0 Προκαταρκτικά

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Στο κεφάλαιο αυτό συνοψίζουμε τις πλέον απαραίτητες εισαγωγικές γνώσεις για τη μελέτη του απειροστικού λογισμού. Επίσης, εισάγουμε τον αναγνώστη στη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή για τη διερεύνηση των μαθηματικών εννοιών, τη συμπλήρωση και στήριξη της αναλυτικής δουλειάς, και την επίλυση προβλημάτων με αριθμητικές και γραφικές μεθόδους. Θα δώσουμε έμφαση στις συναρτήσεις και στις γραφικές παραστάσεις, δύο έννοιες που αποτελούν τους κύριους άξονες του απειροστικού λογισμού.

Οι συναρτήσεις και οι παραμετρικές εξισώσεις είναι τα σπουδαιότερα εργαλεία περιγραφής του πραγματικού κόσμου με μαθηματική γλώσσα, καλύπτοντας ένα εύρος φαινομένων τεράστιο, από τις θερμοκρασιακές μεταβολές ώς τις κινήσεις των πλανητών, από τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα του εγκεφάλου ώς τους επιχειρησιακούς κύκλους, και από τους καρδιακούς ρυθμούς ώς την πληθυσμιακή αύξηση. Μερικές συναρτήσεις αποκτούν ιδιαίτερη σημασία λόγω του φαινομένου που περιγράφουν. Έτσι, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις περιγράφουν κυκλικές, επαναλαμβανόμενες διεργασίες· οι εκθετικές, οι λογαριθμικές και οι λογιστικές συναρτήσεις περιγράφουν αύξηση και ελάττωση· οι πολυωνυμικές μπορούν να προσεγγίσουν τις προαναφερθείσες συναρτήσεις καθώς και τις περισσότερες από τις υπόλοιπες.

1 Ευθείες

Μεταβολές • Κλίση ευθείας • Παράλληλες και κάθετες ευθείες • Εξισώσεις ευθειών • Εφαρμογές • Παλινδρομική ανάλυση με υπολογιστή

Ένας από τους λόγους που ο απειροστικός λογισμός έχει αποβεί τόσο χρήσιμος είναι ότι αποτελεί την κατάλληλη μαθηματική γλώσσα για να συσχετίσουμε τον ρυθμό μεταβολής μιας ποσότητας με τη γραφική της παράσταση. Η ερμηνεία της σχέσης αυτής είναι ένας από τους στόχους του παρόντος βιβλίου. Θα ξεκινήσουμε μελετώντας τις κλίσεις ευθειών.

Τα σύμβολα Δx και Δy διαβάζονται «δέλτα x» και «δέλτα y». Το γράμμα Δ δηλώνει «διαφορά». Τα Δx και Δy δεν συμβολίζουν πολλαπλασιασμό· το Δx δεν σημαίνει «Δ επί x», ούτε το Δy «Δ επί y».

Μεταβολές

Όταν ένα σωματίδιο κινείται από ένα σημείο του επιπέδου προς ένα άλλο, οι συνολικές *μεταβολές* των συντεταγμένων του προκύπτουν αν αφαιρέσουμε τις συντεταγμένες του σημείου εκκίνησης από τις συντεταγμένες του σημείου τερματισμού. Οι μεταβολές μπορεί να είναι θετικές, αρνητικές, ή μηδέν, όπως φαίνεται στο Παράδειγμα 1.

Ορισμός **Μεταβολές**

Όταν ένα σώμα μεταβαίνει από το σημείο (x_1, y_1) στο σημείο (x_2, y_2), τότε οι **μεταβολές** των συντεταγμένων του είναι

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \text{και} \qquad \Delta y = y_2 - y_1 .$$

Παράδειγμα 1 Εύρεση μεταβολών

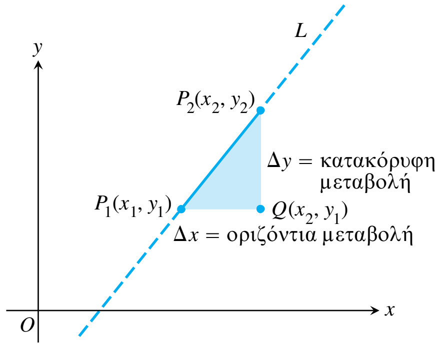
Οι μεταβολές από το σημείο $(4, -3)$ στο $(2, 5)$ είναι

$$\Delta x = 2 - 4 = -2, \qquad \Delta y = 5 - (-3) = 8.$$

Από το σημείο $(5, 6)$ στο $(5, 1)$, οι μεταβολές είναι

$$\Delta x = 5 - 5 = 0, \qquad \Delta y = 1 - 6 = -5.$$

Κλίση ευθείας



Σχημα 1 Η κλίση της ευθείας L είναι $m = \dfrac{\text{κατακόρυφη μεταβολή}}{\text{οριζόντια μεταβολή}} = \Delta y/\Delta x$.

Κάθε μη κατακόρυφη ευθεία L έχει *κλίση*, που υπολογίζεται ως η κατακόρυφη μεταβολή ανά μονάδα οριζόντιας μεταβολής, ως ακολούθως: Έστω δύο σημεία $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$ της L (Σχήμα 1). Ονομάζουμε $\Delta y = y_2 - y_1$ την **κατακόρυφη μεταβολή** από το P_1 στο P_2, $\Delta x = x_2 - x_1$ την **οριζόντια μεταβολή** από το P_1 στο P_2, και ορίζουμε ως κλίση της L το πηλίκο $\Delta y/\Delta x$.

Ορισμός **Κλίση ευθείας**

Έστω $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$ δύο σημεία μιας μη κατακόρυφης ευθείας, L. Η κλίση της L είναι

$$m = \frac{\text{κατακόρυφη μεταβολή}}{\text{οριζόντια μεταβολή}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Συνηθίζεται να συμβολίζουμε την κλίση με το γράμμα m.

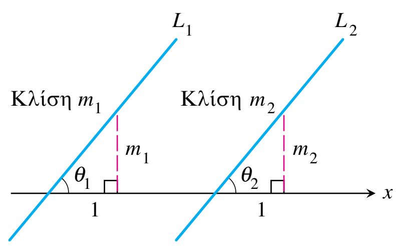
Μια ευθεία που ανέρχεται καθώς το x αυξάνεται έχει θετική κλίση. Μια ευθεία που κατέρχεται καθώς το x αυξάνεται έχει αρνητική κλίση. Μια οριζόντια γραμμή έχει μηδενική κλίση, εφόσον όλα της τα σημεία έχουν την ίδια συντεταγμένη y, οπότε $\Delta y = 0$. Για κατακόρυφες ευθείες, $\Delta x = 0$, οπότε ο λόγος $\Delta y/\Delta x$ δεν ορίζεται. Λέμε λοιπόν ότι *οι κατακόρυφες ευθείες δεν έχουν κλίση*.

Παράλληλες και κάθετες ευθείες

Οι παράλληλες ευθείες σχηματίζουν ίσες γωνίες με τον άξονα x (Σχήμα 2). Έτσι, οι μη κατακόρυφες παράλληλες ευθείες έχουν την ίδια κλίση. Αντιστρόφως, ευθείες με ίσες κλίσεις σχηματίζουν ίσες γωνίες με τον άξονα x και είναι, συνεπώς, παράλληλες.

Αν δύο μη κατακόρυφες ευθείες L_1 και L_2 είναι κάθετες μεταξύ τους, οι κλίσεις τους m_1 και m_2 ικανοποιούν τη σχέση $m_1 m_2 = -1$, δηλαδή η μία κλίση είναι *αντιθέτως αντίστροφη* της άλλης:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \qquad m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

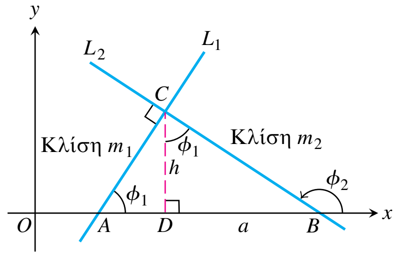


Σχημα 2 Αν $L_1 \parallel L_2$, τότε $\theta_1 = \theta_2$ και άρα $m_1 = m_2$. Αντίστροφα, αν $m_1 = m_2$, τότε $\theta_1 = \theta_2$ και $L_1 \parallel L_2$.

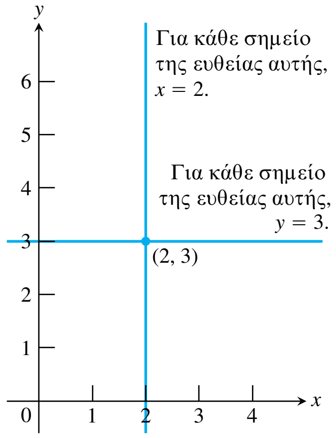
Η απόδειξη της πρότασης αυτής έχει ως εξής: Σύμφωνα με το Σχήμα 3, $m_1 = \tan\phi_1 = a/h$, ενώ $m_2 = \tan\phi_2 = -h/a$. Συνεπώς, θα έχουμε $m_1 m_2 = (a/h)(-h/a) = -1$.

Παράδειγμα 2 Προσδιορισμός της καθέτου από την κλίση

Αν L είναι μια ευθεία με κλίση $3/4$, τότε κάθε άλλη ευθεία με κλίση $-4/3$ θα είναι κάθετη στην L.



Σχημα 3 Το τρίγωνο ΔADC είναι όμοιο με το ΔCDB. Συνεπώς, η άνω γωνία στο ΔCDB ισούται με ϕ_1, όπου $\tan \phi_1 = a/h$.



Σχημα 4 Οι εξισώσεις της κατακόρυφης και της οριζόντιας ευθείας που διέρχονται από το σημείο (2, 3) είναι $x = 2$ και $y = 3$, αντίστοιχα. (Παράδειγμα 3)

Εξισώσεις ευθειών

Η κατακόρυφος που διέρχεται από το σημείο (a, b) έχει ως εξίσωση την $x = a$, αφού η συντεταγμένη x οποιουδήποτε σημείου της ευθείας έχει τιμή a. Ομοίως, η οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το σημείο (a, b) έχει ως εξίσωση την $y = b$.

Παράδειγμα 3 Εύρεση εξισώσεων για κατακόρυφες και οριζόντιες ευθείες

Η κατακόρυφη και η οριζόντια ευθεία που διέρχονται από το σημείο (2, 3) έχουν ως εξισώσεις τις $x = 2$ και $y = 3$, αντίστοιχα (Σχήμα 4).

Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση τυχούσας μη κατακόρυφης ευθείας αν γνωρίζουμε την κλίση της m και τις συντεταγμένες ενός σημείου της $P_1(x_1, y_1)$. Κι αυτό διότι, αν $P(x, y)$ είναι *οποιοδήποτε* άλλο σημείο της ευθείας, θα ισχύει

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m,$$

οπότε

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{δηλαδή} \qquad y = m(x - x_1) + y_1 .$$

Ορισμός **Εξίσωση σημείου-κλίσεως**

Η εξίσωση

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

περιγράφει την ευθεία που διέρχεται από το σημείο (x_1, y_1) με κλίση m. Για λόγους συντομίας θα καλούμε την εξίσωση αυτή **εξίσωση σημείου-κλίσεως**.

Παράδειγμα 4 Χρησιμοποιώντας την εξίσωση σημείου-κλίσεως

Γράψτε μια εξίσωση για την ευθεία που διέρχεται από το σημείο (2, 3) με κλίση $-3/2$.

Λύση Αντικαθιστούμε $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, και $m = -3/2$ στην εξίσωση σημείου-κλίσεως, απ' όπου παίρνουμε

$$y = -\frac{3}{2}(x - 2) + 3 \qquad \text{δηλαδή} \qquad y = -\frac{3}{2}x + 6 .$$

Παράδειγμα 5 Χρησιμοποιώντας την εξίσωση σημείου-κλίσεως

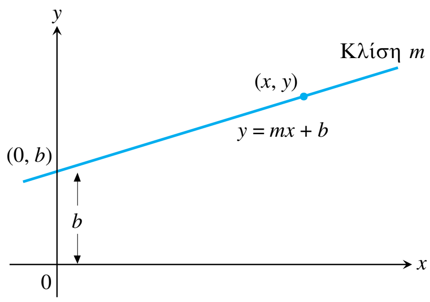
Γράψτε μια εξίσωση για την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(-2, -1)$ και (3, 4).

Λύση Η κλίση της ευθείας είναι

$$m = \frac{4 - (-1)}{3 - (-2)} = \frac{5}{5} = 1 .$$

Απομένει να εισαγάγουμε την κλίση m και τις συντεταγμένες οποιουδήποτε από τα δύο σημεία στην εξίσωση σημείου-κλίσεως. Αν επιλέξουμε το σημείο $(x_1, y_1) = (-2, -1)$, παίρνουμε

$$y = 1 \cdot (x - (-2)) + (-1)$$
$$y = x + 2 + (-1)$$
$$y = x + 1 .$$



Σχημα 5 Μια ευθεία κλίσεως m και τεταγμένης b.

Η συντεταγμένη y του σημείου τομής μιας μη κατακόρυφης ευθείας με τον άξονα y είναι η **τεταγμένη** της ευθείας. Ομοίως, η συντεταγμένη x του σημείου τομής μιας μη οριζόντιας ευθείας με τον άξονα x είναι η **τετμημένη** της ευθείας. Μια ευθεία με κλίση m και τεταγμένη b διέρχεται από το $(0, b)$ (Σχήμα 5), οπότε

$$y = m(x - 0) + b, \qquad \text{ή, απλούστερα,} \qquad y = mx + b.$$

Ορισμός **Εξίσωση κλίσεως-τεταγμένης**

Η εξίσωση

$$y = mx + b$$

περιγράφει την ευθεία που έχει κλίση m και τεταγμένη b. Για λόγους συντομίας θα καλούμε την εξίσωση αυτή **εξίσωση κλίσεως-τεταγμένης**.

Παράδειγμα 6 Εξισώσεις ευθειών

Να γραφεί μια εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(-1, 2)$ και είναι **(α)** παράλληλη· **(β)** κάθετη στην ευθεία $L: y = 3x - 4$.

Λύση Η ευθεία L, $y = 3x - 4$, έχει κλίση 3.

(α) Η ευθεία $y = 3(x + 1) + 2$, ή $y = 3x + 5$, διέρχεται από το σημείο $(-1, 2)$ και είναι παράλληλη στην L, αφού έχει κλίση 3.

(β) Η ευθεία $y = (-1/3)(x + 1) + 2$, ή $y = (-1/3)x + 5/3$, διέρχεται από το σημείο $(-1, 2)$ και είναι κάθετη στην L αφού έχει κλίση $-1/3$.

Αν τα A και B δεν είναι ταυτοχρόνως μηδέν, τότε η γραφική παράσταση της εξίσωσης $Ax + By = C$ είναι μια ευθεία. Κάθε ευθεία μπορεί να παρασταθεί από μια εξίσωση τέτοιας μορφής, ακόμη και όταν δεν έχει κλίση.

Ορισμός **Γενική γραμμική εξίσωση**

Η εξίσωση

$$Ax + By = C \qquad (A \text{ και } B \text{ όχι ταυτοχρόνως μηδέν})$$

είναι μια **γενική γραμμική εξίσωση** των x και y.

Η γενική γραμμική μορφή προσφέρεται για τον γρήγορο χαρακτηρισμό μιας γραμμής ως ευθείας. Ωστόσο, όταν σχεδιάζουμε μια ευθεία με τη βοήθεια υπολογιστικού προγράμματος, είναι ευκολότερο να εισάγουμε στον υπολογιστή την κλίση και την τεταγμένη της ευθείας, και να χρησιμοποιούμε την εξίσεωση κλίσεως-τεταγμένης.

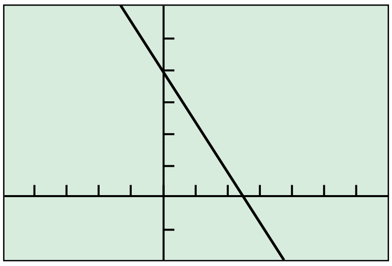
Παράδειγμα 7 Ανάλυση και γραφική παράσταση μιας γενικής γραμμικής εξισώσεως

Αφού βρείτε την κλίση και την τεταγμένη της ευθείας $8x + 5y = 20$, σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.

Λύση Λύνουμε την εξίσωση ως προς y για να τη θέσουμε στη μορφή κλίσεως-τεταγμένης.

$$\begin{aligned} 8x + 5y &= 20 \\ 5y &= -8x + 20 \end{aligned}$$

$y=-\frac{8}{5}x+4$



[–5, 7] επί [–2, 6]

Σχημα 6 Η ευθεία $8x + 5y = 20$.

$$y = -\frac{8}{5}x + 4\,.$$

Η τελευταία σχέση μάς δείχνει την κλίση ($m = -8/5$) και την τεταγμένη ($b = 4$) της ευθείας, και μπορεί τώρα να εισαχθεί άμεσα σε υπολογιστή για σχεδίαση (Σχήμα 6).

Εφαρμογές

Πολλές μεταβλητές ουσιώδους φυσικής σημασίας συνδέονται μέσω γραμμικών εξισώσεων. Στο παράδειγμα που ακολουθεί, εκμεταλλευόμαστε τη γραμμική σχέση μεταξύ των θερμοκρασιών Fahrenheit και Κελσίου για να κάνουμε μετατροπές από τη μία κλίμακα στην άλλη.

Παράδειγμα 8 Μετατροπή θερμοκρασίας

Βρείτε μια σχέση που να συνδέει τις κλίμακες θερμοκρασίας Fahrenheit και Κελσίου. Κατόπιν βρείτε τις ισοδύναμες θερμοκρασίες των 90°F (σε °C), και των −5°C (σε °F).

Λύση Επειδή η σχέση που συνδέει τις δύο κλίμακες είναι γραμμική, θα έχει τη μορφή $F = mC + b$. Το σημείο πήξεως του νερού είναι $F = 32°$ ή $C = 0°$, ενώ το σημείο βρασμού (ή σημείο ζέσεως) είναι $F = 212°$ ή $C = 100°$. Έτσι,

$$32 = m \cdot 0 + b \qquad \text{και} \qquad 212 = m \cdot 100 + b\,,$$

οπότε $b = 32$ και $m = (212 - 32)/100 = 9/5$. Συνεπώς,

$$F = \frac{9}{5}C + 32 \qquad \text{ή} \qquad C = \frac{5}{9}(F - 32)\,.$$

Με τις σχέσεις αυτές μπορούμε να βρίσκουμε ισοδύναμες θερμοκρασίες. Έτσι, οι 90°F ισοδυναμούν σε θερμοκρασία της κλίμακας Κελσίου ίση με

$$C = \frac{5}{9}(90 - 32) \approx 32{,}2\,.$$

Ομοίως, η ισοδύναμη θερμοκρασία (στην κλίμακα Fahrenheit) των −5°C είναι

$$F = \frac{9}{5}(-5) + 32 = 23°.$$

Παλινδρομική ανάλυση με υπολογιστή

Είναι μάλλον δύσκολο να διακρίνουμε τη σχέση που διαμορφώνεται μεταξύ δύο ποσοτήτων διαβάζοντας τις αντίστοιχες στήλες αριθμητικών δεδομένων. Γι' αυτό προτιμούμε συχνά να απεικονίζουμε σε διάγραμμα τα δεδομένα (κάνοντας το λεγόμενο **διάγραμμα διασποράς**), ώστε να δούμε αν τα αντίστοιχα σημεία εκδηλώνουν κάποια δυναμική ή διαμορφώνουν κάποια χαρακτηριστική συμπεριφορά. Αν ναι, κι αν επίσης μπορούμε να βρούμε την εξίσωση $y = f(x)$ μίας καμπύλης που προσεγγίζει τη συμπεριφορά του διαγράμματος, τότε έχουμε έναν τύπο ο οποίος

1. συνοψίζει τα δεδομένα μέσω μιας απλής μαθηματικής έκφρασης, και

2. μας επιτρέπει να προβλέπουμε τιμές του y για τιμές του x πέραν αυτών που ήδη διαθέτουμε.

