Ασκήσεις

1. Έστω $f(x, y) = e^{x+y}$.

   (α) Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης της f στο $(0, 0)$.

   (β) Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης της f στο $(0, 0)$.

2. Υποθέστε ότι η $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική, οπότε η L έχει τη μορφή $L(x, y) = ax + by$.

   (α) Βρείτε την προσέγγιση Taylor πρώτης τάξης της L.

   (β) Βρείτε την προσέγγιση Taylor δεύτερης τάξης της L.

   (γ) Τι μορφή θα έχουν οι προσεγγίσεις υψηλότερης τάξης;

Στις Ασκήσεις 3 έως 8, βρείτε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης της δεδομένης συνάρτησης γύρω από το σημείο (x_0, y_0).

3. $f(x,y) = (x+y)^2$, όπου $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

4. $f(x,y) = 1/(x^2+y^2+1)$, όπου $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

5. $f(x,y) = e^{x+y}$, όπου $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

6. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\cos(xy)$, όπου $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

7. $f(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy)$, όπου $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

8. $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos y$, όπου $x_0 = 1$, $y_0 = 0$

9. Υπολογίστε την προσέγγιση Taylor δεύτερης τάξης της $f(x,y) = \cos x \sin y$ στο σημείο $(\pi, \pi/2)$.

10. Έστω $f(x,y) = x\cos(\pi y) - y\sin(\pi x)$. Βρείτε την προσέγγιση Taylor δεύτερης τάξης της f στο σημείο $(1,2)$.

11. Έστω $g(x,y) = \sin(xy) - 3x^2\log y + 1$. Βρείτε το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού που προσεγγίζει καλύτερα την g κοντά στο σημείο $(\pi/2, 1)$.

12. Για καθεμία από τις συναρτήσεις των Ασκήσεων 3 έως 7, προσεγγίστε το $f(0{,}1, 0{,}1)$ χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης. Συγκρίνετε την προσέγγισή σας με την ακριβή τιμή χρησιμοποιώντας κομπιουτεράκι.

Πρ **13.** (Δύσκολη) Μια συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ καλείται *αναλυτική* συνάρτηση αν

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k + \cdots$$

[δηλαδή η σειρά του δεξιού μέλους συγκλίνει και ισούται με $f(x+h)$].

(α) Υποθέστε ότι η f ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη: Σε κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$, υπάρχει μια σταθερά M τέτοια ώστε για κάθε $k = 1, 2, 3, \ldots, |f^{(k)}(x)| \le M^k$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι η f είναι αναλυτική.

(β) Έστω $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0. \end{cases}$

Δείξτε ότι η f είναι κλάσης C^∞, αλλά δεν είναι αναλυτική.

(γ) Δώστε έναν ορισμό των αναλυτικών συναρτήσεων από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}$. Γενικεύστε την απόδειξη του ερωτήματος (α) για αυτή την κλάση συναρτήσεων.

(δ) Αναπτύξετε την $f(x,y) = e^{x+y}$ σε δυναμοσειρά γύρω από το $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.