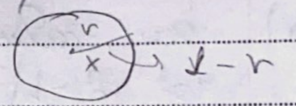
Εργαστήριο 5

5.1.2

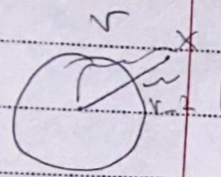
(2) Αποδείξτε ότι η S^{n-1}, $n \geq 3$ είναι συμπαγές σύνολο

η S^{n-1} είναι φραγμένο σύνολο εφόσον $\|x\| = 1$.
Θα δείξουμε ότι είναι κλειστό.

Αν $x \in B(0,1)$ με $d(0,x) = r$, παίρνουμε
$\varepsilon = \frac{\min(r, 1-r)}{2}$



Τότε $B(x,\varepsilon) \subset B(0,1)$



Αν $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0,1)}$ με $d(0,x) = r$ παίρνουμε
$\varepsilon = \frac{r-1}{2}$ ότι $B(x,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0,1)}$.

(3) Αποδείξτε ότι:

α) ο περιορισμός h στην S^{n-1} της απεικόνισης που ορίζεται από την $x = r\cos\varphi e_1 + r\sin\varphi z$ είναι επί της S^{n-2}

Εάν $x \in S^{n-1}$, $r = 1$ ότι $x \xrightarrow{h} \cos\varphi e_1 + \sin\varphi z$

$z = (0, z_1, \dots, z_{n-1})$: $\|z\| = 1$

Παίρνουμε $\varphi = \frac{\pi}{2}$ και έχουμε το ζητούμενο β) Η αντίστροφη εικόνα $h^{-1}(z)$ κάθε σημείου z της S^{n-2} είναι κύκλος της S^{n-1} με κέντρο την αρχή

$$h^{-1}(z) = \{ \cos\phi \, e_1 + \sin\phi \, z , \ \phi \in [0,\pi] \}$$

ημισφαίριο με κέντρο την αρχή

5.1.4

(1) Γράψτε αναλυτικές τιμές με 2 τρόπους:

α) την ευθεία που περνά από το $(-1,2)$ στην κατεύθυνση του $(2,-1)$

$$c(t) = (-1,2) + t(2,-1), \ t \in \mathbb{R}$$
$$= (2t-1, -t+2)$$

$$x_1 = 2t-1, \quad x_2 = -t+2$$
$$\Rightarrow \quad x_1 + 2x_2 = 3$$

β) το επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ από την αρχή που παράγεται από τα $(1,-1,0)$, $(0,1,1)$

$$X(\lambda,\mu) = \lambda(1,-1,0) + \mu(0,1,1) =$$
$$= (\lambda, -\lambda+\mu, \mu), \ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = -\lambda+\mu, \quad x_3 = \mu$$
$$\Rightarrow \quad x_2 = -x_1 + x_3$$

κάθετο διάν. $(1,1,-1)$ άρα

$$(x_1,x_2,x_3)\cdot(1,1,-1) = 0$$

γ) το 2-επίπεδο του R^4 που περνά από το e_1 και παράγεται από τα e_3, e_4.

$$x(\lambda, h) = (1,0,0,0) + \lambda(0,0,1,0) + h(0,0,0,1)$$
$$= (1, 0, \lambda, h)$$

$x_1 = 1, \ x_2 = 0$ Για το ορθογ. διαν.

$$(x_1 - 1, x_2, x_3, x_4)(1,0,0,0) = 0$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4)(0,1,0,0) = 0$$

② Βρείτε την τομή της ευθείας $c(t) = (2,0,0) + t(-1,1,1)$ και της σφαίρας S^2

$$c(t) = (2-t, t, t)$$

$$\|c(t)\|^2 = 1 \iff (2-t)^2 + t^2 + t^2 = 1$$
$$\Rightarrow \quad 3t^2 - 4t + 3 = 0$$
$$\Delta = 16 - 4 \cdot 3 \cdot 3 < 0$$
άρα $\quad c(t) \cap S^{n-1} = \varnothing$

③ Βρείτε την τομή του επιπέδου $X(\lambda, h) = (0,1,1) + \lambda(0,2,0) + h(1,0,1)$

και της σφαίρας S^2

$$X(\lambda, h) = (h, 1+2\lambda, 1+h)$$

$$\|X(\lambda, h)\|^2 = h^2 + (1+2\lambda)^2 + (1+h)^2 = 1$$

$\Rightarrow (1+2\lambda)^2 + 2\mu^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\mu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1$

$\Rightarrow (1+2\lambda)^2 + \left(\sqrt{2}\mu + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

Θέλουμε $1+2\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$, $\sqrt{2}\mu + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}$

και η τομή

$x(\theta) = \left(\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\right)$

$\| x(\theta) + \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)\| = \|\left(\frac{1}{2}\sin\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta\right)\| =$

$= \frac{1}{2}$.

