ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΔΕΣΜΗ

Ἡ ἐφαπτόμενη δέσμη μιᾶς πολλαπλότητας M εἶναι ἡ ἕνωση ὅλων τῶν ἐφαπτόμενων χώρων τῆς M. Ἄς δοῦμε τί ξέρουμε ἤδη γιά τό $\mathbb{R}^m$.

$$T\mathbb{R}^m = \{(p,v) \mid p\in\mathbb{R}^m, v\in T_p(\mathbb{R}^m)\}$$

Ὑπάρχει μία φυσιολογική προβολή $\pi:(p,v)\to p$ καί $\pi^{-1}(p)=T_p(\mathbb{R}^m)$. Θυμηθεῖτε ὅτι ἕνα διανυσματικό πεδίο στό $\mathbb{R}^m$ ἦταν μία ἀπεικόνιση $X:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ τήν ὁποία ἄν θέλουμε νά δοῦμε ὡς $X:\mathbb{R}^m\to T\mathbb{R}^m$ τήν γράφουμε

$$X: p \longmapsto (p, X_p)$$

Ἔστω $X=\sum_{k=1}^{m} a_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ $\quad Y=\sum_{k=1}^{m} b_k\frac{\partial}{\partial y_k}$ $\quad a_k, b_k \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$

Ὁ <u>μεταθέτης</u> (ἀγκύλη Lie) ὁρίζεται ὡς

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

(Δῶστε τύπο γιά τό $[X,Y]$ μέσω τῶν παραπάνω ἐκφράσεων)

καί εἶναι κ' αὐτός διανυσματικό πεδίο τοῦ $\mathbb{R}^m$. Παρατηρῆστε ὅτι ὁ μεταθέτης μπορεῖ νά ὁριστεῖ κ' κατά σημεῖο σέ κάποιον $T_p(\mathbb{R}^m)$.

<u>Τοπολογική διανυσματική δέσμη</u> Ἐάν E,M τοπολογικές πολ/τες καί $\pi: E\to M$ συνεχής, τότε ἡ τριάδα $(\pi; E,M)$ λέγεται n-διάστατη τοπολογική διανυσματική δέσμη ἐπάνω ἀπό τό M ἄν

i) $\forall p\in M$, $\pi^{-1}(p)\simeq\mathbb{R}^n$ ὡς δ.χ.

ii) $\forall p\in M$, ὑπάρχει <u>τοπικός χάρτης δέσμης</u> $(\pi^{-1}(U_p), \varphi)$

πού περιέχει τήν προεικόνα κάποιας περιοχής U_p καί ένα ὁμοιομορφισμό $\psi: \pi^{-1}(U_p) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$ τέτοιον ὥστε ἡ

$$\psi_q = \psi\big|_{E_q} : E_q \longrightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^n$$

νά εἶναι ἰσομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Ένας ἄτλας δέσμης γιά τήν $(\pi; E, M)$ εἶναι μιά συλλογή

$$\mathcal{B} = \{\pi^{-1}(U_a), \psi_a) \mid a \in I\}$$

τοπικών χαρτών δέσμης ὥστε $M = \bigcup_a U_a$ καί γιά κάθε $a, \beta \in I$ $\exists$ $A_{a\beta} : U_a \cap U_\beta \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$ τέτοια ὥστε ἡ ἀντίστοιχη συνεχής ἀπεικόνιση

$$\psi_\beta \circ \psi_a^{-1}\Big|_{(U_a \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n} : (U_a \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \to (U_a \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$$

νά δίνεται ἀπό τήν $(p, v) \longmapsto (p, [A_{a\beta}(p)](v))$

Οἱ $A_{a,\beta}$ λέγονται ἀπεικονίσεις μετάβασης τοῦ ἄτλαντα δέσμης $\mathcal{B}$.

Τομή n-διάστατης τοπολογικῆς δέσμης λέγεται μιά ἀπεικόνιση $s: M \to E$ ἐάν $(\pi \circ s)(p) = p$ $\forall p \in M$.

Τετριμμένη λέγεται ἡ τοπολογική δέσμη $(\pi; E, M)$ γιά τήν ὁποία ὑπάρχει ὁλικός χάρτης δέσμης $\psi: E \longrightarrow M \times \mathbb{R}^n$.