Η διαδικασία εύρεσης ενός συγκεκριμένου τύπου καμπύλης που να ταιριάζει στα αριθμητικά δεδομένα ονομάζεται **παλινδρομική ανάλυση,** η

Πίνακας 1 Κόστος ταχυδρομικού τέλους

Έτος x	Κόστος y (σε \$)
1885	0,02
1917	0,03
1919	0,02
1932	0,03
1958	0,04
1963	0,05
1968	0,06
1971	0,08
1974	0,10
1975	0,13
1977	0,15
1981	0,18
1981	0,20
1985	0,22
1987	0,25
1991	0,29
1995	0,32
1998	0,33

δε καμπύλη καλείται **καμπύλη παλινδρομήσεως** (ή **παλινδρομική καμπύλη**).

Υπάρχουν πολλοί χρήσιμοι τύποι παλινδρομικών καμπυλών, π.χ. οι καμπύλες δύναμης, οι πολυωνυμικές, οι εκθετικές, οι λογαριθμικές, και οι ημιτονοειδείς καμπύλες. Στο Παράδειγμα 9, εφαρμόζουμε παλινδρομική ανάλυση σε υπολογιστή προκειμένου να προσαρμόσουμε μια γραμμική εξίσωση στα δεδομένα του Πίνακα 1. Η διαδικασία αυτή είναι προφανώς ισοδύναμη με το αν προσαρμόζαμε μια ευθεία στα σημεία του διαγράμματος διασποράς.

Παράδειγμα 7 Παλινδρομική ανάλυση με υπολογιστή

Βάσει των δεδομένων του Πίνακα 1, κατασκευάστε ένα μαθηματικό μοντέλο που να περιγράφει την αξία του συγκεκριμένου ταχυδρομικού τέλους συναρτήσει του χρόνου. Αφού βεβαιωθείτε για το εύλογον του μοντέλου σας, χρησιμοποιήστε το για να προβλέψετε το κόστος του ταχυδρομικού τέλους κατά το έτος 2010.

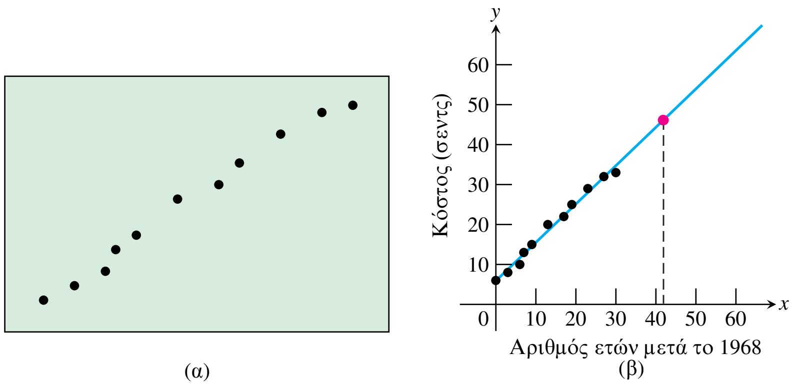
Λύση

Ερμηνεία των δεδομένων

Υπάρχει πολύ μικρή μεταβολή στην τιμή του ταχυδρομικού τέλους πριν από το 1968. Επειδή μας ενδιαφέρει κυρίως η τάση που διαμορφώνουν τα πιο πρόσφατα δεδομένα, παίρνουμε ως αφετηρία το έτος αυτό. Το 1981 σημειώθηκαν δύο αυξήσεις, των τριών και των δύο σεντς αντίστοιχα. Για να καταστήσουμε λοιπόν το 1981 συγκρίσιμο με τα άλλα έτη, συνενώνουμε τις δύο αυξήσεις σε μία, των πέντε σεντς, καθώς φαίνεται στον Πίνακα 2. Το Σχήμα 7α δείχνει το διάγραμμα διασποράς που αντιστοιχεί στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2 Κόστος ταχυδρομικού τέλους από το 1968 και εφεξής

x	0	3	6	7	9	13	17	19	23	27	30
y	6	8	10	13	15	20	22	25	29	32	33



Σχημα 7 (α) Διάγραμμα διασποράς των δεδομένων (x, y) του Πίνακα 2. (β) Εκτίμηση του κόστους του συγκεκριμένου ταχυδρομικού τέλους το έτος 2010, βάσει της παλινδρομικής ευθείας.

Μαθηματικό μοντέλο

Εφόσον στο διάγραμμα διαφαίνεται μια γραμμική εξάρτηση της αξίας του ταχυδρομικού τέλους με τον χρόνο, αναζητούμε ένα γραμμικό μοντέλο. Εισάγοντας τα δεδομένα σε υπολογιστή γραφικών και εφ-

*Σ.τ.Μ.: Οι όροι «γραφική παράσταση» και «γράφημα» δεν είναι ταυτόσημοι, παρόλο που στη βιβλιογραφία χρησιμοποιούνται συχνά ως τέτοιοι. Γράφημα είναι το σύνολο των *διατεταγμένων ζευγών* $(x, f(x))$, ενώ γραφική παράσταση το σύνολο των *σημείων στον χώρο* με συντεταγμένες $(x, f(x))$. Η διακριτότητα των δύο όρων γίνεται εμφανής όταν το πεδίο ορισμού ή τιμών της f δεν περιέχει αριθμούς ή περιέχει άρρητους, οπότε η γραφική παράσταση δεν μπορεί (αυστηρά μιλώντας) να παραχθεί. Ωστόσο, στη συντριπτική πλειοψηφία των εφαρμογών που ενδιαφέρουν τους φυσικούς και τους μηχανικούς, τα πεδία ορισμού και τιμών είναι αριθμοσύνολα, και εξάλλου μας αρκεί να μπορεί να παραχθεί μια προσεγγιστική, έστω, γραφική παράσταση. Για τον λόγο αυτόν, θα θεωρούμε εφεξής τους δύο όρους συνώνυμους, και θα τους χρησιμοποιούμε εκ περιτροπής, για να αποφεύγονται έτσι και οι κουραστικές και κακόηχες επαναλήψεις. Δείτε και τη σελ. 13.

αρμόζοντας τη γραμμική παλινδρόμηση, προκύπτει η εξίσωση της παλινδρομικής ευθείας,

$$y = 0{,}96185x + 5{,}8978\,. \tag{1}$$

Το Σχήμα 7β δείχνει τη γραφική παράσταση της ευθείας μαζί με το διάγραμμα διασποράς. Τα δύο γραφήματα* σχεδόν συμπίπτουν, και έτσι το μοντέλο κρίνεται ικανοποιητικό.

Γραφική επίλυση

Ο σκοπός μας είναι να προβλέψουμε την τιμή του ταχυδρομικού τέλους το έτος 2010. Όπως φαίνεται από το Σχήμα 7β, το 2010 (οπότε $x = 42$), η τιμή του y είναι περίπου 46.

Ερμηνεία

Κατά το έτος 2010, το συγκεκριμένο ταχυδρομικό τέλος θα κοστίζει περίπου 46 σεντς.

Αλγεβρική επαλήθευση

Από την Εξίσωση (1) για $x = 42$ παίρνουμε

$$y = 0{,}96185(42) + 5{,}8978 \approx 46{,}3\,.$$

Παλινδρομική ανάλυση

Η παλινδρομική ανάλυση περιλαμβάνει τέσσερα βήματα:

Βήμα 1. Τοποθετούμε σε διάγραμμα τα σημεία που αντιστοιχούν στα αριθμητικά δεδομένα (διάγραμμα διασποράς).

Βήμα 2. Βρίσκουμε μια εξίσωση παλινδρομήσεως. Προκειμένου για ευθείες, η εξίσωση αυτή θα έχει τη μορφή $y = mx + b$.

Βήμα 3. Τοποθετούμε σε ενιαίο σχήμα τη γραφική παράσταση της εξίσωσης παλινδρομήσεως και το διάγραμμα διασποράς, ώστε να ελέγξουμε κατά πόσο τα δύο γραφήματα ταιριάζουν.

Βήμα 4. Αν τα δύο γραφήματα «εφαρμόζουν» ικανοποιητικά, χρησιμοποιούμε την εξίσωση παλινδρομήσεως για να προβλέψουμε τιμές των y για x πέραν αυτών του πίνακα που διαθέτουμε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1

Στις Ασκήσεις 1 και 2, βρείτε τις μεταβολές των συντεταγμένων από το σημείο A στο B.

1. **(α)** $A(1, 2)$, $B(-1, -1)$ **(β)** $A(-3, 2)$, $B(-1, -2)$

2. **(α)** $A(-3, 1)$, $B(-8, 1)$ **(β)** $A(0, 4)$, $B(0, -2)$

Στις Ασκήσεις 3 και 4, L είναι η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία A και B.

(i) Σχεδιάστε τα A και B. **(ii)** Βρείτε την κλίση της L.
(iii) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της L.

3. **(α)** $A(1, -2)$, $B(2, 1)$ **(β)** $A(-2, -1)$, $B(1, -2)$

4. **(α)** $A(2, 3)$, $B(-1, 3)$ **(β)** $A(1, 2)$, $B(1, -3)$

Στις Ασκήσεις 5 και 6, γράψτε μια εξίσωση για **(i)** την κατακόρυφη και **(ii)** την οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το σημείο P.

5. **(α)** $P(2, 3)$ **(β)** $P(-1, 4/3)$

6. **(α)** $P(0, -\sqrt{2})$ **(β)** $P(-\pi, 0)$

Στις Ασκήσεις 7 και 8, γράψτε την εξίσωση σημείου-κλίσεως για την ευθεία που διέρχεται από το σημείο P με κλίση m.

7. **(α)** $P(1, 1)$, $m = 1$ **(β)** $P(-1, 1)$, $m = -1$

8. **(α)** $P(0, 3)$, $m = 2$ **(β)** $P(-4, 0)$, $m = -2$

Στις Ασκήσεις 9 και 10, γράψτε μια γενική γραμμική εξίσωση για την ευθεία που διέρχεται από τα δύο σημεία.

9. **(α)** $(0, 0)$, $(2, 3)$ **(β)** $(1, 1)$, $(2, 1)$

10. **(α)** $(-2, 0)$, $(-2, -2)$ **(β)** $(-2, 1)$, $(2, -2)$

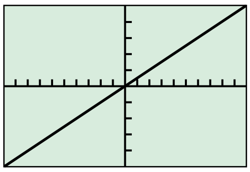
Στις Ασκήσεις 11 και 12, γράψτε την εξίσωση κλίσης-τεταγμένης για την ευθεία με κλίση m και τεταγμένη b.

