Ασκήσεις

Στις Ασκήσεις 1 έως 16, βρείτε τα κρίσιμα σημεία των δεδομένων συναρτήσεων και προσδιορίστε αν είναι τοπικά μέγιστα, τοπικά ελάχιστα ή σαγματικά σημεία.

1. $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$

2. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$

3. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$

4. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy$

5. $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$

6. $f(x,y) = x^2 - 3xy + 5x - 2y + 6y^2 + 8$

7. $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$

8. $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$ [εξετάστε μόνο το κρίσιμο σημείο $(0,0)$]

9. $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$ [εξετάστε μόνο τα τρία κρίσιμα σημεία $(0,0)$, $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$ και $(0, \sqrt{\pi})$]

10. $f(x,y) = y + x \sin y$

11. $f(x,y) = e^x \cos y$

12. $f(x,y) = (x-y)(xy-1)$

13. $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

14. $f(x,y) = \log(2 + \sin xy)$

15. $f(x,y) = x \sin y$

16. $f(x,y) = (x+y)(xy+1)$

17. Βρείτε όλα τα τοπικά ακρότατα της $f(x,y) = 8y^3 + 12x^2 - 24xy$.

18. Έστω $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + kyz$.

(α) Επαληθεύστε ότι το $(0,0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο της f.

(β) Βρείτε όλες τις τιμές του k για τις οποίες η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0,0,0)$.

19. Βρείτε και χαρακτηρίστε όλα τα κρίσιμα σημεία της $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}y^2 + 6y + 10$.

20. Υποθέστε ότι το $(4,2)$ είναι κρίσιμο σημείο της κλάσης C^2 συνάρτησης $f(x,y)$. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, προσδιορίστε αν το $(4,2)$ είναι τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο ή σαγματικό σημείο.

(α) $f_{xx}(4,2) = 1, f_{xy}(4,2) = 3, f_{yy} = 5$

(β) $f_{xx}(4,2) = 2, f_{yx}(4,2) = -1, f_{yy} = 4$

(γ) $f_{xx}(4,2) = -2, f_{xy}(4,2) = 1, f_{yy} = 3$

21. Βρείτε τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα της $z = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$. (Βλ. Σχήμα 2.1.15.)

22. Έστω $f(x,y) = x^2 + y^2 + kxy$. Αν φανταστούμε ότι το γράφημα αλλάζει καθώς αυξάνεται το k, σε ποιες τιμές του k αλλάζει ποιοτικά το σχήμα του γραφήματος;

23. Εξετάζοντας τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (y-3x^2)(y-x^2)$ θα πάρετε μια ιδέα της δυσκολίας εύρεσης συνθηκών που να διασφαλίζουν ότι ένα κρίσιμο σημείο είναι τοπικό ακρότατο όταν δεν μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα 6.[8] Δείξτε ότι

(α) η αρχή των αξόνων είναι κρίσιμο σημείο της f,

(β) η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0,0)$ σε κάθε ευθεία που διέρχεται από το $(0,0)$, δηλαδή, αν $g(t) = (at, bt)$, τότε η $f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει τοπικό ελάχιστο στο 0, για οποιαδήποτε επιλογή των a και b,

(γ) η αρχή των αξόνων δεν είναι τοπικό ελάχιστο της f.

24. Έστω $f(x,y) = Ax^2 + E$, όπου A και E σταθερές. Ποια είναι τα κρίσιμα σημεία της f; Είναι τοπικά μέγιστα ή τοπικά ελάχιστα;

25. Έστω $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$. Σε αυτή την περίπτωση $D = 0$. Μπορείτε να αποφανθείτε αν τα κρίσιμα σημεία είναι τοπικά ελάχιστα, τοπικά μέγιστα ή σαγματικά σημεία;

26. Έστω $f(x,y) = ax^2 + by^2$, όπου $a, b \neq 0$.

(α) Δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

(β) Προσδιορίστε τη φύση αυτού του κρίσιμου σημείου συναρτήσει των a και b.

27. Υποθέστε ότι η $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^2 και ότι το $\mathbf{x}_0$ είναι κρίσιμο σημείο της f. Υποθέστε ότι $Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + 4h_2h_3$. Η f έχει στο $\mathbf{x}_0$ τοπικό μέγιστο, ελάχιστο ή σαγματικό σημείο;

28. Βρείτε το σημείο του επιπέδου $2x - y + 2z = 20$ που βρίσκεται πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

29. Δείξτε ότι ένα ορθογώνιο κουτί με δεδομένο όγκο έχει ελάχιστο εμβαδόν επιφάνειας όταν το κουτί είναι κύβος.