(7) Έστω ω_k k-επίπεδο όπως όταν

$x = x(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \alpha + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$

όπου υποθέτουμε ότι τα v_i, $i = 1, \dots, k$ είναι ορθοκανονικά.
Αποδείξτε ότι η ορθογώνια προβολή $pr_{\omega_k}(x)$ του x στο

ω_k δίνεται από τον $pr_{\omega_k}(x) = \alpha + \sum_{i=1}^{k}((x-\alpha)\cdot v_i)v_i$

$x - pr_{\omega_k}(x) = x - \alpha - \sum_{i=1}^{k}((x-\alpha)v_i)v_i$

Για κάθε $j=1,\dots,k$

$$(x - pr_{\omega_k}(x))\cdot v_j = (x-\alpha)\cdot v_j - (x-\alpha)\cdot v_j = \quad (v_i \text{ ορθοκανονικά})$$
$$= 0$$

5.1.6.

(1) Βρείτε την κανονικοποιημένη ομογένεια $\chi_p(\theta)$ όλων των μέγιστων κύκλων της S^2 που περνάν από το $(1/\sqrt{3})(1,1,1)$.

όπως στο παράδειγμα 5.1.16

$$x(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\cos\theta + \sin\theta(x_1, x_2, x_3)$$

όπου $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ και $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

Οπότε $x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 = 1$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 1/2$ (συμπλήρωση τετραγώνου)

$$\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3x_2^2}{4} = \frac{1}{2}$$

Θέτω $x_1 - \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\varphi$$

Οπότε $x_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\varphi$

$x_3 = -x_1 - x_2$

(3) Βρείτε με 2 τρόπους το κύκλο ... της S^2 που περνά από τα $(1/\sqrt{5})(1,0,2)$ και $(1/\sqrt{5})(1,2,0)$

<u>1ος τρόπος</u>

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2), \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$$

$$\eta = v_1 \times v_2 = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}(-4e_1 + 2e_2 + 2e_3)$$

ο μέγιστος κύκλος με η είναι το

$$-4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \text{ με την } S^2$$

<u>2ος τρόπος</u>

Βλέπουμε ότι $v_1 \cdot v_2 = \frac{1}{5}$

Θέλουμε $w = \lambda v_1 + \mu v_2$ και αναζητούμε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

με $w \cdot v_1 = \lambda + \frac{\mu}{5} = 0$

παίρνουμε $\lambda = 1, \mu = -5$

και θέτουμε το μοναδιαίο

$$v_2' = \frac{v_1 - 5v_2}{\|v_1 - 5v_2\|} = \dots$$

ο γεωδαισιακός κύκλος

$$x(\theta) = \cos\theta\, v_1 + \sin\theta\, v_2'$$

$$x\left(\arccos\left(\frac{1}{5}\right)\right) = v_2$$

(6) Βρείτε τα σημεία τομής των μεγίστων κύκλων L_1 και L_2 της S^2 αν ο L_1 περνά από τα

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1,1,-1) \quad , \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1,-1,1)$$

και ο L_2 περνά από τα $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1,-1,-1)$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(-1,1,-1)$$

L_1: $\quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$

L_2: $\quad v_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)\ , \quad v_2' = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)$

$$n_1 = v_1 \times v_2 = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(-e_2 - 2e_3)$$

$$n_2 = v_1' \times v_2' = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2)$$

$$n_1 \times n_2 = \frac{1}{9}(e_3 + 2e_2 + 2e_1)$$

σπλαία ωλαίς $\dfrac{\pm n_1 \times n_2}{\|n_1 \times n_2\|}$

(8) Εσω οι μέγιστοι κύκλοι L_1 και L_2 της S^2 με παραμετρικές

$$x_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{7}}\left(\cos\theta(1,-1,2,1) + \sin\theta(1,1,1,-2)\right)$$

$$x_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{7}}\left(\cos\theta(1,2,-1,1) + \sin\theta(2,-1,1,1)\right)$$

Εξετάστε αν τέμνονται η όχι

(Είναι κύκλος της S^3, διαφορετική κάθετος από την φράση 5.1.22)