11. **(α)** $m = 3, \quad b = -2$ **(β)** $m = -1, \quad b = 2$

12. **(α)** $m = -1/2, \quad b = -3$ **(β)** $m = 1/3, \quad b = -1$

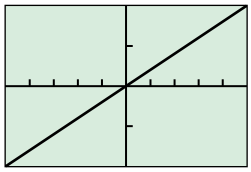
Στις Ασκήσεις 13 και 14, η ευθεία διέρχεται από την αρχή και από την άνω δεξιά κορυφή της περιοχής σχεδίασης. Γράψτε την εξίσωση της ευθείας. Στην Άσκηση 13, η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών γραμμώσεων στον άξονα x αντιστοιχεί σε 1 μονάδα, ενώ στον άξονα y αντιστοιχεί σε 5 μονάδες. Στην Άσκηση 14, η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών γραμμώσεων σε κάθε άξονα αντιστοιχεί σε 1 μονάδα.

13.



[−10, 10] επί [−25, 25]

14.



[−5, 5] επί [−2, 2]

Στις Ασκήσεις 15 και 16, βρείτε **(i)** την κλίση και **(ii)** την τεταγμένη και **(iii)** σχεδιάστε την ευθεία.

15. **(α)** $3x + 4y = 12$ **(β)** $x + y = 2$

16. **(α)** $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ **(β)** $y = 2x + 4$

Στις Ασκήσεις 17 και 18, γράψτε μια εξίσωση για την ευθεία που διέρχεται από το P και είναι **(i)** παράλληλη στην L και **(ii)** κάθετη στην L.

17. **(α)** $P(0, 0)$, $L: y = -x + 2$

(β) $P(-2, 2)$, $L: 2x + y = 4$

18. **(α)** $P(-2, 4)$, $L: x = 5$

(β) $P(-1, 1/2)$, $L: y = 3$

Στις Ασκήσεις 19 και 20, δίδεται ένας πίνακας τιμών για τη γραμμική συνάρτηση $f(x) = mx + b$. Προσδιορίστε τα m και b.

19.

x	$f(x)$
1	2
3	9
5	16

20.

x	$f(x)$
2	−1
4	−4
6	−7

Στις Ασκήσεις 21 και 22, βρείτε την τιμή του x ή του y για την οποία η ευθεία διαμέσου των A και B έχει τη δοθείσα κλίση m.

21. $A(-2, 3)$, $B(4, y)$, $m = -2/3$

22. $A(-8, -2)$, $B(x, 2)$, $m = 2$

23. *Επανερχόμενοι στο Παράδειγμα 5* Δείξτε ότι, αν χρησιμοποιήσουμε το σημείο (3, 4) στην εξίσωση σημείου-κλίσεως του Παραδείγματος 5, θα προκύψει η ίδια εξίσωση για την ευθεία.

24. *Μάθετε γράφοντας: τετμημένες και τεταγμένες μιας ευθείας*

(α) Εξηγήστε γιατί τα c και d είναι η τετμημένη και η τεταγμένη, αντίστοιχα, της ευθείας

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1.$$

(β) Πώς σχετίζονται η τετμημένη και η τεταγμένη με τους αριθμούς c και d, για την ευθεία

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 2;$$

25. *Παράλληλες και κάθετες ευθείες* Για ποια τιμή του k είναι οι ευθείες $2x + ky = 3$ και $x + y = 1$ **(α)** παράλληλες; **(β)** κάθετες;

Στις Ασκήσεις 26-28, *εργαστείτε σε ομάδες των δύο-τριών ατόμων.*

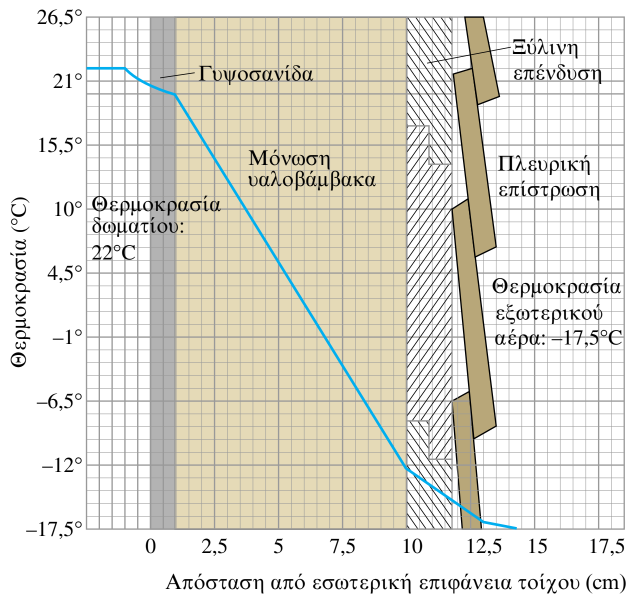
26. *Μόνωση* Μετρώντας κλίσεις στο σχήμα, βρείτε τη μεταβολή της θερμοκρασίας σε βαθμούς ανά cm για τα παρακάτω υλικά.

(α) γυψοσανίδα

(β) μόνωση υαλοβάμβακα

(γ) ξύλινη επένδυση

(δ) *Μάθετε γράφοντας* Ποιο από τα υλικά **(α)** έως **(γ)** είναι ο καλύτερος μονωτής; Ποιο ο χειρότερος; Εξηγήστε.



27. *Υποβρύχια πίεση* Η πίεση p που αισθάνεται ένας δύτης στη θάλασσα σχετίζεται με το βάθος κατάδυσης, d, μέσω μιας εξίσωσης της μορφής $p = kd + 1$ (k είναι μια σταθερά). Όταν $d = 0$ m, η πίεση είναι 1 ατμόσφαιρα. Η πίεση σε βάθος 100 m είναι 10,94 ατμόσφαιρες. Βρείτε την πίεση στα 50 m.

28. *Μοντέλο της διανυθείσας απόστασης* Ένα αυτοκίνητο Α ξεκινά από το σημείο P τη χρονική στιγμή $t = 0$ και κινείται με ταχύτητα 45 km/h.

(α) Γράψτε μια έκφραση για την απόσταση $d(t)$ από το σημείο P που διένυσε το αυτοκίνητο σε t ώρες.

(β) Σχεδιάστε την $y = d(t)$.

(γ) Ποια η κλίση της γραφικής παράστασης στο ερώτημα (β) και τι πληροφορία μας παρέχει αυτή;

(δ) *Μάθετε γράφοντας* Περιγράψτε υπό ποιες προϋποθέσεις θα μπορούσε ο χρόνος t να παίρνει αρνητικές τιμές.

(ε) *Μάθετε γράφοντας* Έστω ότι η τεταγμένη της ευθείας $y = d(t)$ ισούται με 30. Τι σημαίνει αυτό;

Προεκτείνοντας τις έννοιες

29. *Fahrenheit έναντι Κελσίου* Στο Παράδειγμα 8 βρήκαμε μια σχέση μεταξύ των κλιμάκων θερμοκρασίας Fahrenheit και Κελσίου.

(α) Υπάρχει κάποια θερμοκρασία στην οποία ένα θερμόμετρο Fahrenheit παρουσιάζει την ίδια ένδειξη με ένα θερμόμετρο Κελσίου; Αν ναι, ποια είναι αυτή η θερμοκρασία;

T **(β)** *Μάθετε γράφοντας* Σχεδιάστε σε κοινό διάγραμμα τις ευθείες $y_1 = (9/5)x + 32$, $y_2 = (5/9)(x - 32)$, και $y_3 = x$. Εξηγήστε τη σημασία του διαγράμματος αυτού για το ερώτημα (α).

30. *Παραλληλόγραμμο* Τρία διαφορετικά παραλληλόγραμμα έχουν κορυφές στα σημεία $(-1, 1)$, $(2, 0)$, και $(2, 3)$. Σχεδιάστε τα και δώστε τις συντεταγμένες των υπόλοιπων κορυφών.

31. *Παραλληλόγραμμο* Δείξτε ότι τα μέσα γειτονικών πλευρών τυχαίου τετραπλεύρου ορίζουν ένα παραλληλόγραμμο.

32. *Εφαπτόμενη ευθεία* Θεωρήστε κύκλο ακτίνας 5 και κέντρου $(0, 0)$. Βρείτε μια εξίσωση για την ευθεία που εφάπτεται του κύκλου στο σημείο $(3, 4)$.

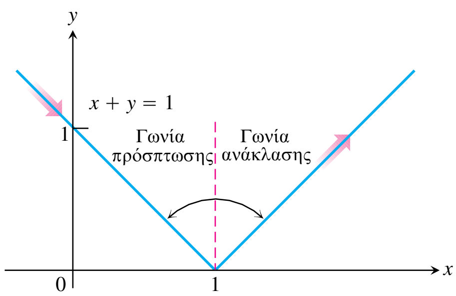
33. *Απόσταση σημείου από ευθεία* Εδώ θα δούμε πώς υπολογίζεται η απόσταση ενός σημείου $P(a, b)$ από μια ευθεία $L: Ax + By = C$. Προτείνουμε στους σπουδαστές *να εργαστούν σε ομάδες των δύο-τριών ατόμων.*

(α) Γράψτε μια εξίσωση για την ευθεία M που διέρχεται από το P και είναι κάθετη στην L.

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Q των M και L.

(γ) Βρείτε την απόσταση του P από το Q.

34. *Ανακλώμενο φως* Μια φωτεινή ακτίνα ταξιδεύει κατά μήκος της ευθείας $x + y = 1$ προερχόμενη από το δεύτερο τεταρτημόριο και ανακλάται από τον άξονα x, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η γωνία προσπτώσεως ισούται με τη γωνία ανακλάσεως (οι γωνίες μετρώνται από την κάθετο στον άξονα x). Γράψτε την εξίσωση της ευθείας κατά μήκος της οποίας κινείται η ανακλώμενη ακτίνα.



35. *Ο οδοντωτός σιδηρόδρομος του όρους Washington* Οι πολιτικοί μηχανικοί υπολογίζουν την κλίση του οδοστρώματος ως τον λόγο της κατακόρυφης απόστασης προς την οριζόντια απόσταση που διανύει όχημα κινούμενο επί του οδοστρώματος στο σημείο που τους ενδιαφέρει. Την κλίση αυτή του οδοστρώματος την εκφράζουν συνήθως ως ποσοστό επί τοις 100. Οι κλίσεις των σιδηροδρομικών τροχιών σε παράκτιες περιοχές είναι συνήθως μικρότερες του 2%. Στα ορεινά, μπορεί να φθάσουν μέχρι και 4%. Οι κλίσεις των αυτοκινητοδρόμων δεν υπερβαίνουν συνήθως το 5%.