Παραδείγματα τοπολογικῶν διανυσματικῶν δεσμῶν.

1. $M = S^1$ $E = S^1 \times \mathbb{R}$ $\pi: E \to M$ $\pi(z, t) = z$. Τετριμμένη ευθειακή δέσμη: $\psi: S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$ ὁλικός χάρτης δέσμης
$(z, t) \longmapsto (z, t)$

2. Γιὰ κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$ καὶ κάθε τοπολογικὴ πολλαπλότητα M ἔχουμε τὴν τετριμμένη δέσμη $(\pi; M \times \mathbb{R}^n, M)$ ὅπου π ἡ προβολὴ $(p,v) \mapsto p$.

3. <u>Μὴ τετριμμένη τοπολογικὴ διανυσματικὴ δέσμη</u>

Ἔστω ὁ κύκλος $M = S^1$ ἐμφυτευμένο στὸ $\mathbb{R}^4$ $\gamma(s) = (\cos s, \sin s, 0, 0)$
Ἔστω $E =$ ἡ ταινία Möbius στὸ $\mathbb{R}^4$, $\phi : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^4$

$$\phi(s,t) = (\cos s, \sin s, 0, 0) + t\,(0, 0, \sin(s/2), \cos(s/2))$$

Ποὺ τὴν καθιστᾶ ἐπιφάνεια ἐντὸς τοῦ $\mathbb{R}^4$. Ἡ προβολὴ $\pi : E \to M$ δίνεται ἀπὸ τὴν

$$(x, y, z, \omega) \longmapsto (x, y)$$

Συνεχὴς κ' ἐπὶ καὶ ἡ τριάδα $(\pi; E, M)$ εἶναι εὐθειακὴ δέσμη ὑπεράνω τοῦ S^1. Ὅμως ἡ ταινία Möbius δὲν εἶναι προσανατολίσιμη ἄρα δὲν εἶναι ὁμοιομορφικὴ μὲ τὸ $S^1 \times \mathbb{R}$. Ἄρα ἡ $(\pi; E, M)$ δὲν εἶναι τετριμμένη.

<u>Λεῖες διανυσματικὲς δέσμες</u> E, M διαφορίσιμες πολλαπλότητες $\pi : E \to M$ διαφορίσιμη ὥστε $(\pi; E, M)$ n-διάστατη τοπολογικὴ διανυσματικὴ δέσμη. Ἕνας ἄτλας δέσμης $\mathcal{B}$ γιὰ τὸ $(\pi; E, M)$ λέγεται διαφορίσιμος ἂν οἱ ἀντίστοιχες ἀπεικονίσεις μετάβασης εἶναι διαφορίσιμες. Μία λεία διανυσματικὴ δέσμη εἶναι μία τοπολογικὴ διανυσματικὴ δέσμη μὲ ἕναν μεγιστικὸ λεῖο ἄτλα δέσμης.

$C^\infty(E)$ εἶναι τὸ σύνολο ὅλων τῶν <u>λείων</u> τομῶν τῆς $(\pi; E, M)$

Στὸ ἑξῆς ὅλες οἱ διανυσματικὲς δέσμες θὰ θεωροῦνται λεῖες.

Εάν $(\pi; E, M)$ είναι διανυσματική δέσμη υπεράνω πολλαπλότητας M, ορίζουμε πράξεις στο σύνολο $C^\infty(E)$ των λείων τομών της $(\pi; E, M)$ ως εξής:

i) $(v+w)_p = v_p + w_p$

ii) $(f\cdot v)_p = f(p)\cdot v_p$ $\quad p\in M,\ v,w \in C^\infty(E)\ \ f\in C^\infty(M)$

Εάν $U\subset M$ ανοικτό, τότε το σύνολο $\{v_1,\dots,v_n\}$ των λείων τομών $v_1,\dots,v_n : U\to E$ λέγεται τοπικό πλαίσιο του E αν για κάθε $p\in U$ το σύνολο $\{v_1,\dots,v_n\}_p$ είναι βάση του E_p.

