(1) Έστω V υπόχωρος $\mathbb{R}^n$, $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, $k \le n$

α) Αποδείξτε πως οποιαδήποτε $l \le k$ από τα v_i, $i = 1, \dots, k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

Τα $v_1, \dots, v_k$ αποτελούν βάση του V επομένως είναι γραμμ. ανεξάρτητα. Άρα ισχύει ότι

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0 \text{ για } \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0}$$

άρα για $l \le k$ έχω:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_l v_l = 0 \text{ αφού } \lambda_i = 0 \quad \forall\ 1 \le i \le k.$$

β) Έστω τα σύνολα $W = \langle v_1, \dots, v_l \rangle$ και $W' = \langle v_{l+1}, \dots, v_k \rangle$. Δείξτε ότι:

α) W, W' υπόχωροι του V

β) $W \cup W' = V$

γ) κάθε $v \in V$ γράφεται ως $v = w + w'$ για κάποια $w \in W$, $w' \in W'$

α) Για τον W έχω:

i) $\vec{0} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_l v_l$ για $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_l = 0$

άρα $\vec{0} \in W$

i) Έστω $\vec{\alpha}, \vec{b} \in W$. Τότε $\vec{\alpha} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell$
και $\vec{b} = b_1 v_1 + \dots + b_\ell v_\ell$

άρα $\lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{b} = \lambda \alpha_1 v_1 + \dots + \lambda \alpha_\ell v_\ell + \mu b_1 v_1 + \dots + \mu b_\ell v_\ell =$

$= (\lambda \alpha_1 + \mu b_1) v_1 + \dots + (\lambda \alpha_\ell + \mu b_\ell) v_\ell$

όπου $\lambda, \mu, \alpha_i, b_i \in \mathbb{R}$

άρα W υπόχωρος του V

ομοίως για τον W'

β) $W \cup W' = \{ v \mid v \in W$ ή $v \in W' \} = V$

γ) $W \cap W' = \{ \vec{v} \mid \vec{v} \in W$ και $\vec{v} \in W' \} = \{ \vec{0} \}$

Επίσης Έστω $\vec{v} \in V$. Τότε για $\alpha_i \in \mathbb{R}$ έχω

$\vec{v} = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_\ell v_\ell}_{\vec{w}} + \underbrace{\alpha_{\ell+1} v_{\ell+1} + \dots + \alpha_k v_k}_{\vec{w}'}$

όπως $\vec{w} \in W$ και $\vec{w}' \in W'$

άρα κάθε $\vec{v} \in V$ γράφεται στη μορφή

$\vec{v} = \vec{w} + \vec{w}'$ όπου $\vec{w} \in W$,

και $\vec{w}' \in W'$

③ Αποδείξτε ότι για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ είναι

$$|e_n(x,z) - e_n(z,y)| \leq e_n(x,y)$$

Θέλω νδο $|e_n(x,z) - e_n(z,y)| \leq e_n(x,y)$

$\Rightarrow \; -e_n(x,y) \leq e_n(x,z) - e_n(z,y) \leq e_n(x,y)$

Η $e_n(z,y)$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα άρα $\forall\; x, y, z \in \mathbb{R}^n$ έχω:

$$e_n(z,y) \leq e_n(z,x) + e_n(x,y)$$

με την ισότητα να ισχύει όταν x, y, z συνευθειακά

άρα $-e_n(x,y) \leq e_n(z,x) - e_n(z,y)$

όμως $e_n(z,x) = e_n(x,z)$

άρα $-e_n(x,y) \leq e_n(x,z) - e_n(z,y) \; (1)$

Επίσης για την $e_n(x,z)$ έχω ότι $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$$e_n(x,z) \leq e_n(x,y) + e_n(y,z) = e_n(x,y) + e_n(z,y)$$

$\Rightarrow \; e_n(x,z) - e_n(z,y) \leq e_n(x,y) \; (2)$

άρα από ①, ② έχω

$$-e_n(x,y) \leq e_n(x,z) - e_n(z,y) \leq e_n(x,y)$$

(7) Αποδείξτε ότι το Ευκλείδιο βαθμωτό γινόμενο ικανοποιεί τις ιδιότητες 1-4 του εσωτερικού γινομένου