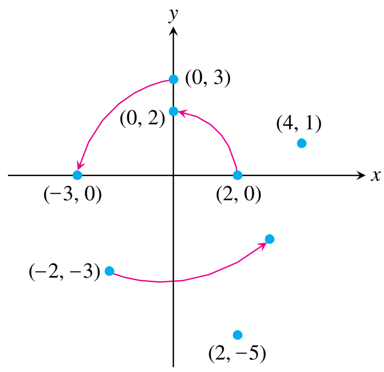
Στο πλέον απότομο σημείο της διαδρομής του οδοντωτού σιδηροδρόμου του όρους Washington στο New Hampshire, η κλίση παίρνει την ασυνήθιστη τιμή 37,1%. Τα μπροστινά καθίσματα του κάθε βαγονιού βρίσκονται τότε 4 m ψηλότερα απ' ό,τι τα πίσω καθίσματα. Πόσο περίπου απέχει η πρώτη από την τελευταία σειρά καθισμάτων στο βαγόνι;

36. Μια περιστροφή κατά 90° περί την αρχή μεταφέρει το σημείο $(2, 0)$ στο $(0, 2)$, και το $(0, 3)$ στο $(-3, 0)$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Πού μεταφέρεται καθένα από τα παρακάτω σημεία;

(α) $(4, 1)$ **(β)** $(-2, -3)$ **(γ)** $(2, -5)$

(δ) $(x, 0)$ **(ε)** $(0, y)$ **(στ)** (x, y)

(ζ) Ποιο σημείο μεταφέρεται στο $(10, 3)$;



Στις Ασκήσεις 37 και 38, εφαρμόστε γραμμική παλινδρομική ανάλυση.

T **37.** Στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται στατιστικά στοιχεία για το μέσο βάρος εννέα κοριτσιών συναρτήσει της ηλικίας τους.

Πίνακας 3 Ηλικία και βάρος μικρών κοριτσιών

Ηλικία (μήνες)	Βάρος (kg)
19	9,98
21	10,43
24	11,34
27	12,70
29	14,06
31	12,70
34	14,52
38	15,42
43	17,69

(α) Από τα δεδομένα αυτά βρείτε μια γραμμική εξίσωση παλινδρομήσεως.

(β) Βρείτε την κλίση της παλινδρομικής ευθείας. Τι αντιπροσωπεύει η κλίση αυτή;

(γ) Τοποθετήστε σε ενιαίο σχήμα τη γραφική παράσταση της γραμμικής παλινδρομικής εξίσωσης και το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

(δ) Χρησιμοποιήστε την εξίσωση παλινδρομήσεως για να προβλέψετε το κατά προσέγγιση βάρος ενός κοριτσιού ηλικίας 30 μηνών.

T **38.** Ο Πίνακας 4 δείχνει το μέσο ετήσιο εισόδημα των αμερικανών οικοδόμων.

Πίνακας 4 Μέσο ετήσιο εισόδημα οικοδόμων

Έτος	Ετήσιο εισόδημα (σε δολάρια)
1980	22.033
1985	27.581
1988	30.466
1989	31.465
1990	32.836

Πηγή: U.S. Bureau of Economic Analysis.

(α) Από τα δεδομένα αυτά βρείτε μια γραμμική εξίσωση παλινδρομήσεως.

(β) Βρείτε την κλίση της παλινδρομικής ευθείας. Τι αντιπροσωπεύει η κλίση αυτή;

(γ) Τοποθετήστε σε ενιαίο σχήμα τη γραφική παράσταση της γραμμικής παλινδρομικής εξίσωσης και το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

(δ) Χρησιμοποιήστε την εξίσωση παλινδρομήσεως για να προβλέψετε το μέσο ετήσιο εισόδημα των οικοδόμων κατά το έτος 2000.

T **39.** Η μέση τιμή μονοκατοικιών στις Η.Π.Α. αυξάνεται διαρκώς από το 1970. Στον Πίνακα 5, ωστόσο, παρατηρούμε ότι σημειώνονται διαφοροποιήσεις από περιοχή σε περιοχή.

(α) Βρείτε μια γραμμική εξίσωση παλινδρομήσεως για το κόστος μιας μονοκατοικίας στις βορειοανατολικές Πολιτείες.

(β) Τι αντιπροσωπεύει η κλίση της παλινδρομικής ευθείας;

(γ) Βρείτε μια γραμμική εξίσωση παλινδρομήσεως για το κόστος μιας μονοκατοικίας στις κεντροδυτικές Πολιτείες.

(δ) Πού αυξάνεται πιο γρήγορα η μέση αξία, στις βορειοανατολικές ή στις κεντροδυτικές Πολιτείες;

Πίνακας 5 Μέση τιμή μονοκατοικίας

Έτος	Βορειοανατολικά (σε δολάρια)	Κεντροδυτικά (σε δολάρια)
1970	25.200	20.100
1975	39.300	30.100
1980	60.800	51.900
1985	88.900	58.900
1990	141.200	74.000

Πηγή: National Association of Realtors®, *Home Sales Yearbook* (Washington DC, 1990).

2 Συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις

Συναρτήσεις • Πεδία ορισμού και τιμών • Επισκόπηση και ερμηνεία γραφικών παραστάσεων • Αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις • Άρτιες και περιττές συναρτήσεις: συμμετρία • Συναρτήσεις που ορίζονται κατά τμήματα • Η συνάρτηση απόλυτης τιμής • Πώς μετατοπίζουμε μια γραφική παράσταση • Σύνθετες συναρτήσεις

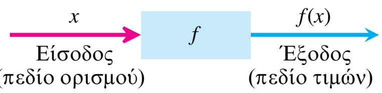
Οι συναρτήσεις αποτελούν τα κυριότερα εργαλεία περιγραφής του πραγματικού κόσμου με μαθηματική γλώσσα. Στην ενότητα αυτή πραγματευόμαστε τις βασικές έννοιες των συναρτήσεων και των γραφικών τους παραστάσεων. Θα δούμε με ποιους τρόπους μπορούμε να μετατοπίζουμε και να συνδυάζουμε διαφορετικές γραφικές παραστάσεις σε ένα διάγραμμα. Τέλος, θα παρουσιάσουμε μερικούς σημαντικούς τύπους συναρτήσεων του απειροστικού λογισμού.

Συναρτήσεις

Συχνά οι τιμές μιας μεταβλητής εξαρτώνται από τις τιμές μιας άλλης:

- Η θερμοκρασία στην οποία το νερό βράζει εξαρτάται από το υψόμετρο (το σημείο βρασμού «ταπεινώνεται» καθώς ανεβαίνουμε ψηλότερα).
- Το ποσό κατά το οποίο θα αυξηθούν οι καταθέσεις σας σε ένα έτος (ο τόκος) εξαρτάται από το επιτόκιο της τράπεζάς σας.

Σε καθεμία από τις περιπτώσεις αυτές, η τιμή μιας μεταβλητής ποσό-



Σχημα 8 Ένα «μηχανιστικό» διάγραμμα για τη συνάρτηση.

τητας εξαρτάται από την τιμή μιας άλλης. Το σημείο βρασμού του νερού, b, εξαρτάται από το υψόμετρο, e· ο τόκος, I, εξαρτάται από το επιτόκιο, r. Ονομάζουμε τις μεταβλητές b και I **εξαρτημένες μεταβλητές**, αφού καθορίζονται από τις τιμές των μεταβλητών e και r, από τις οποίες εξαρτώνται. Τις μεταβλητές e και r τις καλούμε **ανεξάρτητες μεταβλητές.**

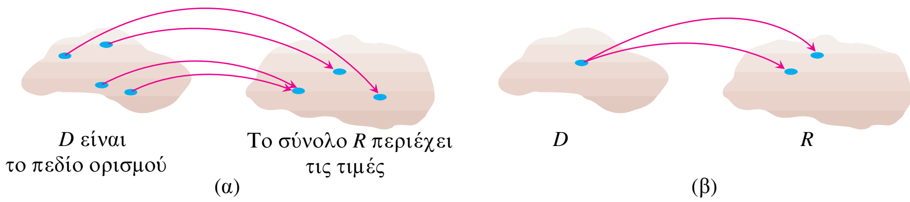
Ένας κανόνας που αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο ενός συνόλου ένα και μόνο στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου ονομάζεται *συνάρτηση*. Τα στοιχεία του ενός συνόλου δεν οφείλουν να είναι ομοειδή με τα στοιχεία του άλλου. Μια συνάρτηση είναι σαν μια μηχανή που αντιστοιχίζει μια μοναδική έξοδο σε κάθε επιτρεπτή είσοδο. Οι είσοδοι αποτελούν το **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης· οι έξοδοι αποτελούν το **πεδίο τιμών** της (Σχήμα 8).

Ορισμός **Συνάρτηση**

Συνάρτηση από ένα σύνολο D σε ένα σύνολο R είναι ένας κανόνας που αντιστοιχίζει ένα μοναδικό στοιχείο του R σε κάθε στοιχείο του D.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Leonhard Euler
(1707-1783)

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτόν, D είναι το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως και R είναι ένα σύνολο *που περιέχει* τις τιμές (Σχήμα 9).



Σχημα 9 (α) Μια συνάρτηση από το σύνολο D στο σύνολο R. (β) Μια *μη* συνάρτηση. Η αντιστοίχιση σε στοιχεία του R δεν είναι μοναδική.

Εδώ και δυόμισυ αιώνες, ο Ελβετός μαθηματικός Leonhard Euler συνέλαβε έναν συμβολικό τρόπο δήλωσης ότι «η y είναι μια συνάρτηση του x»:

$$y = f(x),$$

που θα πρέπει να διαβάζεται ως «y ίσον f του x». Ο συμβολισμός αυτός μας επιτρέπει να αναφερόμαστε σε διαφορετικές συναρτήσεις αλλάζοντας απλώς τα γράμματα με τα οποία τις αναπαριστούμε. Για να δηλώσουμε ότι το σημείο βρασμού b του νερού είναι συνάρτηση του υψομέτρου e, μπορούμε να γράψουμε $b = f(e)$. Για να δηλώσουμε ότι το εμβαδόν A ενός κύκλου είναι συνάρτηση της ακτίνας r, μπορούμε να γράψουμε $A = A(r)$, συμβολίζοντας τη συνάρτηση και την εξαρτημένη μεταβλητή με το ίδιο γράμμα.