Το $C^\infty(E)$ είναι module υπεράνω του δακτυλίου $C^\infty(M)$ και ειδικότερα, δ. χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$. $=$ {σταθερές συναρτήσεις του $C^\infty(M)$}

Εφαπτόμενη δέσμη Έστω M^m C^r πολλαπλότητα με μεγιστικό άτλαντα $\mathcal{A}$. Ορίζουμε

$$TM = \{(p,v) \mid p\in M \quad v\in T_p(M)\}$$

Έστω $\pi: TM\to M$, $(p,v)\longmapsto p$ η κανονική προβολή. Η ίνα $\pi^{-1}(p) = T_pM$. Η τριάδα $(\pi; TM, M)$ καλείται εφαπτόμενη δέσμη της M.

Η εφαπτόμενη δέσμη TM της M κληρονομεί διαφορίσιμη δομή από αυτήν της M. Θα την περιγράψουμε εδώ συνοπτικά, αλλά για λεπτομέρειες δείτε την Tu ή τον Lee.

Έστω (U,x) χάρτης της M. Ορίζουμε χάρτη $(\pi^{-1}(U), x^*)$ όπου

$$x^*: \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$$

$$x^*\left(p, \sum_{k=1}^{m} v_k(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p\right) = \left(x(p), (v_1(p),\dots,v_m(p))\right) \subset \varphi(U)\times\mathbb{R}^m$$

Η αντίστροφη: $(x(p), v_1\dots,v_m) \longmapsto \sum v_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$

Μέσω τῆς x^* μεταφέρουμε τὴν τοπολογία τοῦ $x(U)\times\mathbb{R}^m$ στὸ $TU = \bigcup_{p\in U} T_pU$

ἕνα σύνολο $A\subset TU$ εἶναι ἀνοιχτὸ ἄν καὶ μόνο ἄν $x^*(A)$ εἶναι ἀνοικτὸ στὸ $x(U)\times\mathbb{R}^m$. Μὲ τὴν τοπολογία αὐτὴ ἐξ ὁρισμοῦ $TU \cong x(U)\times\mathbb{R}^m$.
Στὸ Tu θὰ δεῖτε σελ. 130-131 κ' ἐπίσης ὅτι ἡ οἰκογένεια ὅλων τῶν $T(U_a)$ $U_a\in\mathcal{A}$, $\mathcal{B}=\bigcup_a\{A \mid A\subset T(U_a)$ ἀνοιχτό, U_a τυχαία$\}$ ἀποτελεῖ βάση γιὰ τὴν τοπολογία τοῦ TM. Μὲ αὐτὴν τὴν τοπολογία ἡ ἐφαπτόμενη δέσμη εἶναι 2-ἀριθμήσιμος Hausdorff τοπολογικὸς χῶρος. Οἱ ἀπεικονίσεις μετὰ βάσης εἶναι C^r.

Διανυσματικὰ πεδία. Ἔστω $X: M\to TM$ τομὴ τῆς ἐφαπτόμενης δέσμης. Αὐτὴ λέγεται διανυσματικὸ πεδίο. Ἄν εἶναι C^∞ τότε λέγεται λεῖο διανυσματικὸ πεδίο καὶ τὸ σύνολο τῶν λείων δ.π. συμβολίζεται μὲ $C^\infty(TM)$ ($\mathfrak{X}(M)$, $\Gamma^\infty(M)$..)

Παράδειγμα. Ἡ S^3 ὡς τὸ σύνολο τῆς μοναδιαίας μπάλλας τοῦ $\mathbb{C}^2$ ἔχει ~~δομή~~ δομὴ ὁμάδας

$$(z,w)\cdot(a,\beta) = (za-w\bar\beta,\ z\beta+w\bar a)$$

Εἶναι ὁμάδα Lie. Δύο τρόποι γιὰ νὰ βροῦμε βάση γιὰ τὸ T_e:
Ὁρίζουμε $e=(1,0)$, $v_1=(i,0)$ $v_2=(0,1)$ $v_3=(0,i)$ καὶ τὶς καμπύλες

$$\gamma_k: t\to \cos t\cdot(1,0)+\sin t\cdot v_k \qquad k=1,2,3$$

Εἶναι $\gamma_k(0)=e$ καὶ $\dot\gamma_k(0)=v_k$ ἄρα ἀνήκουν στὸ $T_e(S^3)$.
Ἐπειδὴ εἶναι κ' γραμμικὰ ἀνεξάρτητα, ἀποτελοῦν βάση τοῦ $T_e(S^3)$.
Ἀπὸ τὰ διανύσματα αὐτά, κατασκευάζουμε διανυσματικὰ πεδία ὡς ἑξῆς.
Γιὰ $p\in S^3$ θεωροῦμε τὴν ἀριστερὴ μεταφορὰ $L_p: S^3\to S^3$ (ἀμφιδιαφόριση) καὶ ὁρίζουμε δ.π. X_k $k=1,2,3$

$$(X_k)_p = (DL_p)_e(v_k) = \frac{d}{dt}\left(L_p(\gamma_k(t))\right)\Big|_{t=0}$$