Ο $x_1(\theta)$ ανήκει σε επίπεδο

$$x_1(\lambda,\mu) = \lambda(1,-1,2,1) + \mu(1,1,1,-2)$$

και ο $x_2(\theta)$ εδώ

$$x_2(\lambda,\mu) = \lambda(1,2,-1,1) + \mu(2,-1,1,1)$$

$$x_1(\lambda,\mu) = (\lambda+\mu, -\lambda+\mu, 2\lambda+\mu, \lambda-2\mu)$$

$x_1 = \lambda+\mu$, $x_2 = -\lambda+\mu$, $x_3 = 2\lambda+\mu$, $x_4 = \lambda-2\mu$

Απαλοίφαμε τα λ, μ:

$$x_1 + x_2 = 2\mu \Rightarrow \lambda = x_1 - \mu = x_1 - \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2} = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

Οπότε $x_3 = 2\lambda+\mu = \dfrac{3x_1 - x_2}{2}$

$$x_4 = \lambda - 2\mu = \frac{-x_1 - 3x_2}{2}$$

Ισοδύναμα

$$\boxed{\begin{array}{l} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0 \end{array}} \quad (1)$$

$x_2(\lambda, \mu) = (\lambda + 2\mu, 2\lambda - \mu, -\lambda + \mu, \lambda + \mu)$
απαλοιφή και λ και μ.

. – – –

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right| \quad (2)$$

Εξετάζουμε τα ομογενή συστήματα των (1), (2)
(Gauss)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \sim \begin{array}{l} r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - r_1 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \quad r_{34} \to 3r_4$$

. - - -

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Τριγωνίσαμε
άρα έχει μόνο
τη μηδενική λύση

Άρα η τομή των επιπέδων είναι το $(0,0,0,\omega)$
και συνεπώς η τομή των μέγιστων κύκλων είναι κενή

5.2-1

(2) Δείξτε ότι 2 οποιαδήποτε αντιποδικά σημεία της
S^{n-1} απέχουν σφαιρική απόσταση π.

$$\cos S_{n-1}(v,-v) = v\cdot(-v) = -1$$

άρα $\arccos(-1) = \pi$

(5) Ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στον ίδιο
μέγιστο κύκλο;

1) $x=(0,0,-1)$ $y=(0,1,0)$ και $(0,0,1)=z$

$$\cos\theta_{xy} = (0,0,-1)(0,1,0) = 0 \Rightarrow \theta_{xy} = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\theta_{yz} = (0,1,0)\cdot(0,0,1) = 0 \Rightarrow \theta_{yz} = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\theta_{xz} = (0,1,-1)(0,0,1) = -1 \Rightarrow \theta_{xz} = \pi$$

$\theta_{xy} + \theta_{yz} = \theta_{xz}$ άρα τα x, y, z ανήκουν στον
ίδιο μέγιστο κύκλο.

④ -⑤ $x_0 \in S^{n-1}$ και $0 < \varepsilon \leq 2\pi$. Η ανοικτή σφαιρική περιοχή $B^S_{x_0}(\varepsilon)$ κέντρου x_0 και ακτίνας ε είναι το σύνολο

$$B^S_{x_0}(\varepsilon) = \{ x \in S^{n-1} \mid S_{n-1}(x, x_0) < \varepsilon \}$$

Αποδείξτε ότι:

$$B^S_{x_0}(\varepsilon) = \begin{cases} B^C_{x_0}(2\sin(\frac{\varepsilon}{2})) & , \varepsilon \leq \pi \\ \mathbb{R}^n \setminus B^C_{x_0}(2\sin(\frac{\varepsilon}{2})) & , \pi < \varepsilon \leq 2\pi \end{cases}$$

όπου $B^C_{x_0}(\delta) = \{ x \in S^{n-1} \mid e_n(x, x_0) < \delta \}$
(ανοικτή περιοχή κέντρου x_0 και ακτίνας $\delta > 0$ ως προς τη χορδική μετρική)

$$S_{n-1}(x, x_0) = \arccos(x \cdot x_0) < \varepsilon$$

παίρνοντας συν έχω (συν φθίνουσα)

$$x \cdot x_0 > \cos\varepsilon \Rightarrow$$

$$2\, x \cdot x_0 > 2\cos\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad -2\, x \cdot x_0 < -2\cos\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \|x - x_0\|^2 - \|x_0\|^2 - \|x\|^2 < -2\cos\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \|x - x_0\|^2 < 2(1 - \cos\varepsilon)$$

$$\|x - x_0\|^2 < 2\left(1 - 1 + 2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right) = 4\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$$

άρα $\quad \|x - x_0\| < 2\sin\frac{\varepsilon}{2}$

Αν $\varepsilon \in [\pi, 2\pi]$ η ως είναι αυξουσα
Κανω αλλά τα ίδια βηματα

Εμβαδον $= 4\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$

5.3.2.