30. Δείξτε ότι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με δεδομένο εμβαδόν επιφάνειας και μέγιστο όγκο είναι κύβος.

31. Γράψτε τον αριθμό 120 σαν άθροισμα τριών αριθμών έτσι ώστε το άθροισμα των γινομένων των αριθμών ανά δύο να είναι μέγιστο.

32. Δείξτε ότι αν το (x_0, y_0) είναι κρίσιμο σημείο μιας τετραγωνικής συνάρτησης $f(x,y)$ και $D < 0$, τότε υπάρχουν σημεία (x,y) κοντά στο (x_0,y_0) όπου $f(x,y) > f(x_0,y_0)$ και, αντίστοιχα, σημεία όπου $f(x,y) < f(x_0,y_0)$.

33. Έστω $f(x,y) = x^6 + x^2 + y^6$, $g(x,y) = -x^6 - x^2 - y^6$, $h(x,y) = x^6 - x^4 + y^6$.

(α) Δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο των f, g και h.

(β) Δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f, τοπικό μέγιστο της g και σαγματικό σημείο της h.

34. Έστω $f(x,y) = 5ye^x - e^{5x} - y^5$.

(α) Δείξτε ότι η f έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο και ότι αυτό το σημείο είναι τοπικό μέγιστο της f.

(β) Δείξτε ότι η f είναι μη φραγμένη στον άξονα y, οπότε δεν έχει ολικό μέγιστο. [Σημειωτέον ότι για μια συνάρτηση $g(x)$ μίας μεταβλητής, ένα μοναδικό

[8] Αυτό το ενδιαφέρον φαινόμενο επισημάνθηκε για πρώτη φορά από τον διάσημο μαθηματικό Giuseppe Peano (1858–1932). Μια άλλη περίεργη «παθολογία» παρουσιάζεται στην Άσκηση 41.

κρίσιμο σημείο που είναι τοπικό ακρότατο είναι κατ' ανάγκη ολικό ακρότατο. Αυτό το παράδειγμα δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει για τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.]

35. Προσδιορίστε τη φύση των κρίσιμων σημείων της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy.$$

36. Έστω n ένας ακέραιος μεγαλύτερος του 2 και έστω $f(x, y) = ax^n + cy^n$, όπου $ac \neq 0$. Προσδιορίστε τη φύση των κρίσιμων σημείων της f.

37. Προσδιορίστε τη φύση των κρίσιμων σημείων της $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y$.

38. Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = (x^2 + y^2)^4$ στον δίσκο $x^2 + y^2 \leq 1$. (*Δεν χρειάζεται* να χρησιμοποιήσετε απειροστικό λογισμό.)

39. Επαναλάβετε την Άσκηση 38 για τη συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

40. Μια καμπύλη C στον χώρο ορίζεται *πεπλεγμένα* στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$ μέσω της επιπλέον εξίσωσης $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$. Βρείτε το σημείο ή τα σημεία της C που βρίσκονται πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

41. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της $f(x, y) = \sin x + \cos y$ στο ορθογώνιο R που ορίζεται από τις $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$.

42. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = xy$ στο ορθογώνιο R που ορίζεται από τις $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

43. Έστω $f(x, y) = 1 + xy - 2x + y$ και έστω D το τριγωνικό χωρίο του $\mathbb{R}^2$ με κορυφές τα $(-2, 1)$, $(-2, 5)$ και $(2, 1)$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f στο D. Να βρείτε όλα τα σημεία στα οποία εμφανίζονται αυτές οι ακρότατες τιμές.

44. Έστω $f(x, y) = 1 + xy + x - 2y$ και έστω D το τριγωνικό χωρίο του $\mathbb{R}^2$ με κορυφές τα $(1, -2)$, $(5, -2)$ και $(1, 2)$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f στο D. Να βρείτε όλα τα σημεία στα οποία εμφανίζονται αυτές οι ακρότατες τιμές.

45. Προσδιορίστε τη φύση των κρίσιμων σημείων της $f(x, y) = xy + 1/x + 8/y$.

Στις Ασκήσεις 46 έως 50, D είναι ο μοναδιαίος δίσκος.

46. Έστω u μια συνάρτηση C^2 στο D που είναι «αυστηρά υποαρμονική», δηλαδή ικανοποιεί την ανισότητα $\nabla^2 u = (\partial^2 u/\partial x^2) + (\partial^2 u/\partial y^2) > 0$. Δείξτε ότι η u δεν μπορεί να έχει σημείο μεγίστου στο $D \backslash \partial D$ (το σύνολο των σημείων που ανήκουν στο D, αλλά όχι στο ∂D).