Με τον συμβολισμό $y = f(x)$ μπορούμε επίσης να δηλώσουμε συγκεκριμένες τιμές μιας συνάρτησης. Έτσι, για την τιμή της f στο a μπορούμε να γράψουμε $f(a)$, το οποίο διαβάζεται ως «f του a».

Παράδειγμα 1 **Η συνάρτηση εμβαδού του κύκλου**

Η συνάρτηση του εμβαδού κύκλου $A(r) = \pi r^2$ έχει ως πεδίο ορισμού της το σύνολο όλων των δυνατών ακτίνων, δηλαδή το σύνολο όλων των θετικών πραγματικών αριθμών. Το πεδίο τιμών είναι επίσης το σύνολο όλων των θετικών πραγματικών αριθμών.

Η τιμή της συναρτήσεως A στο $r = 2$ είναι

$$A(2) = \pi(2)^2 = 4\pi.$$

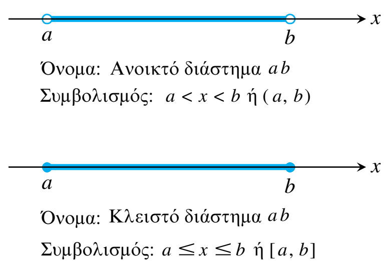
Το εμβαδόν ενός κύκλου ακτίνας 2 ισούται με 4π.

Πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών

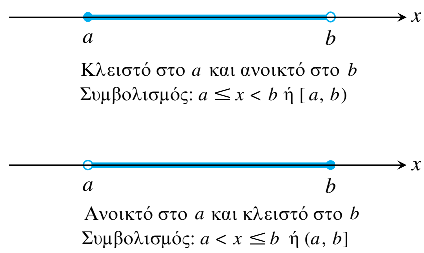
Στο Παράδειγμα 1, το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως υπόκειται σε κάποιον εύλογο περιορισμό: η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η ακτίνα του κύκλου η οποία πρέπει να είναι θετική. Όταν ορίζουμε μία συνάρτηση $y = f(x)$ μέσω κάποιου τύπου και το πεδίο ορισμού δεν αναφέρεται ρητά ή δεν περιορίζεται εκ των πραγμάτων, θα υποθέτουμε ότι αποτελείται από το μεγαλύτερο σύνολο τιμών του x για τις οποίες ο τύπος δίνει πραγματικές τιμές για το y· πρόκειται για το λεγόμενο **φυσικό πεδίο ορισμού.** Εάν επιθυμούμε να περιορίσουμε το πεδίο ορισμού με κάποιον τρόπο, θα πρέπει να το δηλώσουμε. Για παράδειγμα, το πεδίο τιμών της συνάρτησης $y = x^2$ είναι το πλήρες σύνολο των πραγματικών αριθμών. Προκειμένου να περιορίσουμε τη συνάρτηση στις θετικές τιμές του x, θα γράψουμε «$y = x^2, x > 0$».

Πολλές πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής έχουν για πεδία ορισμού και τιμών διαστήματα, ή συνδυασμούς διαστημάτων. Τα διαστήματα αυτά μπορεί να είναι ανοιχτά, κλειστά, ή ημιανοιχτά (δηλ. ανοιχτά από το ένα άκρο) (Σχήματα 10 και 11) καθώς και πεπερασμένα ή άπειρα (Σχήμα 12).

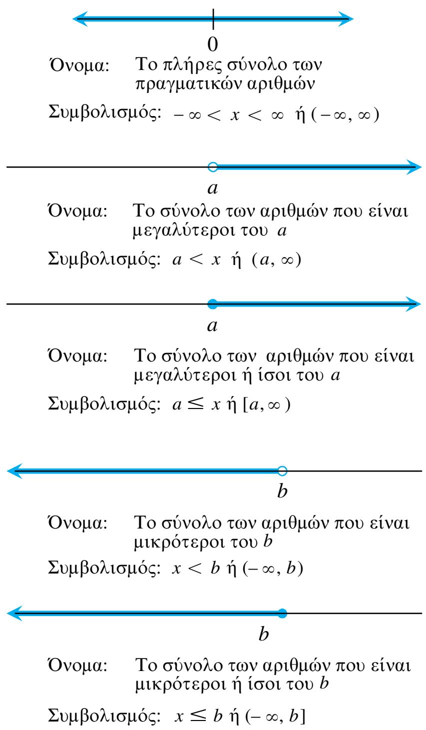
Τα ακραία σημεία ενός διαστήματος καλούνται **συνοριακά σημεία.** Αποτελούν τα **σύνορα** του διαστήματος. Τα υπόλοιπα σημεία είναι **εσωτερικά σημεία,** και απαρτίζουν το **εσωτερικό** του διαστήματος. Διαστήματα που περιέχουν όλα τα συνοριακά τους σημεία είναι **κλειστά.** Διαστήματα που δεν περιέχουν κανένα συνοριακό σημείο είναι **ανοιχτά.** Κάθε σημείο ενός ανοιχτού διαστήματος είναι σημείο εσωτερικό του διαστήματος.



ΣΧΗΜΑ 10 Ανοιχτά και κλειστά πεπερασμένα διαστήματα.



ΣΧΗΜΑ 11 Ημιανοιχτά πεπερασμένα διαστήματα.



ΣΧΗΜΑ 12 Άπειρα διαστήματα: παριστάνονται ως «ακτίνες» που εκτείνονται στο άπειρο πάνω στον άξονα των αριθμών. Ο ίδιος ο άξονας αποτελεί επίσης ένα άπειρο διάστημα. Το σύμβολο ∞ (άπειρο) χρησιμοποιείται μόνο για ευκολία· δεν σημαίνει ότι υπάρχει αριθμός ∞.

Παράδειγμα 2 Προσδιορισμός πεδίων ορισμού και τιμών

Επαληθεύσατε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

Συνάρτηση	**Π. ορισμού (x)**	**Π. τιμών (y)**
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = 1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

Λύση Ο τύπος $y = x^2$ δίνει πραγματικές τιμές y για κάθε πραγματικό αριθμό x, κι έτσι το πεδίο ορισμού είναι το $(-\infty, \infty)$.

Ο τύπος $y = 1/x$ δίνει πραγματικές τιμές y για κάθε πραγματικό x εκτός του $x = 0$. *Δεν μπορούμε να διαιρέσουμε κανέναν αριθμό με το* 0.

Ο τύπος $y = \sqrt{x}$ δίνει πραγματικές τιμές για το y μόνον όταν το x είναι θετικό ή μηδέν.

Ο τύπος $y = \sqrt{4 - x}$ δίνει πραγματικές τιμές για το y μόνον όταν το $4 - x$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός. Έτσι, $0 \leq 4 - x$, ή $x \leq 4$.

Ο τύπος $y = \sqrt{1 - x^2}$ δίνει πραγματικές τιμές για το y για κάθε τιμή του x στο κλειστό διάστημα από -1 ώς 1. Έξω από το διάστημα αυτό, το $1 - x^2$ είναι αρνητικό και η τετραγωνική του ρίζα δεν είναι πραγματικός αριθμός. Το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $[-1, 1]$.

Επισκόπηση και ερμηνεία γραφικών παραστάσεων

Τα σημεία (x, y) στο επίπεδο που έχουν ως συντεταγμένες τα ζεύγη τιμών εισόδου-εξόδου μιας συναρτήσεως $y = f(x)$ απαρτίζουν τη **γραφική παράσταση** (ή **γράφημα**) της συνάρτησης. Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y = x + 2$, για παράδειγμα, είναι το σύνολο των σημείων με συντεταγμένες (x, y) για τα οποία $y = x + 2$.

Όταν κατασκευάζετε γραφικές παραστάσεις με μολύβι και χαρτί, χρειάζεται να αναπτύξετε δεξιότητα στη *σχεδίαση*. Όταν πάλι παράγετε το γράφημα σε υπολογιστή, τότε χρειαζόσαστε δεξιότητα στην *επισκόπηση*.

Δεξιότητες θέασης γραφικών παραστάσεων

Βήμα 1. Ελέγχουμε αν η γραφική παράσταση είναι λογικοφανής.

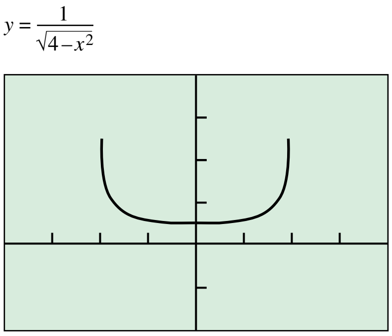
Βήμα 2. Εντοπίζουμε όλα τα κύρια χαρακτηριστικά της.

Βήμα 3. Ερμηνεύουμε τα χαρακτηριστικά αυτά.

Βήμα 4. Αποφαινόμαστε για το αν και σε ποιο σημείο αποτυγχάνει η σχεδίαση με υπολογιστή.

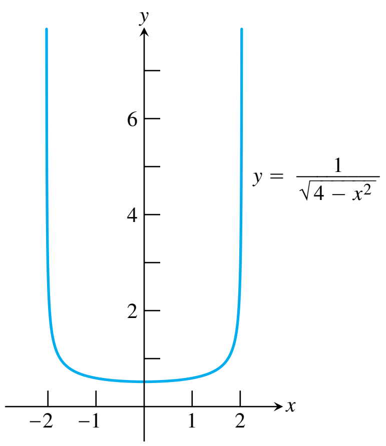
Καθώς θα αποκτάτε εμπειρία θα γίνεστε ικανότεροι στο να διακρίνετε πότε μια γραφική παράσταση είναι καλώς σχεδιασμένη. Θα πρέπει να γνωρίζετε τις βασικές συναρτήσεις, τις γραφικές τους παραστάσεις, και το πώς οι τελευταίες επηρεάζονται αν αλλάξουν οι εξισώσεις των συναρτήσεων.

Η σχεδίαση με υπολογιστή *αποτυγχάνει* όταν η προκύπτουσα γραφική συνάρτηση δεν είναι ακριβής ή είναι λανθασμένη. Συνήθως κάτι τέτοιο οφείλεται σε περιορισμούς στην ανάλυση εικόνας της οθόνης του υπολογιστικού μας συστήματος.