(2) Εστω C ο μεγιστος κυκλος με παραμετρηση
$x(\theta) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ και σημειο
$v = \cos\varphi_1 e_1 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 e_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 e_3$
που δεν ανηκει στο C και δεν ειναι πολος του C.
Υποθετουμε $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, \pi]$, $\varphi_1, \varphi_2 \neq \frac{\pi}{2}$

α) Βρειτε $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$
$f(\theta) = \cos(d_2(v, x(\theta)))$

$f(\theta) = v \cdot x(\theta) = \cos\varphi_1 \cos\theta + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin\theta$

β) η αποσταση $d_2(v, C)$ ειναι ελαχιστη στο σημειο που μεγιστοποιειται η f. Βρειτε το σημειο αυτο και την αντιστοιχη αποσταση

$f'(\theta) = -\cos\varphi_1 \sin\theta + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\theta = 0$
$\Rightarrow \sin\theta \cos\varphi_1 = \cos\theta \sin\varphi_1 \cos\varphi_2$
$\Rightarrow \tan\theta = \tan\varphi_1 \cos\varphi_2$
$\theta \neq \pi/2$
$f''(\theta) = -f(\theta)$

Μπορούμε να πάρουμε την $f: [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$
διότι τεμνόμαστε πάντα πάνω στο ημισφαίριο ...
Άρα έχουμε σημείο μέγιστο

γ) Το σημείο ομφαλοποίησης

$$X(\arctan(\tan\varphi_1 \cot\varphi_2)) = \omega$$

Ο μέγας κύκλος που περνά από τα v, ω
έχει πολικό διάνυσμα

$$n \perp (0,0,1) = \text{πολικό διάνυσμα του } X(\theta)$$

③ Στην πρόταση 5.3.3 2) αποδείξαμε ότι τα σημεία είναι πόλοι των μεγίστων κύκλων;

άπειρες κάθετες

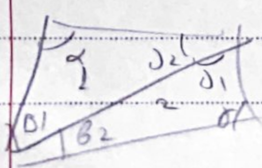
V.14

5.3.5

① Γενικεύστε τον τύπο του Girard για το εμβαδόν σφαιρικού n-γώνου (το χωρίο που περικλείεται μεταξύ n τεμνόμενων ανά 2 μεγίστων κύκλων)

Για το σφαιρικό τετράπλευρο

$$E_T = E_1 + E_2 = \alpha_1 + \beta_1 + \delta_2 - \pi + \beta_2 + \gamma + \delta_1 - \pi =$$
$$= \alpha + \beta + \gamma + \delta - 2\pi$$



Ένα n-γωνο χωρίζεται σε $n-2$ τρίγωνα οπότε

$$E = \alpha_1 + \dots + \alpha_n - (n-2)\pi$$

(2) Αποδείξτε το Π.Θ. ανεξάρτητα από τον 1ο νόμο συνημιτόνων, παίρνοντας κατάλληλη κανονικοποίηση για τις κορυφές του τριγώνου.

$A = e_3 \qquad (\theta, \varphi) = \left(\frac{\pi}{2} - c, 0\right)$

$B = \qquad (\theta, \varphi) = (c, 0)$

$C \qquad (\theta, \varphi) = \left(\frac{\pi}{2} - b, \frac{\pi}{2}\right)$

και τώρα όπως 1ο νόμο συνημιτόνων

(4) Υπολογίστε το εμβαδόν σφαιρικού τριγώνου του οποίου όλες οι γωνίες είναι $\pi/2$

$$E = \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$$

(6) Έστω ισόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο πλευράς α και εσωτερικής γωνίας A. Αποδείξτε ότι $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Συμπεράνετε ότι σε σφαιρικό ισόπλευρο τρίγωνο $A > \frac{\pi}{3}$

$2^{ος}$ νόμος συνημιτόνων

$$\cos\alpha = \frac{\cos A + \cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{\cos A}{1-\cos A}$$

$$1+\cos\alpha = \frac{1}{1-\cos A} \Rightarrow (1-\cos A)(1+\cos\alpha) = 1$$

$$\Rightarrow 4\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} > \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow A > \frac{\pi}{3}$$

(7) Υπολογίστε την περίμετρο σφαιρικού τριγώνου του οποίου όλες οι γωνίες είναι ορθές

$A = B = C = \pi/2 \Rightarrow 2^{ος}$ Ν. συνημ.

$\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pi/2$

περίμετρος $3\frac{\pi}{2}$