιση $\sigma : U \to \mathbb{R}^4$, όπου

$$\sigma(x, y, z) = (x, y, z, f(x, y, z)),$$

λέγεται *τοπική παραμέτρηση* της $\mathcal{S}$ (τα U και f είναι όπως στο α)). Βρείτε χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα αποτελέσματα τήν παράγωγο (Ιακωβιανό πίνακα) $\sigma'(Q_0)$. Δείξτε κατόπιν ότι το διάνυσμα

$$\mathbf{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(Q_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(Q_0), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(Q_0), \quad -1 \right)$$

του $\mathbb{R}^4$ ικανοποιεί τη σχέση πινάκων $\mathbf{N}(\sigma'(Q_0)) = 0$.

Λύση.

$$\sigma'(Q_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ f_x(Q_0) & f_y(Q_0) & f_z(Q_0) \end{pmatrix}.$$

Τώρα

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\sigma'(Q_0) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(Q_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(Q_0), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(Q_0), \quad -1 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ f_x(Q_0) & f_y(Q_0) & f_z(Q_0) \end{pmatrix} \\ &= (0\ 0\ 0). \end{aligned}$$

δ) Το $\mathbf{N}$ καλείται *εσωφερές κάθετο διάνυσμα* της $\mathcal{S}$ στο P_0. Για τη μοναδιαία σφαίρα του β) δείξτε ότι το εσωφερές κάθετο διάνυσμά της σε κάθε σημείο που ορίζεται, είναι παράλληλο με το μοναδιίο διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος το δοθέν σημείο.

Λύση. Σε κάθε σημείο που ορίζεται, το $\mathbf{N}$ είναι παράλληλο με το

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right) = (2x, 2y, 2z, 2w),$$

που με τη σειρά του είναι παράλληλο με το (x, y, z, w).

ε) Έστω $I = (-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon > 0$, ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ και $\tilde{\gamma} : I \to U$ καμπύλη

$$\tilde{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I,$$

με $\tilde{\gamma}(0) = Q_0$, (το Q_0 όπως στο α)). Τότε η $\gamma : I \to \mathbb{R}^4$, όπου

$$\gamma(t) = (\sigma \circ \tilde{\gamma})(t) = (x(t), y(t), z(t), f(x(t), y(t), z(t))),$$

είναι μία καμπύλη που ανήκει στην $\mathcal{S}$ και ικανοποιεί $\gamma(0) = P_0$ (δηλαδή περνά από το P_0). Βρείτε την $\gamma'(0)$ και δείξτε ότι

$$\gamma'(0) \cdot \mathbf{N} = 0.$$

(Η παραπάνω σχέση μας δείχνει το γιατί όντως το $\mathbf{N}$ καλείται *κάθετο* διάνυσμα της $\mathcal{S}$: είναι κάθετο σέ *κάθε* καμπύλη της $\mathcal{S}$ που περνά από το P_0).

Λύση. Με τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned}
\gamma'(0) &= \sigma'(Q_0)\tilde{\gamma}'(0) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ f_x(Q_0) & f_y(Q_0) & f_z(Q_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ z'(0) \\ f_x(Q_0)x'(0) + f_y(Q_0)y'(0) + f_z(Q_0)z'(0) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση τώρα είναι προφανής.

Η αξία των θεμάτων είναι 55 μονάδες. Άριστα το 40. Διάρκεια: 2 ώρες.