2.1.9

(2) Είναι η $(\mathbb{Z}_*, \cdot)$ ομάδα;

Όχι, διότι αν ~~παλλλλ~~ $m \in \mathbb{Z}_*$ και
$m \cdot \frac{1}{m} = 1 = \frac{1}{m} \cdot m$ και $\frac{1}{m} \in \mathbb{Z}_* \Leftrightarrow m = \pm 1$

Παρατήρηση! $(\mathbb{Q}_*, \cdot)$ αβελιανή ομάδα

(3) $SO(n) < O(n)$

· $I_n \in SO(n)$
$\forall A, B \in SO(n)$, $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1$

$\forall A \in SO(n)$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = 1 \Rightarrow A^{-1} \in SO(n)$

άρα $SO(n) < O(n)$

(8) Παρατήρηση: $SO(n) \trianglelefteq O(n)$.

Αν $A \in O(n)$ και $B \in SO(n)$
$\det(A \cdot B A^{-1}) = \det(B) = 1 \Rightarrow ABA^{-1} \in SO(n)$

άρα $SO(n) \trianglelefteq O(n)$

(4) $H_1 < H_2 < G$

$gH_1 = \{gh_1, h_1 \in H_1\} \subset \{gh_2, h_2 \in H_2\} = gH_2$

(5) Αν $H < G$, H αβελιανή τότε $\forall g \in G$, $h \in H$

$ghg^{-1} = g \cdot g^{-1} \cdot h = h \in H$

(6) Να δείξετε ότι για G ομάδα και $H < G$ τότε $H \trianglelefteq G$ αν και μόνο αν $ghg^{-1} \in H$ $\forall$ $g \in G, h \in H$

~~$H \trianglelefteq G \Leftrightarrow$ ... $\forall g \in G$~~

$(\Rightarrow)$ $H \trianglelefteq G \Rightarrow gH = Hg$ $\forall g \in G$

Άρα $ghg^{-1} \in \{gH\}g^{-1} = \{Hg\}g^{-1} = H$

$(\Leftarrow)$ Έστω $q \in gH \Rightarrow q = gh$ για κάποιο $h_1, h \in H$

Γράφουμε $q = (gh_1g^{-1})g \in Hg \Rightarrow gH \subseteq Hg$

Όμοια $Hg \subseteq gH$

(7) $H \trianglelefteq G,\ K < G,\ H \subseteq K \Rightarrow H \trianglelefteq K$

- $H < G,\ H \subseteq K,\ K < G \Rightarrow H < K$

- Για καθε $k \in K,\ h \in H$

  $khk^{-1} \in H$ αφού $ghg^{-1} \in G\ \forall g \in G$

(9) Νδο $G_1 \times G_2$ ομαδα

Πράξη $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2,\ h_1 * h_2)$

- κλειστή αφου G_1, G_2 ομαδα

- Προσεταιριστική

$(g_1, h_1)\left((g_2, h_2) \cdot (g_3, h_3)\right) = (g_1, h_1)(g_2 g_3, h_2 h_3) =$

$= (g_1 (g_2 g_3), h_1 (h_2 h_3)) = ((g_1 g_2) g_3, (h_1 h_2) h_3) =$

$= ((g_1, h_1)(g_2, h_2))(g_3, h_3)$

- ουδ. στοιχειο $e = (e_1, e_2)$

- αντίστροφο $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$

(10) Απευθείας από την θεωρία

(11) $pr_1 : G_1 \times G_2 \to G_1$
$(g_1, g_2) \to g_1$

Μορφισμός: $pr_1((g_1,g_2)\cdot(g_1',g_2')) = pr_1(g_1g_1', g_2g_2') = g_1g_1' =$
$= pr_1(g_1,g_2) \cdot pr_1(g_1',g_2')$

Επί: $g_1 = pr(g_1, g)$ $\forall g_1 \in G_1$, g τυχαίο του G_2

$\ker pr_1 = \{(g_1,g_2) : pr_1(g_1,g_2) = e_1\} = \{e_1\} \times G_2$

$\trianglelefteq G_1 \times G_2$ άρα $G_1 \times G_2 / \{e_1\} \times G_2 \simeq G_1$

