Κεφάλαιο I

Διαφορίσιμες πολλαπλότητες

$\mathbb{R}^m$: ό τυπικός m-διάστατος Ευκλείδειος χώρος μέ τήν τοπολογία πού προκύπτει από τήν Ευκλείδεια μετρική:

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Για $r = 0, 1, \dots$ καί $U \subset \mathbb{R}^m$, $C^r(U, \mathbb{R}^m)$ είναι τό σύνολο τών συνεχώς διαφορίσιμων απεικονίσεων $f : U \to \mathbb{R}^n$.
Λείες απεικονίσεις είναι τά στοιχεία τού $C^\infty(U, \mathbb{R}^n) = \bigcap_{r=0}^{\infty} C^r(U, \mathbb{R}^m)$

$C^\omega(U, \mathbb{R}^n)$ είναι τό σύνολο τών πραγματικά αναλυτικών απεικονίσεων.

Τοπολογική πολλαπλότητα $(M, \mathcal{T})$ χώρος Hausdorff, 2-αριθμήσιμος. Υπάρχει $m \in \mathbb{Z}^+$: $\forall p \in M$ $\exists$ $U_p \in \mathcal{T}$ (ανοιχτή περιοχή τού p) καί $V \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτό ώστε τά U_p καί V νά είναι ομοιομορφικά. Άν $x : U \to V$ είναι ό ομοιομορφισμός, (U, x) λέγεται τοπικός χάρτης. (Τοπικές συντεταγμένες) Τό m είναι ή διάσταση τού M καί γράφουμε M^m (Τοπολογική πολλαπλότητα διάσταση m)

Έστω M^m τ.π. Ένας C^r-άτλας τής M είναι μια συλλογή

$$\mathcal{A} = \{ (U_a, x_a) \mid a \in I \} \quad (I \text{ σύνολο δεικτών})$$

μέ $M = \bigcup_a U_a$ (κάλυμμα) καί όποιας οι

απεικονίσεις μετάβασης $x_\beta \circ x_a^{-1}|_{x_a(U_a \cap U_\beta)} : x_a(U_a \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

είναι C^r

Έστω (U,x) χάρτης και A άτλας του M. Ο (U,x) καλείται <u>συμβατός</u> με τον A αν

$$A \cup \{(U,x)\} \text{ είναι άτλας του } M.$$

Ο άτλας $\hat{A}$ <u>μεγιστικός</u> αν περιέχει όλους τους χάρτες που είναι συμβατοί με αυτόν. ($\hat{A}$ καλείται C^r-δομή)

$(M,\hat{A})$ λέγεται C^r-πολλαπλότητα αν M είναι τ.π. και $\hat{A}$ είναι C^r-δομή στη M. $r=\infty$ <u>λεία πολλαπλότητα</u>
$r=\omega$ <u>πραγματικά αναλυτική πολλαπλότητα</u>

<u>Θμ:</u> Δοθέντος C^r άτλαντα A στην τοπολ. πολ. M, προσδιορίζεται μοναδική C^r-δομή $\hat{A}$ στην M (αυτή που περιέχει όλους τους τοπικούς χάρτες που είναι συμβατοί με τον A

1. Ο $(\mathbb{R}^m, e_m)$ με τον τετριμμένο C^ω-άτλαντα

$A=\{(\mathbb{R}^m, id)\}$ $\quad id: p \to p$ δίδει την τοπική C^ω-δομή

$\hat{A}$ στο $\mathbb{R}^m$.