Άσκηση $(X_1)_{p=(z,w)} = (iz, -iw)$

$$(X_2)_p = (-w, z)$$
$$(X_3)_p = (iw, iz)$$

Αγκύλη Lie (Και πάλι, δείτε τον Tu) $X, Y \in C^\infty(M)$

$$[X,Y]_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$$
$$[X,Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))$$

Ιδιότητες: $[X,Y]_p(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda [X,Y]_p(f) + \mu [X,Y]_p(g)$

$$[X,Y]_p(f \cdot g) = [X,Y]_p(f) \cdot g(p) + [X,Y]_p(g) \cdot f(p).$$

Άσκηση βρείτε έκφραση σε τοπικές συντεταγμένες

Το παρακάτω Λήμμα (δείτε Prop. 14.2, 3 Tu) χαρακτηρίζει λεία διανυσματικά πεδία

Λήμμα Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

i) $X \in C^\infty(M)$

ii) Σε κάθε τοπικό χάρτη (U, x) $X|_U = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ $a_i : U \to \mathbb{R}$ λείες

iii) Εάν $f : V \to \mathbb{R}$ $V \subset M$ ανοιχτό $X(f) : V \to \mathbb{R}$ λεία

Παρατήρηση. $df(X) = Xf$ η διαφόριση της f.

Μέσω της παραπάνω άσκησης μπορείτε να δείξετε τώρα ότι η $[X,Y] \in C^\infty(M)$ αν $X, Y \in C^\infty(M)$, ή, αλλιώς

$$[X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf) \text{ λεία.}$$

<u>Πρόταση</u> Ἡ τομή $[X,Y] : M \to TM$ εἶναι λεῖα ἄν $X,Y \in \mathcal{C}^\infty(M)$

<u>Ἰδιότητες</u> i) $[X, fY] = Xf \cdot Y + f[X,Y]$
ii) $[fX, Y] = f\cdot[X,Y] + Yf \cdot X$

<u>Lie Ἄλγεβρα</u> Ἔστω $(V,+,\cdot)$ δ.χ μέ πράξη

$$[\ ,\ ] : V\times V \to V$$ ποὺ ἱκανοποιεῖ

i) $[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X,Z] + \mu[Y,Z]$
ii) $[X,Y] = -[Y,X]$
iii) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ (Ταυτότητα Jacobi)

Τότε λέγεται ἄλγεβρα Lie.

<u>Παράδειγμα</u> Τὸ ἐξωτερικὸ γινόμενο στόν $\mathbb{R}^3$

<u>Θεώρημα</u> Ἄν M εἶναι λεία πολλαπλότητα, τότε ὁ διανυσματικὸς χῶρος τῶν διανυσματικῶν πεδίων ἐφοδιασμένος μέ τήν ἀγκύλη Lie εἶναι ἄλγεβρα Lie.

<u>φ-συσχετισμένα διανυσματικὰ πεδία</u> Ἔστω $\phi : M \to N$ ἐπί καί X, Y στά $\mathcal{C}^\infty(TM)$ $\mathcal{C}^\infty(TN)$ ἀντίστοιχα. Ἐάν

$$D\phi_p(X_p) = Y_{\phi(p)} \quad \forall p \in M$$

τότε τά X,Y λέγονται ϕ-συσχετισμένα.