Από την άλλη $\{e_1\} \times G_2 \simeq G_2 : (e_1, g) \to g$ ισομορφισμός

Άρα $G_1 \times G_2 / G_2 \simeq G_1$ και ομοίως $G_1 \times G_2 / G_1 \simeq G_2$

(12) Αν $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ και $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$ τότε

$(g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1^{-1}, g_2^{-1}) = (g_1 h_1 g_1^{-1}, g_2 h_2 g_2^{-1}) \in H_1 \times H_2$

$\Rightarrow H_1 \times H_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$

(13) $H \trianglelefteq G$

$G/H = \{gH, g \in G\}$

Πράξη: $(g_1 H)(g_2 H) = (g_1 g_2)H \in G/H$

- $(g_1 H)((g_2 H)(g_3 H)) = (g_1 H)((g_2 g_3)H) =$
  $= (g_1(g_2 g_3))H = ((g_1 g_2)g_3)H = ((g_1 H)(g_2 H))(g_3 H)$
- ουδ. στοιχείο eH: $(gH)(eH) = (ge)H = (eg)H =$
  $= (eH)(gH) = gH$
- αντ. στοιχείο: $g^{-1}H$: $(gH)(g^{-1}H) = (g \cdot g^{-1})H = eH = H$
- $e_2 = \varphi(e_1)$

(15) $G,\ N \trianglelefteq G$

$\pi : G \to G/N \qquad g \mapsto gN$

Επιμορφισμός

- $\pi(g_1 \cdot g_2) = \pi(g_1 \cdot g_2)N = (g_1N)(g_2N) = \pi(g_1)\pi(g_2)$
- $\pi(e) = e^N = N$
- Αν $gN \in G/N$ $\quad gN = \pi(g)$

(16) $\varphi : G \to H$ επιμ. $N \trianglelefteq G \Rightarrow \varphi(N) \trianglelefteq H$

$\varphi(N) = \{h \in H \mid \exists n \in N \quad h = \varphi(n)\} < H$ διότι

$h_1 h_2 = \varphi(n_1)\varphi(n_2) = \varphi(n_1 \cdot n_2)$

κανονικότητα: $\forall h \in H$, $\varphi(n) \in \varphi(N)$ είναι

$h\,\varphi(n)\,h^{-1} \overset{\text{επι}}{=} \varphi(g)\,\varphi(n)\,\varphi(g^{-1}) =$

$= \varphi(gng^{-1}) = \varphi(n')$ για κάποιο $n' \in N$

(17) $G \times X \to X$

$\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G, gx = x\}$

- $g, g' \in \mathrm{Stab}(x)$
  $(g \cdot g')x = g(g'x) = gx = x$
- $gx = x \Leftrightarrow x = g^{-1}x$
- $ex = x$

(18) $\mathrm{Aut}\,g$: $\varphi : G \to G$ isomorph

~~[illegible]~~

$$\mathrm{Aut}(G) \times G \to G$$
$$(\varphi, g) \to \varphi(g)$$

$\mathrm{orb}\, g = \{\varphi(g), \varphi \cdot \mathrm{Aut}(G)\}$

(19) $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \times \mathbb{R}^n$

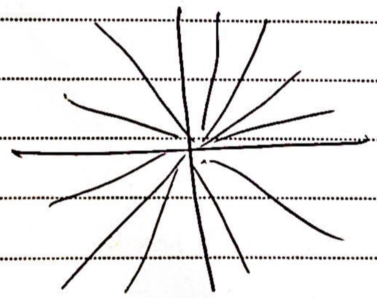
$$(\delta, x) \to \delta x$$

Αριστερή δράση

$$(1, x) \to 1x = x$$

$$(\delta_1, (\delta_2, x)) \mapsto \delta_1(\delta_2 x) = (\delta_1 \delta_2) x$$

