Εργαστήριο 4

Κεφ. 4

4.1.1

(1) Αποδείξτε ότι κάθε ομοιοθεσία μετρικού χώρου είναι 1-1 απεικόνιση

Έστω f ομοιοθεσία με λόγο ομοιοθεσίας k_f

$$d(f(x), f(y)) = k_f d(x,y) \quad (\text{Η } f \text{ είναι επί})$$

Έστω $f(x) = f(y) \Rightarrow d(f(x), f(y)) = k_f d(x,y) = 0$

$\Rightarrow x = y$

(2) Έστω μετρικός χώρος (X,d) και απεικόνιση $f: X \to X$. Αποδείξτε ότι κάθε ομοιοθεσία είναι συνεχής στον X και η f^{-1} είναι επίσης συνεχής στον X.

Αν $\varepsilon > 0$ τότε για $\delta = \frac{\varepsilon}{k_f}$ και $x: d(x, x_0) < \delta$

$$d(f(x), f(x_0)) = k_f d(x, x_0) < k_f \cdot \frac{\varepsilon}{k_f} = \varepsilon$$

Για την αντίστροφη:

$d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = \frac{1}{k_f} d(x,y)$. Αν $\varepsilon > 0$ τότε

για $\delta = \varepsilon k_f$ και $x: d(x, x_0) < \delta$

$$\Rightarrow d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = \frac{1}{k_f} d(x,y) < \varepsilon \cdot \frac{k_f}{k_f} = \varepsilon$$

(4) Μια απεικόνιση $f: X \to X$ μετρικού χώρου (X,d) επί του εαυτού του λέγεται αμφι-Lipschitz αν

$$\exists\, k = k(f) \geq 1 : \forall x, y \in X,\ \frac{1}{k} d(x,y) \leq d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x,y)$$

α) νδο κάθε αμφι-Lipschitz με σταθερά k είναι αντιστρέψιμη και ότι η αντίστροφη είναι επίσης αμφι-Lipschitz με σταθερά k

Αν $f(x) = f(y)$ τότε $d(f(x), f(y)) = 0$

και $\frac{1}{k} d(x,y) \leq 0 \leq k\, d(x,y)$

$\Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

άρα 1-1 άρα αντιστρέψιμη

Για την αντίστροφη, έστω $f^{-1}(x) = p$, $f^{-1}(y) = q$ τότε $x = f(p)$ και $y = f(q)$

$$d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(p,q) \geq \frac{1}{k} d(f(p), f(q)) =$$

$$= \frac{1}{k} d(x,y)$$

άρα $\frac{1}{k} d(x,y) \leq d(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$

και $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(p,q) \leq k\, d(f(p), f(q)) =$

$$= k\, d(x,y)$$

β) ν.δ.ο κάθε αμφι-Lipschitz απεικόνιση με σταθερά k είναι συνεχής και ότι η αντίστροφη της είναι επίσης συνεχής.

αν $\varepsilon > 0$ και $x_0 \in X$ παίρνουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$

για $d(x, x_0) < \delta$

$d(f(x), f(x_0)) \leq k\, d(x, x_0) < k \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$

ομοίως και η αντίστροφη

γ) ν.δ.ο κάθε ομοιοθεσία του (X, d) είναι αμφι-Lipschitz απεικόνιση

Αν $f \in Sim(X, d)$

$d(f(x), f(y)) = k_f\, d(x, y)$, $k_f > 1$

$\frac{1}{k_f} d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) = k_f\, d(x, y)$

δ) Η δ-συνάρτηση $D\delta(x) = \delta_x$, $x \in R^n$

4.22

(1) $D_\delta \in D(n)$ και $T_\alpha \in T(n)$. Αποδείξτε ότι $T_\alpha \circ D_\delta = D_\delta \circ T_{(1/\delta)\alpha}$

$$T_\alpha \circ D_\delta (x) = T_\alpha(\delta x) = \delta x + \alpha$$

$$D_\delta \circ T_{(\frac{1}{\delta})} (x) = D_\delta\left(x + \frac{1}{\delta}\alpha\right) = \delta x + \alpha$$

(2) $D_\delta \in D(n)$ και $A \in O(n)$ με αντίστοιχο μετασχηματισμό α. Αποδείξτε ότι $\alpha \circ D_\delta = D_\delta \circ \alpha$

$$\alpha(D_\delta(x)) = \alpha(\delta x) = \delta(\alpha(x)) = D_\delta(\alpha(x))$$

(3) $\gamma : [\alpha, b] \to R^n$, $\gamma(t) = X(t)$ συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη. Νδο