<u>Παραδείγματα</u> I $\phi : S^1 \to S^1$ $\phi(z) = z^2$. $X_z = iz$.

$$D\phi_z(X_z) = \frac{d}{d\theta}\left(\phi(ze^{i\theta})\right)\Big|_{\theta=0} = 2X_{\phi(z)}$$

2. ϕ-συσχετισμένα πεδία δεν υπάρχουν πάντα. Πάρτε $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ επί και C^1 και $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, $f(x) = f(y)$ $f'(x) \neq f'(y)$

Αν $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\gamma(t) = t$ έστω τι $X_t = \dot{\gamma}(t)$ Τότε

$$Df_t(X_t) = \frac{d(f\circ\gamma)}{dt} = f'(t)$$

Υποθέσουμε ότι υπάρχει Y, f-συσχετισμένο Τότε

$$Y_{f(x)} = Df_x(X_x) = f'(x) \neq f'(y) = Df_y(X_y) = Y_{f(y)}$$

άτοπο.

<u>Σημαντικό σχόλιο:</u> $\phi: M \to N$, $X \in C^\infty(TM)$ $\overset{d\phi(X)}{=} Y \in C^\infty(TN)$ ϕ-συσχετισμένα αν

$$D\phi_p(X_p)(f) = X_p(f\circ\phi)$$

<u>Παράδειγμα Άσκηση</u> $\phi: M \to N$ επί με $D\phi(X) = \tilde{X}$ $D\phi(Y) = \tilde{Y}$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} D\phi([X,Y])(f) &= [X,Y](f\circ\phi) \\ &= X(Y(f\circ\phi)) - Y(X(f\circ\phi)) \\ &= X(\tilde{Y}(f)\circ\phi) - Y(\tilde{X}(f)\circ\phi) \\ &= \tilde{X}(\tilde{Y}(f)) - \tilde{Y}(\tilde{X}(f)) = [\tilde{X},\tilde{Y}](f). \end{aligned}$$

<u>Πρόταση</u> Αν $\phi: M \to N$ αμφιδιαφόριση, τότε

$$D\phi([X,Y]) = [D\phi(X), D\phi(Y)]$$

και η $D\phi: C^\infty(TM) \to C^\infty(TN)$ είναι ισομορφισμός Lie αλγεβρών

Οι X, Y μετατίθενται αν $[X,Y] = 0$. Σε συντεταγμένη περιοχή (U, x) $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right] = 0$ διότι $Dx\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right] = [\partial e_i, \partial e_k] = 0.$

Η κατάσταση στις ομάδες Lie: $X \in C^\infty(TG)$ αριστερά αναλλοίωτο αν $DL_p X = X$ δηλαδή $(DL_p)_q X_q = X_{pq}$

- Τα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία ~~αποτελούν~~ έχονται Lie άλγεβρα g
- Κάθε διανυσματικό πεδίο (αριστερά αναλλοίωτο) καθορίζεται από την τιμή του σε e: $X_p = (DL_p)_e(X_e)$

- $\Phi : T_eG : g \qquad X_e \to (X : p \longmapsto (DL_p)_e(X_e))$ $*$ ισομορφισμός

- $g \subseteq C^\infty(TG)$ ίδιας διάστασης με την G

- g Lie υποάλγεβρα της $C^\infty(TG)$:

$$DL_p([X,Y]) = [(DL_p)(X),(DL_p)(Y)] \quad \forall X,Y \in g$$

- Ο ισομορφισμός $(*)$ επάγει $[\ ,\ ] : T_eG \times T_eG \to T_eG$

$$[X_e, Y_e] = [X,Y]_e \qquad \text{Άρα } g \equiv T_eG$$

<u>Πρόταση</u> Για τις κλασικές Lie ομάδες πινάκων
$[X_e, Y_e] = X_e Y_e - Y_e \cdot X_e$. (πολ/σμός πινάκων).

Απόδειξη Για $GL(n,\mathbb{R})$, $X_p(f) = \frac{d}{dt} f(p\cdot Exp(tX_e))\big|_{t=0} = Df_p(p\cdot X_e)$
$= Df_p(X_p)$

Η δευτέρας τάξεως παράγωγος $Y_e(Xf) = \frac{d}{dt}\left(X_{Exp(tY_e)}(f)\right)\big|_{t=0}$

$= \frac{d}{dt}\left(Df_{(Exp\, tY_e)}(Exp(tY_e)\cdot X_e)\right)\big|_{t=0} = D^2 f_e(Y_e, X_e) - Df_e(Y_e\cdot X_e)$

Παίρνουμε $[X,Y]_e(f) = Df_e(X_eY_e - Y_e\cdot X_e)$.

<u>Πόρισμα</u> TG τετριμμένη [illegible] g