2. $S^m = \{p\in\mathbb{R}^{m+1} \mid p_1^2+\dots+p_m^2=1\}$ η τυπική

μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^{m+1}$. Αν $N=(1,0)$ $S=(-1,0)$ παίρνουμε $U_N = S^m\setminus\{N\}$ $U_S = S^m\setminus\{S\}$ και τις

στερεογραφικές προβολές

$$x_N : (p_1,\dots,p_{m+1}) \longmapsto \frac{1}{1-p_1}(p_2,\dots,p_{m+1})$$

$$x_S : (p_1,\dots,p_{m+1}) \longmapsto \frac{1}{1+p_1}(p_2,\dots,p_{m+1})$$

Οἱ ἀπεικονίσεις μετάβασης

$$x_S \circ x_N^{-1},\quad x_N \circ x_S^{-1} : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$$

δίνονται ἀπό τήν $\quad x \to \dfrac{x}{|x|^2}$

3. Στό $\mathbb{R}^{m+1}\setminus\{0\}$ ὁρίζομε τή σχέση ἰσοδυναμίας

$$p \sim q \Leftrightarrow p = \lambda q \text{ για } \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Ὁ <u>προβολικός χῶρος</u> $\mathbb{R}P^m$ εἶναι $\mathbb{R}^{m+1}\setminus\{0\}/\sim$. Αὐτός ἐφοδιάζεται μέ τήν τοπολογία πηλίκο: Ἄν $\pi : \mathbb{R}^{m+1}_* \to \mathbb{R}P^m$ εἶναι ἡ φυσιολογική προβολή, $U \subset \mathbb{R}P^m$ εἶναι ἀνοικτό ἄν καί μόνο ἄν $\pi^{-1}(U)$ ἀνοικτό τοῦ $\mathbb{R}^{m+1}_*$

Ὁρίζομε τά σύνολα

$$U_k = \{[p] \in \mathbb{R}P^m \mid p_k \neq 0\} \qquad k = 1,\dots,m+1$$

καί τούς τοπικούς χάρτες (U_k, x_k) μέ

$$x_k([p]) = \left(\frac{p_1}{p_k},\dots,\overset{k}{\wedge},\dots,\frac{p_{m+1}}{p_k}\right)$$

Οἱ x_k εἶναι καλῶς ὁρισμένες: Ἄν $[p]=[q] \Leftrightarrow q = \lambda p \Rightarrow x_k([p]) = x_k([q])$

Ἀπό τὴν ἄλλη, $\mathbb{R}P^m = \bigcup_{k=1}^{m+1} U_k$. Ὁ ἄτλας $\mathcal{A} = \{(U_k, x_k) ; k=1,\dots,m+1\}$

εἶναι C^ω-ἄτλας γιά τόν $\mathbb{R}P^m$.

4. Ἔστω τό ἐπεκτεταμένο μιγαδικό ἐπίπεδο $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Ἔστω $U_0 = \mathbb{C}_*$ καί $U_\infty = \hat{\mathbb{C}}_*$. Ὁρίζουμε

$$x_0 : U_0 \to \mathbb{C} \qquad x_0(z) = z$$
$$x_\infty : U_\infty \to \mathbb{C} \qquad x_\infty(z) = \frac{1}{z}$$

Οἱ ἀπεικονίσεις μετάβασης $x_\infty \circ x_0^{-1}$, $x_0 \circ x_\infty^{-1} : \mathbb{C}_* \to \mathbb{C}_*$ εἶναι καί οἱ δύο $1/z$, ὁλόμορφες. Αὐτό εἶναι ἕνα παράδειγμα →

1-μιγαδικῆς πολλαπλότητας (Σφαῖρα τοῦ Riemann)

Πρόταση Ἔστω $(M_1^{m_1}, \hat{\mathcal{A}}_1)$, $(M_2^{m_2}, \hat{\mathcal{A}}_2)$ C^r-πολλαπλότητες. Τότε τό $M_1^{m_1} \times M_2^{m_2}$ ἐπιδέχεται δομή m_1+m_2 C^r-πολλαπλότητας

Example 5.17 Tu.