α) $\|(\dot{D_\delta \circ \gamma})(t)\| = \delta \|\dot\gamma(t)\|$

$$D_\delta \circ \gamma(t) = \delta X(t)$$

$$\dot{D_\delta \circ \gamma}(t) = \delta \dot X(t)$$

άρα $\|(\dot{D_\delta \circ \gamma})(t)\| = \delta \|\dot\gamma(t)\|$

β) $l(D_\delta \circ \gamma) = \delta l(\gamma)$

$$l(D_\delta \circ \gamma) = \int_\alpha^b \|(\dot{D_\delta \circ \gamma})(t)\| dt = \int_\alpha^b \delta \|\dot\gamma(t)\| dt =$$

Scanned with CamScanner

$$= \delta \int_a^b \|\dot{x}(t)\|\, dt = \delta\, \ell(\gamma)$$

(4) Έστω $\underline{\Omega}$ ανοικτό και φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^n$ και $\underline{\Omega}' = D_\delta(\underline{\Omega})$. Αποδείξτε ότι

$$Vol_n(\underline{\Omega}') = \delta^n\, Vol(\underline{\Omega})$$

Θ. αλλαγής μεταβλητών στον $\mathbb{R}^n$

Έστω $x : \underline{\Omega} \to \underline{\Omega}'$ C' μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$

$$x = (x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_n(u_1, \dots, u_n))$$

με την Ιακωβιανή ορίζουσα

$$Jx = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

Έστω $f : \underline{\Omega}' \to \mathbb{R}$, συνεχής με

$$f = f(x_1, \dots, x_n) = f(x)$$

Τότε

$$\int_{\underline{\Omega}'} f(x)\, dx = \int_{\underline{\Omega}} f(x(u))\, |Jx(u)|\, du$$

Για $f \equiv 1$

$$Vol_n(\underline{O}') = \int_{\underline{O}'} dx = \int_{\underline{O}} |J\,X(u)|\,du$$

Ο μετασχηματισμός μας είναι ο:

$$X(u) = \delta\,I(u) = (\delta u_1, \dots, \delta u_n)$$

$$J\,X(u) = \begin{vmatrix} \delta & & \\ & \ddots & \\ & & \delta \end{vmatrix} = \delta^n$$

άρα $Vol_n(\underline{O}') = \delta^n \int_{\underline{O}} du = \delta^n \, Vol(\underline{O})$

4.3.1.

① Απόδειξτε ότι αν x_1, x_2, x_3 διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του $\mathbb{R}^n$ και $i, j, k = 1,2,3$, $i \neq j \neq k$ τότε

1. $\|(x_i, x_j, x_k)\| \cdot \|(x_k, x_j, x_i)\| = 1$

$$s(p) = s(x_1, x_2, x_3) = \frac{\|x_2 - x_1\|}{\|x_2 - x_3\|}$$

άρα

$$s(x_i, x_j, x_k) \cdot s(x_k, x_j, x_i) =$$

$$= \frac{\|x_j - x_i\|}{\|x_j - x_k\|} \cdot \frac{\|x_j - x_k\|}{\|x_j - x_i\|} = 1$$

2. $\|(x_i, x_j, x_k)\| \cdot \|(x_k, x_i, x_j)\| \cdot \|(x_j, x_k, x_i)\| = 1$

$$\frac{\|x_j - x_i\|}{\|x_j - x_k\|} \cdot \frac{\|x_i - x_k\|}{\|x_i - x_j\|} \cdot \frac{\|x_k - x_j\|}{\|x_k - x_i\|} = 1$$

3. Όλοι οι δυνατοί μετρικοί απλοί λόγοι εκφράζονται μέσω των

$$S_1 = \|(x_1, x_2, x_3)\|, \quad S_2 = \|(x_1, x_3, x_2)\|$$

$$s(x_3, x_2, x_1) = \frac{\|x_2 - x_3\|}{\|x_2 - x_1\|} = \frac{1}{S_1}$$

$$s(x_3, x_1, x_2) = \frac{\|x_1 - x_3\|}{\|x_1 - x_2\|} = \frac{1}{S_2 \cdot S_1}$$

$S(x_2, x_1, x_3) = \frac{1}{S_1} \cdot \frac{1}{S_2}$

4. $S_1 + S_2 \geq 1$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν τα x_1, x_2, x_3 ανήκουν στην ίδια ευθεία

$S_1 + S_2 = S_1(x_1, x_2, x_3) + S_2(x_1, x_3, x_2) =$

$$= \frac{\|x_2 - x_1\|}{\|x_2 - x_3\|} + \frac{\|x_3 - x_1\|}{\|x_3 - x_2\|} =$$

$$= \frac{\|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_3\|}{\|x_3 - x_2\|} \underset{\text{ανισότητα}}{\overset{\text{τριγωνική}}{\geq}} \frac{\|x_2 - x_3\|}{\|x_3 - x_2\|} = 1$$

Ισότητα σημαίνει ισότητα στην τριγωνική ανισότητα.

δηλ. οτι x_1, x_2, x_3 ανήκει στην ίδια ευθεία