[–4, 4] επί [–2, 4]

(α)



(β)

Σχημα 13 (α) Αποτυχημένη σχεδίαση με υπολογιστή. (β) Μια ακριβέστερη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 1/\sqrt{4 - x^2}$. (Παράδειγμα 3)

Παράδειγμα 3 Πότε αποτυγχάνει η σχεδίαση με υπολογιστή

Βρείτε τα πεδία ορισμού και τιμών της συνάρτησης $y = f(x) = 1/\sqrt{4 - x^2}$.

Λύση Η γραφική παράσταση της f στο Σχήμα 13α δείχνει ως πεδίο ορισμού της f το διάστημα μεταξύ του -2 και του 2, ενώ το πεδίο τιμών μοιάζει να είναι κάποιο πεπερασμένο διάστημα. Το δεύτερο συμπέρασμα είναι αποτέλεσμα κακής σχεδίασης με υπολογιστή, γεγονός που επαληθεύουμε αλγεβρικά.

Αλγεβρική επίλυση

Η ποσότητα $4 - x^2$ πρέπει να είναι μεγαλύτερη του μηδενός.

$$4 - x^2 > 0$$
$$x^2 < 4$$

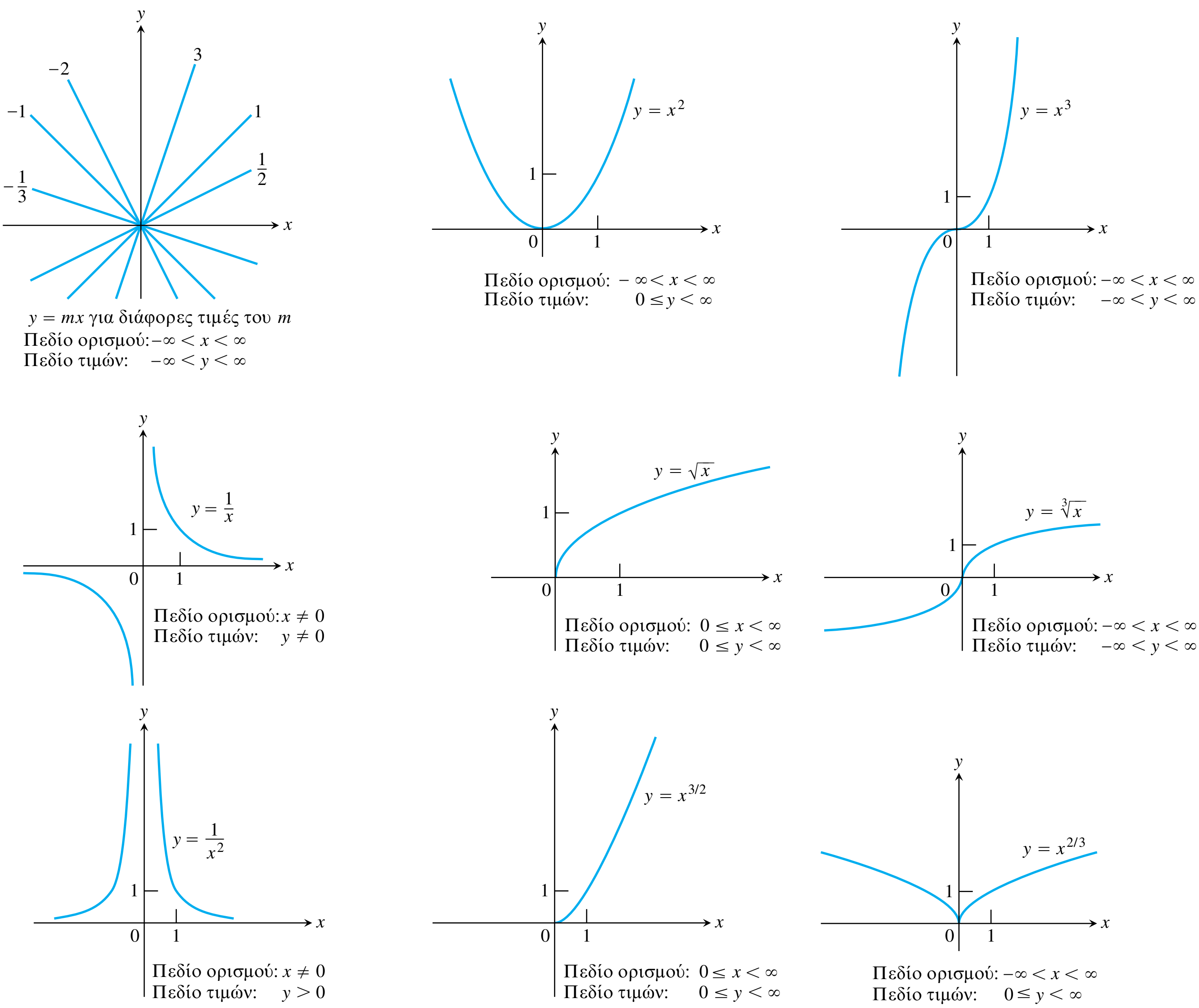
Έτσι, θα ισχύει $-2 < x < 2$, και το πεδίο ορισμού είναι το $(-2, 2)$.

Η ελάχιστη τιμή της f είναι $1/2$ και προκύπτει όταν $x = 0$. Οι τιμές της f αυξάνονται κατακόρυφα καθώς το x προσεγγίζει την τιμή 2 από αριστερά, ή την τιμή -2 από δεξιά, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα (όπου τα νούμερα έχουν στρογγυλοποιηθεί σε τρία δεκαδικά ψηφία).

x	$\pm 1{,}99$	$\pm 1{,}999$	$\pm 1{,}9999$	$\pm 1{,}99999$
$f(x)$	5,006	15,813	50,001	158,114

Το πεδίο τιμών της f είναι το διάστημα $[0{,}5\,,\ \infty)$.

Στο Σχήμα 14 βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις μερικών *συναρτήσεων δυνάμεων του x* που απαντούν συχνά στη μελέτη του απειροστικού λογισμού. Η επίγνωση του γενικού σχήματος των γραφημάτων αυτών θα σας βοηθήσει να διακρίνετε πότε αποτυγχάνει η υπολογιστική σχεδίαση. Στα παρακάτω θα δούμε τις γραφικές παραστάσεις και άλλων τύπων συναρτήσεων.



Σχημα 14 Γραφικές παραστάσεις μερικών χρήσιμων συναρτήσεων δυνάμεων του x.

Αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις

Αν η γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως *ανέρχεται* ή *ανυψώνεται* καθώς την παρατηρούμε από αριστερά προς τα δεξιά, τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι *αύξουσα.* Αν, πάλι, η γραφική παράσταση *κατέρχεται* ή *χαμηλώνει* από αριστερά προς τα δεξιά, τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι *φθίνουσα.* Στην Ενότητα 3.3 θα δώσουμε αυστηρούς ορισμούς της αύξουσας και της φθίνουσας συναρτήσεως. Εκεί θα μάθουμε πώς να βρίσκουμε τα διαστήματα στα οποία μια συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Εδώ παραθέτουμε μερικά παραδείγματα από το Σχήμα 14.

Συνάρτηση	Αύξουσα στο	Φθίνουσα στο
$y = x^2$	$0 \le x < \infty$	$-\infty < x \le 0$
$y = x^3$	$-\infty < x < \infty$	Πουθενά
$y = 1/x$	Πουθενά	$-\infty < x < 0$, $0 < x < \infty$
$y = 1/x^2$	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
$y = \sqrt{x}$	$0 \le x < \infty$	Πουθενά
$y = x^{2/3}$	$0 \le x < \infty$	$-\infty < x \le 0$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις: συμμετρία

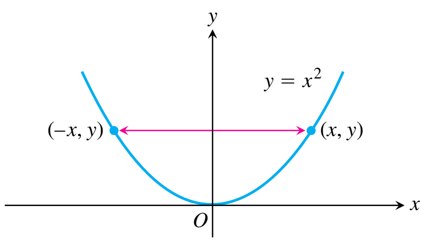
Οι γραφικές παραστάσεις *άρτιων* και *περιττών* συναρτήσεων παρουσιάζουν χαρακτηριστικές συμμετρίες.

Ορισμός Άρτια συνάρτηση, περιττή συνάρτηση

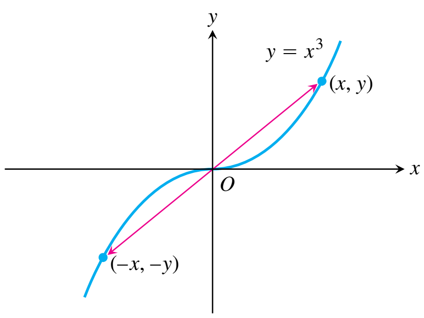
Μια συνάρτηση $y = f(x)$ είναι

άρτια συνάρτηση του *x* αν $f(-x) = f(x)$,
περιττή συνάρτηση του *x* αν $f(-x) = -f(x)$,

για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως.



(α)



(β)

Σχημα 15 (α) Η γραφική παράσταση της $y = x^2$ (άρτια συνάρτηση) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y. (β) Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y = x^3$ (περιττή) είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

Οι όροι «άρτια» και «περιττή» προέρχονται από δυνάμεις του x. Αν το y είναι μια άρτια δύναμη του x, π.χ. αν $y = x^2$ ή $y = x^4$, τότε θα είναι και άρτια συνάρτηση του x (αφού $(-x)^2 = x^2$ και $(-x)^4 = x^4$). Αν το y είναι μια περιττή δύναμη του x, π.χ. αν $y = x$ ή $y = x^3$, τότε είναι και περιττή συνάρτηση του x (αφού $(-x)^1 = -x$ και $(-x)^3 = -x^3$).