Ὑποπολλαπλότητες Ἔστω $m, n \in \mathbb{Z}$ $m \le n$ και $(N^n, \hat{\mathcal{A}}_N)$ μία C^r-πολλαπλότητα. Ἕνα ὑποσύνολο $M \subset N$ θά καλεῖται ὑποπολλαπλότητα τῆς N ἄν γιά κάθε $p \in M$ $\exists$ $(U_p, x_p) \in \hat{\mathcal{A}}_N$ ὥστε τό $p \in U_p$ καί ἡ $x_p : U_p \subset N \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ ἱκανοποιεῖ

$$x_p(U_p \cap M) = x_p(U_p) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\}).$$

Δέστε τήν παράγραφο 9.1 τοῦ Tu. Ἐκεῖ ὁ ὁρισμός τῆς κανονικῆς (regular) ὑποπολλαπλότητας.

Ὡς π.χ. ὁ M ἔχει τήν ἐπαγόμενη τοπολογία

Τό θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων

Ἔστω $U \subset \mathbb{R}^m$ ἀνοικτό. Ἐάν ἡ $F : U \to \mathbb{R}^n$ εἶναι διαφορίσιμη, τότε τό διαφορικό της DF_p $(df_p,\ F_{*,p})$ εἶναι ἡ γραμμική ἀπεικόνιση $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ μέ πίνακα τόν Ἰακωβιανό πίνακα τοῦ F:

$$DF_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}_p$$

Ἐάν $\gamma : \mathbb{R} \to U \subset \mathbb{R}^m$ εἶναι καμπύλη μέ $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v \in \mathbb{R}^m$ τότε ἡ σύνθεση $F \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ εἶναι καμπύλη τοῦ $\mathbb{R}^n$ καί ἀπό τόν κανόνα τῆς ἁλυσίδας

$$DF_p \cdot v = \frac{d}{ds}(F \circ \gamma)\Big|_{s=0}.$$

Αὐτό εἶναι τό ἐφαπτόμενο διάνυσμα τῆς καμπύλης $F \circ \gamma$ στό $F(p) \in \mathbb{R}^n$.
Δηλαδή: τό διαφορικό εἶναι ἡ γραμμική ἀπεικόνιση DF_p πού στέλνει ἐφαπτόμενα διανύσματα στό p σέ ἐφαπτόμενα διανύσματα στό $F(p)$.

Θεώρημα τῆς Ἀντιστροφῆς. Ἔστω ἀνοικτό $U \subset \mathbb{R}^m$ καί $F : U \to \mathbb{R}^n$ μια C^r-ἀπεικόνιση. Ἐάν στό $p \in U$ τό διαφορικό $dF_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ εἶναι ἀντιστρέψιμη ἀπεικόνιση, τότε ὑπάρχει περιοχή U_p τοῦ p καί περιοχή $V_{F(p)}$ οὕτως ὥστε ἡ $\hat{F} = F|_{U_p} : U_p \to V_{F(p)}$ νά εἶναι ἀντιστρέψιμη, C^r, μέ C^r ἀντίστροφη. Ἐπιπλέον, $(d\hat{F}^{-1})_{F(p)} = (dF_p)^{-1}$.

Ἔστω $U \subset \mathbb{R}^m$ ἀνοικτό καί $F: U \to \mathbb{R}^n$ C^r-ἀπεικόνιση. Ἕνα σημεῖο $p \in U$ θά λέγεται κανονικό γιά τήν F, ἐάν τό διαφορικό DF_p εἶναι πλήρους βαθμίδας· ἀλλιῶς θά λέγεται κρίσιμο. Ἕνα σημεῖο $q \in F(U)$ θά λέγεται κανονική τιμή γιά τήν F ἐάν κάθε $r \in F^{-1}(q)$ εἶναι κανονικό.