47. Έστω u μια αρμονική συνάρτηση στο D —δηλαδή $\nabla^2 u = 0$ στο $D \backslash \partial D$— και συνεχής στο D. Δείξτε ότι αν η u παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $D \backslash \partial D$, την παίρνει και στο ∂D. Αυτό καλείται μερικές φορές «αρχή του ασθενούς μεγίστου» για τις αρμονικές συναρτήσεις. [Υπόδειξη: Θεωρήστε την $\nabla^2(u + \varepsilon e^x)$, $\varepsilon > 0$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το εξής γεγονός, το οποίο αποδεικνύεται σε πιο προχωρημένα βιβλία: Δεδομένης μιας ακολουθίας $\{\mathbf{p}_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, σημείων ενός κλειστού φραγμένου υποσυνόλου A του $\mathbb{R}^2$ ή του $\mathbb{R}^3$, υπάρχει ένα σημείο $\mathbf{q}$ κάθε γειτονιά του οποίου περιέχει άπειρους όρους της $\{\mathbf{p}_n\}$.]

48. Ορίστε την έννοια της αυστηρά υπεραρμονικής συνάρτησης u στο D στηριζόμενοι στην Άσκηση 46. Δείξτε ότι η u δεν μπορεί να έχει ελάχιστο στο $D \backslash \partial D$.

49. Έστω ότι η u είναι αρμονική στο D όπως στην Άσκηση 47. Δείξτε ότι αν η u παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο $D \backslash \partial D$, την παίρνει και στο ∂D. Αυτό καλείται μερικές φορές «αρχή του ασθενούς ελαχίστου» για τις αρμονικές συναρτήσεις.

50. Έστω $\phi\colon \partial D \to \mathbb{R}$ συνεχής και έστω T μια λύση της $\nabla^2 T = 0$ στο D, συνεχής στο D και τέτοια ώστε $T = \phi$ στο ∂D.

(α) Χρησιμοποιώντας τις Ασκήσεις 46 έως 49, δείξτε ότι μια τέτοια λύση, αν υπάρχει, πρέπει να είναι μοναδική.

(β) Έστω ότι η $T(x, y)$ αναπαριστά μια συνάρτηση θερμοκρασίας που είναι ανεξάρτητη του χρόνου και ότι η ϕ αναπαριστά τη θερμοκρασία στο σύνορο μιας κυκλικής πλάκας. Μπορείτε να δώσετε μια φυσική ερμηνεία της αρχής που διατυπώνεται στο ερώτημα (α);

51. (α) Έστω f μια συνάρτηση C^1 ορισμένη στην πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$. Υποθέστε ότι η f έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο x_0, που είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο της f. Δείξτε ότι το x_0 είναι και απόλυτο ελάχιστο της f, δηλαδή $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε x.

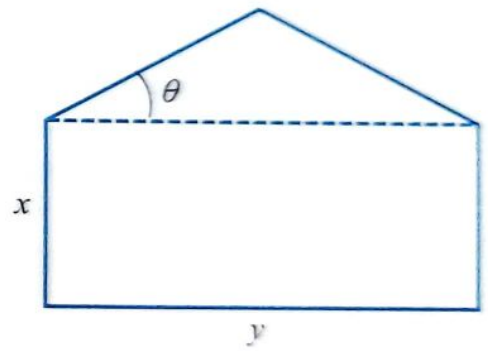
(β) Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι το συμπέρασμα του μέρους (α) δεν ισχύει για συναρτήσεις περισσότερων της μίας μεταβλητής. Έστω ότι η $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ορίζεται από την

$$f(x, y) = -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{e^x + e^{-x^2}}.$$

(i) Δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f και ότι είναι τοπικό ελάχιστο.

(ii) Εξηγήστε (όχι αυστηρά) γιατί η f δεν έχει απόλυτο ελάχιστο.

52. Έστω ότι ένα πεντάγωνο σχηματίζεται από ένα ορθογώνιο, στο πάνω μέρος του οποίου ακουμπά ένα ισοσκελές τρίγωνο (βλ. Σχήμα 3.3.8). Αν το μήκος της περιμέτρου είναι σταθερό, να βρείτε το μέγιστο δυνατό εμβαδόν.



Σχήμα 3.3.8 Μεγιστοποιήστε το εμβαδόν για δεδομένη περίμετρο.