$\mathrm{orb}(x) = \{\delta x, \ \delta \in \mathbb{R}_{>0}\}$



Κάθε ακτίνα αντιστοιχεί και σε ένα σημείο του $[0, 2\pi]$

2.2.1

(1) $(X, \{id_X\})$

Η δράση $(id_X, x) \mapsto x$ 1-1 και επί

$orb(x) = x \Rightarrow X/_{id_X} = X$

$(X, Sym(X))$

Η δράση $(\varphi, x) \mapsto \varphi(x)$

$orb(x) = \{\varphi(x), \varphi \in Sym(X)\}$

(2) $(X, G_1) \subset (X, G_2)$ αν $G_1 < G_2$

α) $\forall G$, $id_X < G < Sym(X)$ άρα

$(X, id_X) \subset (X, G) \subset (X, Sym(X))$

β) $G_1 < G_2 \Rightarrow orb_{G_1}(x) = \{g_1 x, g_1 \in G_1\}$

$\overset{G_1 < G_2}{\subseteq} \{g_2 x, g_2 \in G_2\} = orb_{G_2}(x)$

γ) αν η G_2 δρα μεταβατικά στον X

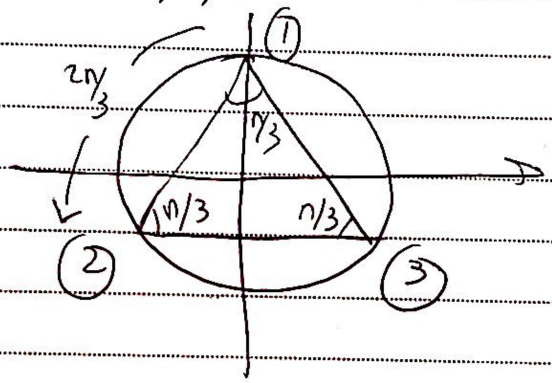
$X/_{G_2}$ αποτελείται από ένα και μόνο σημείο, τον X

Η μεταβατική δράση της G_2 όμως δε συνεπάγεται τη μεταβατική της G_1

$$\mathbb{R}^2/E(2) = \mathbb{R}^2/O(2) = \{(0,0),\ \text{κύκλοι με κέντρο στην αρχή}\}$$

$$= \{orb(0,0)\} = \{\mathbb{R}^2\}$$

4) $X = \{1,2,3\}$



$S_3 = (123)\ (132)\ (213)\ (312)\ (321)$

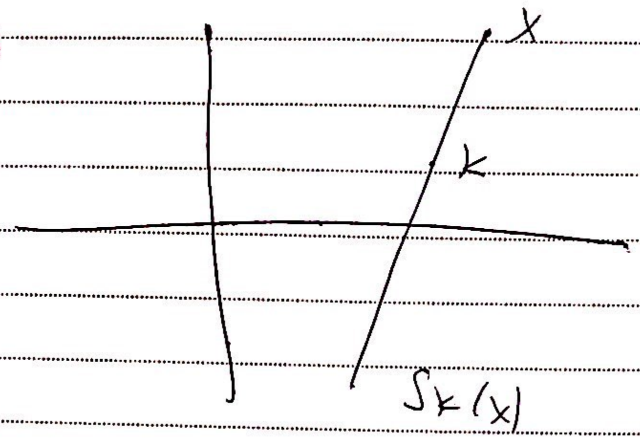
Η υποομάδα του $O(2)$

$\{I_2,\ R_{\pi/2},\ \text{ανάκλαση στον } x=0\}$

Ανάκλαση στον $x=0$ $= (1,0)\cdot(x,y) = 0$
$(A = (1,0))$

$$r(x,y) = (x,y) - 2((x,y)\cdot(1,0))\cdot(1,0) =$$
$$= (x,y) - 2x(1,0) = (-x,y).$$

(5)



$$c(t) = (1-t)k + tx$$

Θέτουμε $S_k(x) = c(t_0) = (1-t_0)k + t_0 x$

$$\|S_k(x) - k\| = \|x - k\|$$

$$\|-t_0 k + t_0 x\| = \|x - k\| \Rightarrow |t_0| = 1 \Rightarrow t_0 = -1$$

$$S_k(x) = c(-1) = 2k - x$$

$$S_k(S_k(x)) = S_k(2k - x) = 2k - (2k - x) = x$$

$$S_k(k) = 2k - k = k$$

$$S_k(x) = 2k - x = x \Leftrightarrow x = k$$

$$\|S_k(x) - S_k(y)\| = \|2k - x - (2k - y)\| = \|x - y\|$$