Ἕνα σημεῖο $p \in U$ εἶναι κανονικό ἄν οἱ κλίσεις ∇F_i $i=1,\dots,n$ εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητα στό p, ἰσοδύναμα

$$\det(DF_p \cdot DF_p^T) \neq 0 \qquad \text{(Πολύ χρήσιμο).}$$

Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων. Ἔστω $m, n \in \mathbb{Z}_+$ καί $m > n$. Ἔστω $U \subset \mathbb{R}^m$ ἀνοικτό καί $F: U \to \mathbb{R}^n$ C^r ἀπεικόνιση. Ἐάν τό $q \in F(U)$ εἶναι κανονική τιμή γιά τήν F, τότε ἡ προεικόνα $F^{-1}(q)$ εἶναι $m-n$-διάστατη C^r ὑποπολλαπλότητα τοῦ $\mathbb{R}^m$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $p \in F^{-1}(q)$ καί ἔστω

$$K_p = \ker(DF_p) = \{ v \in \mathbb{R}^m \mid DF_p(v) = 0 \}.$$

Ἔστω $\Pi_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$ μία γραμμική ἀπεικόνιση πού περιορισμένη στό K_p εἶναι 1-1 καί ἐπί ἐνῶ εἶναι ταυτοτικά 0 στό ὀρθοσυμπλήρωμα $K_p^\perp$. Ὁρίζουμε $G_p : U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$,

$$x \longmapsto (F(x), \Pi_p(x))$$

Εἶναι

$$DG_p = \begin{pmatrix} DF_p|_{K_p^\perp} & 0 \\ 0 & \Pi_p \end{pmatrix}$$

ἄρα ἡ DG_p εἶναι 1-1 καί ἐπί. Ἀπό τό θεώρημα τῆς Ἀντιστροφῆς ὑπάρχουν ἀνοικτές περιοχές V_p καί $W_{G_p(p)}$ ὥστε:

η $\hat{G}_p = G_p|_{V_p} : V_p \to W_{G_p(p)}$ είναι 1-1 κ' επί, η

αντίστροφη $(\hat{G}_p)^{-1}$ είναι C^r και $d(\hat{G}_p^{-1})_{G_p(p)} = (dG_p)^{-1}_p$

και η $d(\hat{G}_p^{-1})_y$ είναι 1-1 κ' επί $\forall y \in W_{G_p(p)}$. Θέτουμε

$$\tilde{U}_p = F^{-1}(q) \cap V_p = \hat{G}_p^{-1}\left((\{q\} \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap W_{G_p(p)}\right).$$

Αν η π_p είναι η φυσιολογική προβολή στον δεύτερο παράγοντα, τότε η

$$\tilde{x}_p : \pi \circ G_p|_{\tilde{U}_p} : \tilde{U}_p \to (\{q\} \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap W_{G_p(p)} \to \mathbb{R}^{m-n}$$

είναι τοπικός χάρτης σε ανοικτή περιοχή $\tilde{U}_p$ του p. Κάθε $q \in F(U)$ είναι ομαλή τιμή άρα το

$$A = \{(\tilde{U}_p, \tilde{x}_p) \mid p \in F^{-1}(q)\}$$

είναι C^r-άτλας για το $F^{-1}(q)$.

Εφαρμογές του Θ.Π.Σ

1. Έστω $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ η C^ω απεικόνιση

$$F(p_1, \dots, p_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} p_i^2$$

Είναι $DF_p = 2p$ και $DF_p \cdot DF_p^T = 4|p|^2$. Άρα το $1 \in \mathbb{R}$ είναι κανονική τιμή της F και συνεπώς η ίνα

$$F^{-1}(1) = S^m = \{p \in \mathbb{R}^{m+1} : |p|^2 = 1\}$$

είναι m-διάστατη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{m+1}$.