Έστω $\alpha, b \in R^n$. $\alpha \cdot b = \dfrac{\|\alpha+b\|^2 - \|\alpha-b\|^2}{4}$

1. $\boxed{\alpha \cdot \alpha \geq 0}$ και $\boxed{\alpha \cdot \alpha = 0 \iff \alpha = 0}$

$$\alpha \cdot \alpha = \frac{\|\alpha+\alpha\|^2 - \|\alpha-\alpha\|^2}{4} = \frac{4\|\alpha\|^2}{4} = \|\alpha\|^2 \geq 0$$

$$\alpha \cdot \alpha = 0 \iff \|\alpha\|^2 = 0 \iff \alpha = 0.$$

2. $\boxed{\alpha \cdot b = b \cdot \alpha}$ $\forall \alpha, b \in R^n$

$$b \cdot \alpha = \frac{\|b+\alpha\|^2 - \|b-\alpha\|^2}{4} = \frac{\|\alpha+b\|^2 - \|\alpha-b\|^2}{4} = \alpha \cdot b$$

3. $\boxed{(\alpha+b) \cdot c = \alpha \cdot c + b \cdot c}$ $\forall \alpha, b, c \in R^n$

$$(\alpha+b) \cdot c = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) c_i = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i + b_i c_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i c_i + \sum_{i=1}^{n} b_i c_i = \alpha c + b c$$

4. $\boxed{(\lambda \alpha) b = \lambda (\alpha \cdot b)}$ $\forall \alpha, b \in R^n, \lambda \in R$

$$(\lambda\alpha) b = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) \cdot b_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \lambda (\alpha \cdot b)$$

8. Αποδείξτε τα παρακάτω για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$:

α) $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2x \cdot y$

$$\|x \pm y\|^2 = (x \pm y)(x \pm y) = \|x\|^2 \pm xy \pm yx + \|y\|^2 =$$

$$\underline{\underline{xy = yx}} \quad \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2xy$$

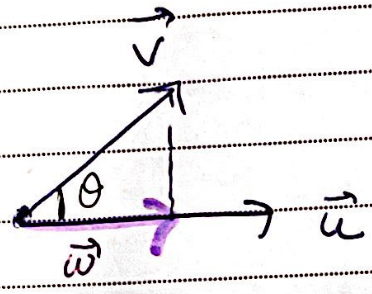
β) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (κανόνας παρ/μου)

$$(x+y)(x+y) + (x-y)(x-y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2xy + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2xy =$$

$$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

⑨ i) Σχεδιάστε δύο διανύσματα u, v και με γεωμετρικά επιχειρήματα επιβεβαιώστε τον τύπο της ορθής προβολής.

ii) Δείξτε ότι $\|v - proj_u(v)\| = \|v\| \sin\theta$ όπου $\theta = \angle(u,v)$



i) $\vec{w} = proj_{\vec{u}} \vec{v}$, $\cos\theta = \dfrac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{v}\|} \Rightarrow \|\vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{\|\vec{w}\| \, \|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\|\vec{v}\| \, \|\vec{u}\| \cos\theta}{\|\vec{u}\|} \quad (1)$$

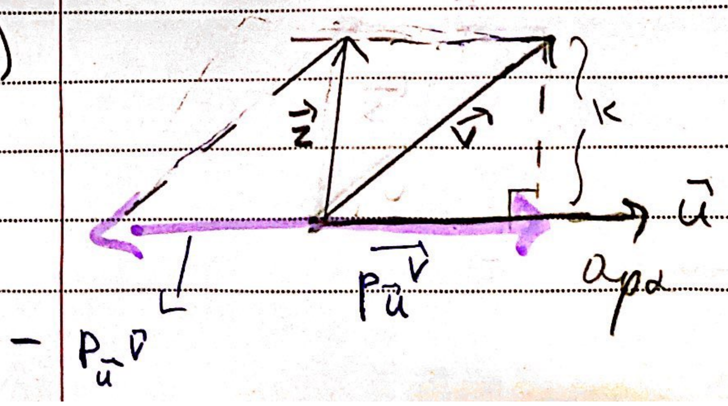
όμως $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{u}\| \cos\theta$