2. Έστω $F:\mathbb{R}^{m+1}\times\mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}^2$ η C^ω απεικόνιση

$$F(p,v)=\left(\frac{|p|^2-1}{2},\ p\cdot v\right)$$ (· τὸ βαθμωτὸ ἐσωτερικὸ γινόμενο)

Τότε $$DF_{(p,v)}=\begin{pmatrix} p & 0\\ v & p\end{pmatrix}$$ καὶ

$$\det\left(DF_{(p,v)}\cdot D_{(p,v)}F^T\right)=\det\begin{pmatrix}|p|^2 & p\cdot v\\ p\cdot v & |p|^2+|v|^2\end{pmatrix}$$

$=1+|v|^2>0$, γιὰ $F^{-1}(0)$. Ἄρα ἡ ἴνα

$$F^{-1}(0)=\{(p,v)\in\mathbb{R}^{m+1}\times\mathbb{R}^{m+1}\ \mid\ |p|^2=1,\ p\cdot v=0\}$$ εἶναι

$2m$-διάστατη πολλαπλότητα τοῦ $\mathbb{R}^{2m+2}$ (Ἡ ἐφαπτόμενη δέσμη τῆς S^m).

3. Ἡ ὀρθογώνια ομάδα $O(m)$. Ἔστω $\mathbb{R}^{m\times m}$ ὁ m^2-διάστατος διανυσματικὸς χῶρος τῶν $m\times m$ πινάκων καὶ ἔστω

$$Sym(\mathbb{R}^m)=\{y\in\mathbb{R}^{m\times m}\ \mid\ y^T=y\}$$

(ὁ χῶρος τῶν συμμετρικῶν πινάκων). $y=[y_{ij}]_{i,j=1}^{m}$ $y_{ij}=y_{ji}$

Ἡ διάσταση τοῦ δ.χ $Sym(\mathbb{R}^m)$ εἶναι $\frac{m(m+1)}{2}$. Θεωροῦμε

τὴν ἀπεικόνιση $$F:\mathbb{R}^{m\times m}\longrightarrow Sym(\mathbb{R}^m)$$
$$x\longmapsto x^T\cdot x$$

Ἔστω $\gamma: I\to\mathbb{R}^{m\times m}$ καμπύλη μὲ $\gamma(0)=x$ $\dot\gamma(0)=X$.

Τότε: $$DF_x(X)=\frac{d}{ds}(F\circ\gamma)\Big|_{s=0}=\left(\dot\gamma(s)^T\cdot\gamma(s)+\gamma(s)^T\dot\gamma(s)\right)\Big|_{s=0}$$
$$=X^T\cdot x+x^T\cdot X$$

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι γιὰ τυχαῖο p ὅτι

$$O(m) = F^{-1}(e) = \{p \in \mathbb{R}^{m\times m} \mid p^T p = e\}$$

καὶ $Y \in Sym(\mathbb{R}^m)$, ἔχουμε $DF_p\left(\frac{pY}{2}\right) = Y$.

Αὐτὸ ὅμως σημαίνει ὅτι DF_p εἶναι ἐπί, ἄρα ὁ μοναδιαῖος πίνακας $e \in Sym(\mathbb{R}^m)$ εἶναι κανονικὴ τιμὴ γιὰ τὴν F.
Ἀπὸ τὸ Θ.Π.Σ τώρα ἡ $O(m)$ εἶναι ὑποπολλαπλότητα τοῦ $\mathbb{R}^{m\times m}$, διάστασης $m(m-1)/2$.

<u>Διαφορίσιμες ἀπεικονίσεις</u> Ἐὰν $(M^m, \hat{A}_M)$ καὶ $(N^n, \hat{A}_N)$ εἶναι C^r-πολλαπλότητες, μιὰ συνεχὴς ἀπεικόνιση $\phi : M \to N$ θὰ λέγεται $C^r(p)$, $p \in M$ ἂν ὑπάρχουν $(U_p, x) \in \hat{A}_M$ καὶ $(V_{q=\phi(p)}, y) \in \hat{A}_N$ ὥστε ἡ

$$y \circ \phi \circ x^{-1}\big|_{x(U\cap\phi^{-1}(V))} : x(U\cap\phi^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^n$$

ἀνοικτὸ λόγω συνέχειας

εἶναι C^r στὸ $x(p)$. Ἡ ϕ λέγεται διαφορίσιμη στὴν M ἂν εἶναι διαφορίσιμη σὲ κάθε σημεῖο τῆς M.

§ $\gamma : I \to M$ $I \subset \mathbb{R}$ ἀνοικτὸ διάστημα εἶναι διαφορίσιμη καμπύλη
$f : M \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη ἀπεικόνιση

§ Ὁ παραπάνω ὁρισμὸς εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἐπιλογῆς τῶν χαρτῶν (Δεῖτε σελ. 61 κ' πέρα τοῦ Tu).

Πρόταση $(M_1, \hat{A}_1)$ $(M_2, \hat{A}_2)$ $(M_3, \hat{A}_3)$ C^r-πολλαπλότητες

$$M_1 \xrightarrow{\phi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \quad C^r \Rightarrow \psi\circ\phi : M_1 \to M_3 \text{ εἶναι } C^r.$$

Έστω $(M,\hat{A}_M)$ και $(N,\hat{A}_N)$ C^r-πολλαπλότητες. Λέγονται **αμφιδιαφορικές** εάν υπάρχει $\varphi: M\to N$, 1-1 και επί που είναι C^r και επίσης, η φ^{-1} είναι C^r. Η φ καλείται αμφιδιαφόριση.

! Κάθε τοπικός χάρτης είναι αμφιδιαφόριση! (Του U με το $x(U)$)

! Η σφαίρα S^2 και η σφαίρα του Riemann είναι αμφιδιαφορικές.

! $\mathcal{D}(M)$ το σύνολο των αμφιδιαφορίσεων $\varphi: M\to M$. Είναι ομάδα.

Δ/1 Έστω $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ C^r-δομές σε τοπολογική πολλαπλότητα M. Λέγονται διαφορετικές εάν η $id: (M,\hat{A}_1)\to(M,\hat{A}_2)$ **δεν** είναι αμφιδιαφόριση.

!! Έστω M^m, N^n ομοιομορφικά ως τ.χ. Αν $\hat{A}_M, \hat{A}_N$ C^r-δομές και $m\leq 3$ τότε οι $(M,\hat{A}_M)$ $(N,\hat{A}_N)$ είναι αμφιδιαφορικές.

Milnor-Kervaire Η S^7 δέχεται ακριβώς 28 διαφορετικές λείες διαφορίσιμες δομές.

! Έστω $(N_i,\hat{A}_i)$ $i=1,2$ C^r-πολλαπλότητες και $\varphi: N_1\to N_2$ C^r απεικόνιση. Έστω $(M_i, i=1,2)$ υποπολλαπλότητες των N_1, N_2, αντίστοιχα και $\varphi(M_1)\subset M_2$. Τότε η $\varphi|_{M_1}: M_1\to M_2$ είναι C^r.

Παραδείγματα διαφορίσιμων απεικονίσεων

$\mathbb{R}^1\to S^1 \quad t\mapsto e^{it}$

$\mathbb{R}^{m+1}\to S^m \quad x\mapsto x/|x|$

$\mathbb{R}^3\supset S^2\to S^3\subset\mathbb{R}^3 \quad (x,y,z)\mapsto(x,y,z,0)$

$\mathbb{C}^2\supset S^3\to S^2\subset\mathbb{C}\times\mathbb{R} \quad (z_1,z_2)\longmapsto(2z_1\bar{z}_2, |z_1|^2-|z_2|^2)$

$S^m \to \mathbb{R}P^m \qquad x \mapsto [x],$

$\mathbb{R}^{m+1}_* \to \mathbb{R}P^m \qquad x \mapsto [x].$

'Εάν $p \in G$
$L_p(q) = pq$
ἀριστερή μετάθεση
καί εἶναι πάντοτε
ἀμφιδιαφόρισμα.
Βρεῖτε τήν
ἀπόδειξη στόν Lee.
Ἡ ὁμάδα τῶν ἀριστερῶν
μεταθέσεων εἶναι ὁμάδα Lie
(Γιατί;) $\simeq G$

Ὁμάδες Lie (Sophus Lie 1842-1899)

$(G, \cdot)$ ὁμάδα καί λεία πολλαπλότητα ὥστε ἡ

$$\begin{aligned} p: G \times G &\to G \\ (p, q) &\to pq^{-1} \end{aligned}$$ εἶναι λεία.