άρα $(1) \Rightarrow \|\vec{w}\| = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|}$

όμως το $\vec{w} \parallel \vec{u}$

άρα $\vec{w} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|} \cdot \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u}$

ii)



$\vec{v} - p_{\vec{u}} \vec{v} = \vec{z}$

άρα $\|\vec{v} - p_{\vec{u}} \vec{v}\| = \|\vec{z}\|$

όμως $\|\vec{z}\| = k$

και ισχύει ότι $\sin\theta = \frac{k}{\|\vec{v}\|} \Rightarrow k = \sin\theta \cdot \|\vec{v}\|$

άρα $\|\vec{v} - p_{\vec{u}}\vec{v}\| = \|\vec{v}\| \sin\theta$

(11) Έστω $\theta \in R$ και ο μετασχηματισμός $\alpha : R^2 \to R^2$ όπου
$\alpha(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta)$

Αν $e_1 = (1,0)$ και $e_2 = (0,1)$ δείξε ότι $\alpha(e_1), \alpha(e_2)$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του R^2.

$\alpha(e_1) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\alpha(e_2) = (-\sin\theta, \cos\theta)$

$\langle \alpha(e_1), \alpha(e_2) \rangle = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 0$

άρα $\alpha(e_1) \perp \alpha(e_2)$

$\|\alpha(e_1)\| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

και

$\|\alpha(e_2)\| = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1$

άρα ορθοκανονική βάση

(13) Αποδείξτε την Πρόταση 3.1.14 :

Έστω r_w ανάκλαση σε υπερεπίπεδο

$r_w(\vec{x}) = \vec{x} - 2(\vec{x}\cdot\vec{A})\cdot\vec{A}$, $x \in R^n$. Τότε:

1. Η r_w είναι γραμμική απεικόνιση

Έστω $x, y \in R^n$ και $\lambda \in R$

$r_w(\lambda x + \mu y) = \lambda x + \mu y - 2[(\lambda x + \mu y) A] \cdot A =$

$= \lambda x + \mu y - 2(\lambda x A) A - 2(\mu y A) \cdot A =$

$= \lambda(x - 2(xA) \cdot A) + \mu(y - 2(yA) \cdot A) =$

$= \lambda r_w(x) + \mu r_w(y)$

2. Η r_w είναι ενελικτική $R_w \circ R_w = id$

$r_w(r_w(x)) = x - 2(xA) \cdot A - 2((x - 2(xA) \cdot A) \cdot A) \cdot A =$

$= x - 2(xA) \cdot A - 2(xA) \cdot A + 2(xA) \cdot A \cdot A \cdot A =$

$A \cdot A = \|A\| = 1$

$\overset{A\cdot A = \|A\| = 1}{=\!=} x - 2(xA) \cdot A - 2(xA) \cdot A + 2(xA) \cdot A =$

$= x - 2(xA) \cdot A$

3 Η r_W αφήνει αναλλοίωτο κάθε σημείο του υπερεπιπέδου W

αν $x \in W$, $x \cdot A = 0$

4. Αν $\{e_1, \dots, e_n\}$ η κανονική βάση του R^n τότε η $\{r_W(e_1), \dots, r_W(e_n)\}$ είναι ορθοκανονική βάση του R^n.

$$r_W(x) \cdot r_W(y) = (x - 2(x\cdot A)\cdot A)(y - 2(y\cdot A)\cdot A) =$$

$$= x \cdot y - 2x(y\cdot A)\cdot A - 2y(x\cdot A)\cdot A + 4(x\cdot A)(y\cdot A)\cdot A\cdot A =$$

$$= x \cdot y \quad \forall x, y \in R^n$$

12) Αποδείξτε ότι κάθε ευθεία που περνά από το $\vec{O}$ είναι 1-διάστατος διαν. υπόχωρος του R^n ενώ μια ευθεία που δεν περνά δεν είναι

- $c(t) = t \cdot v$, $t \in R$ με $\vec{v} \in R^n$
είναι υπόχωρος του R^n

- ε: $c(t) = \vec{\alpha} + t\vec{v}$, $t \in R$ και $v, \alpha \in R^n$.

$\vec{O} \notin \varepsilon$ άρα δεν είναι υπόχωρος του R^n