Παραδείγματα ὁμάδων Lie

1. $(\mathbb{R}^m, +)$ 2. $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$

Πρόταση G ὁμάδα Lie, K ὑποπολλαπλότητα καί ὑποομάδα. Τότε K εἶναι Lie ὁμάδα.

3. $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ S^1 Lie ὑποομάδα

Ἔστω V δ.χ. $Aut(V) = \{ g: V \to V,\ g$ ἀναστρέψιμος$\}$
Μία γραμμική ἀναπαράσταση τῆς G στόν V εἶναι μία

$$p: G \mapsto Aut(V)$$
$$p(g \cdot h) = p(g) \circ p(h)$$

4. $p: \mathbb{C}^* \to Aut(\mathbb{R}^2)$

$$a + ib \to \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

5: $p: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^{2 \times 2}$

$$(z, w) \to \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}.$$

6. Τά τετράνια $\mathbb{H} = \{ z + wj \mid z, w \in \mathbb{C} \} \simeq \mathbb{C}^2$.
Πρόσθεση, πολλαπλασιασμός καί συζυγία τετρανίων ἱκανοποιοῦντες:

i) $(z_1 + w_1 j) + (z_2 + w_2 j) = (z_1 + z_2) + (w_1 + w_2) j$

ii) $(z_1 + w_1 j)(z_2 + w_2 j) = (z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2) + (z_1 w_2 + w_1 \bar{z}_2) j$

iii) $\overline{(z + wj)} = \bar{z} - wj$

Τό σύνολο $(\mathbb{H}_*, \cdot)$ εἶναι ὁμάδα Lie· ὁρίζομε τό βαθμωτό γινόμενο $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$

$$p \cdot q = p \cdot \bar{q}$$

καί νόρμα

$$\|p\| = \sqrt{p \cdot \bar{p}}$$

Ἡ τρισδιάστατη μοναδιαία σφαίρα S^3 τοῦ $\mathbb{H} \simeq \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ εἶναι συμπαγής Lie ὑποομάδα τῶν H^*. (μή ἀβελιανές)

7. $$\mathrm{Nil} = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Ὁλικές συντεταγμένες $\varphi : \mathrm{Nil} \to \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi(A) = (x, y, z)$

8. $$\mathrm{Sol} = \left\{ A = \begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

ὁλικές συντεταγμένες $\varphi(A) = (x, y, z)$

9. $GL(m, \mathbb{R})$ ἀνοικτό τοῦ $\mathbb{R}^{m \times m}$ ἄρα πολλαπλότητα διάστασης m^2.

10 Ειδική γραμμική ομάδα $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det(A)=1\}$
n^2-1 υποπολλαπλότητα του $GL(n,\mathbb{R})$ (Tu)

11 Ορθογώνια ομάδα $O(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T A = A A^T = I\}$

$\dim O(n) = n(n-1)/2$

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$$ Tu

· Υπάρχει αμφιδιαφόριση $O(n) \to SO(n) \times O(1)$! Δηλαδή

η $O(n)$ είναι διπλό κάλυμμα του $SO(n)$, έτσι

$$\dim SO(n) = \dim O(n)$$

12. Στην μιγαδική περίπτωση, έχουμε αντίστοιχα τα

$$GL(n,\mathbb{C}) \quad SL(n,\mathbb{C}) \quad U(n), \quad SU(n)$$

Μπορεί να δειχθεί ότι $U(1) \approx S^1$ και υπάρχει αμφιδιαφόριση
$U(n) \to SU(n) \times U(1)$. Άρα $\dim SU(n) = \dim U(n) - 1 = n^2 - 1$.

– Στο εξής όλες οι πολλαπλότητες θα είναι C^∞ (λείες).