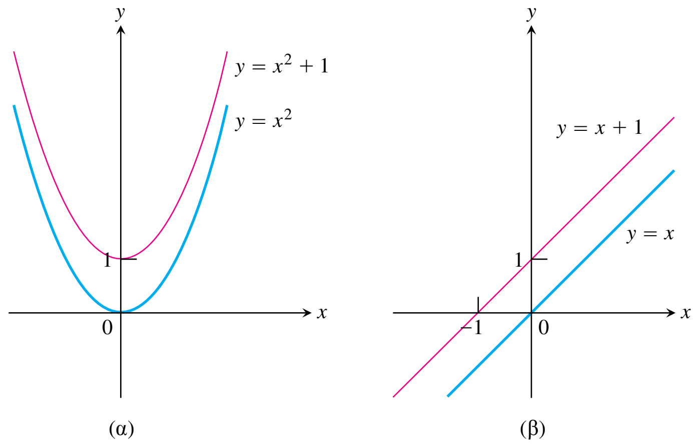
Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συναρτήσεως είναι **συμμετρική ως προς τον άξονα *y*.** Εφόσον $f(-x) = f(x)$, ένα σημείο (x, y) θα ανήκει στη γραφική παράσταση αν και μόνο αν και το σημείο $(-x, y)$ ανήκει σε αυτήν (Σχήμα 15α).

Η γραφική παράσταση μιας περιττής συναρτήσεως είναι **συμμετρική ως προς την αρχή.** Εφόσον $f(-x) = -f(x)$, ένα σημείο (x, y) ανήκει στη γραφική παράσταση αν και μόνο αν και το σημείο $(-x, -y)$ ανήκει σε αυτήν (Σχήμα 15β). Ισοδύναμα, μια γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή εάν περιστρεφόμενη περί την αρχή κατά 180° συμπίπτει με τον εαυτό της.

Παράδειγμα 4 Αναγνώριση άρτιων και περιττών συναρτήσεων

$f(x) = x^2$	Άρτια συνάρτηση: $(-x)^2 = x^2$ για κάθε x· συμμετρία ως προς τον άξονα y.
$f(x) = x^2 + 1$	Άρτια συνάρτηση: $(-x)^2 + 1 = x^2 + 1$ για κάθε x· συμμετρία ως προς τον άξονα y (Σχήμα 16α).
$f(x) = x$	Περιττή συνάρτηση: $(-x) = -x$ για κάθε x· συμμετρία ως προς την αρχή.

$f(x) = x + 1$ Μη περιττή: $f(-x) = -x + 1$, αλλά $-f(x) = -x - 1$. Η ισότητα δεν ισχύει πλέον. Μη άρτια: $(-x) + 1 \neq x + 1$ για κάθε $x \neq 0$ (Σχήμα 16β).



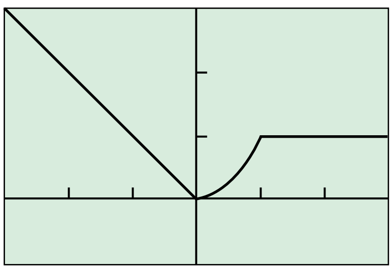
Σχημα 16 (α) Προσθέτοντας τον σταθερό όρο 1 στη συνάρτηση $y = x^2$, η καινούρια συνάρτηση $y = x^2 + 1$ παραμένει άρτια, με γραφική παράσταση συμμετρική ως προς τον άξονα y. (β) Προσθέτοντας τον σταθερό όρο 1 στη συνάρτηση $y = x$, η προκύπτουσα συνάρτηση $y = x + 1$ δεν είναι πλέον περιττή. Η συμμετρία ως προς την αρχή έχει απωλεσθεί. (Παράδειγμα 4)

Είναι χρήσιμο να μπορούμε να αναγνωρίζουμε άρτιες και περιττές συναρτήσεις. Έτσι, αν γνωρίζουμε τη γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης στη μία πλευρά του άξονα y, αυτομάτως τη γνωρίζουμε και στην άλλη πλευρά του άξονα.

Συναρτήσεις που ορίζονται κατά τμήματα (ή τμηματικά οριζόμενες συναρτήσεις)

Μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις εφαρμόζοντας διαφορετικούς τύπους σε διαφορετικά τμήματα του πεδίου ορισμού.

$$y = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



[–3, 3] επί [–1, 3]

Σχημα 17 Η γραφική παράσταση μιας τμηματικά οριζόμενης συναρτήσεως. (Παράδειγμα 5)

Παράδειγμα 5 Σχεδιάζοντας συναρτήσεις που ορίζονται κατά τμήματα

Σχεδιάστε την

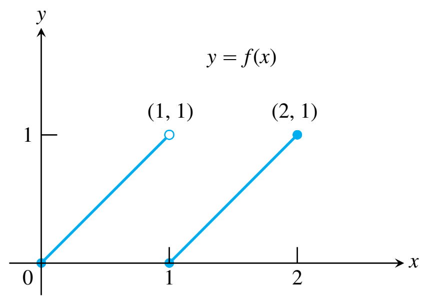
$$y = f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Λύση Οι τιμές της f δίδονται από τρεις διαφορετικούς τύπους: $y = -x$ όταν $x < 0$, $y = x^2$ όταν $0 \le x \le 1$, και $y = 1$ όταν $x > 1$. Πρόκειται, ωστόσο, *για μία και μόνη συνάρτηση* με πεδίο ορισμού το πλήρες σύνολο των πραγματικών αριθμών (Σχήμα 17).

Παράδειγμα 6 Πώς γράφεται μια συνάρτηση που ορίζεται κατά τμήματα

Γράψτε τον τύπο της συνάρτησης $y = f(x)$ που αποτελείται από τα δύο ευθύγραμμα τμήματα του Σχήματος 18.

Λύση Η μέθοδος που ακολουθούμε είναι να βρούμε χωριστούς τύπους για τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από τα σημεία (0, 0), (1, 1) και (1, 0), (2, 1), και να τους συνδυάσουμε όπως στο Παράδειγμα 5.



Σχημα 18 Το αριστερό ευθύγραμμο τμήμα περιέχει το σημείο (0, 0) αλλά όχι το (1, 1). Το δεξιό ευθύγραμμο τμήμα περιέχει και τα δύο ακραία του σημεία. (Παράδειγμα 6)

Το ευθύγραμμο τμήμα από το (0, 0) έως το (1, 1) Η ευθεία που διέρχεται από τα (0, 0) και (1, 1) έχει κλίση $m = (1-0)/(1-0) = 1$ και τεταγμένη $b = 0$. Η ευθεία αυτή περιγράφεται από την εξίσωση κλίσεως-τεταγμένης, $y = x$. Το ευθύγραμμο τμήμα από το (0, 0) έως το (1, 1) που περιέχει το σημείο (0, 0) αλλά όχι το (1, 1), είναι το γράφημα της συναρτήσεως $y = x$, όπου το x περιορίζεται στο ημιανοιχτό διάστημα $0 \le x < 1$. Δηλαδή,

$$y = x, \qquad 0 \le x < 1.$$

Το ευθύγραμμο τμήμα από το (1, 0) έως το (2, 1) Η ευθεία που διέρχεται από τα (1, 0) και (2, 1) έχει κλίση $m = (1-0)/(2-1) = 1$ και διέρχεται από το (1, 0). Η αντίστοιχη εξίσωση σημείου-κλίσεως θα είναι

$$y = 1(x-1) + 0, \qquad \text{ή} \qquad y = x - 1.$$

Το ευθύγραμμο τμήμα από το (1, 0) έως το (2, 1) που περιέχει αμφότερα τα ακραία σημεία είναι το γράφημα της συνάρτησης $y = x - 1$, όπου το x περιορίζεται στο κλειστό διάστημα $1 \le x \le 2$. Δηλαδή,

$$y = x - 1, \qquad 1 \le x \le 2.$$

Τμηματικός τύπος Συνδυάζοντας τους τύπους για τα δυο τμήματα του γραφήματος, λαμβάνουμε

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ x - 1, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Θυμηθείτε ότι $\sqrt{a^2} = |a|$. Μην γράφετε λοιπόν $\sqrt{a^2} = a$ παρά μόνο αν γνωρίζετε ήδη ότι $a \ge 0$.

Η συνάρτηση απόλυτης τιμής

Η συνάρτηση απόλυτης τιμής $y = |x|$ ορίζεται κατά τμήματα μέσω του τύπου

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \ge 0. \end{cases}$$

Η συνάρτηση είναι άρτια, και η γραφική της παράσταση (Σχήμα 19) συμμετρική ως προς τον άξονα y. Δεδομένου ότι το σύμβολο $\sqrt{a}$ δηλώνει τη *μη αρνητική* τετραγωνική ρίζα του a, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον εναλλακτικό ορισμό

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

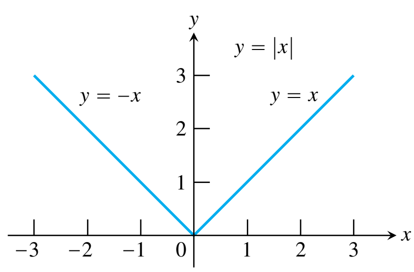
Ιδιότητες απόλυτων τιμών

1. $|-a| = |a|$

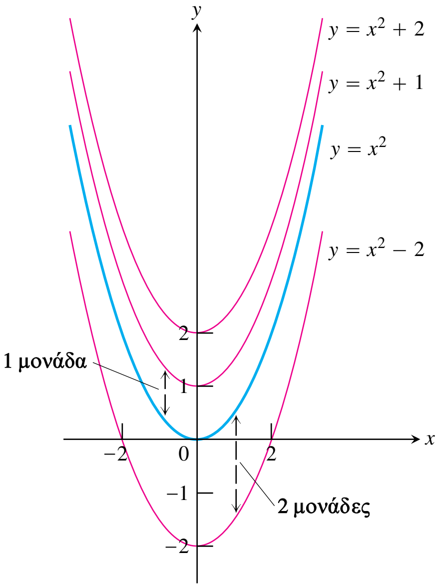
2. $|ab| = |a||b|$

3. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

4. $|a + b| \le |a| + |b|$



Σχημα 19 Η συνάρτηση απόλυτης τιμής έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, \infty)$ και πεδίο τιμών το $[0, \infty)$.



Σχημα 20 Για να μετατοπίσουμε το γράφημα της $f(x) = x^2$ προς τα πάνω (ή προς τα κάτω), προσθέτουμε θετικές (ή αρνητικές) σταθερές στον τύπο της f.

Πώς μετατοπίζουμε μια γραφική παράσταση

Προκειμένου να μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως $y = f(x)$ προς τα πάνω, προσθέτουμε μια θετική σταθερά στο δεξιό μέλος του τύπου $y = f(x)$.

Για μετατόπιση προς τα κάτω, προσθέτουμε μια αρνητική σταθερά στο δεξιό μέλος του τύπου $y = f(x)$.

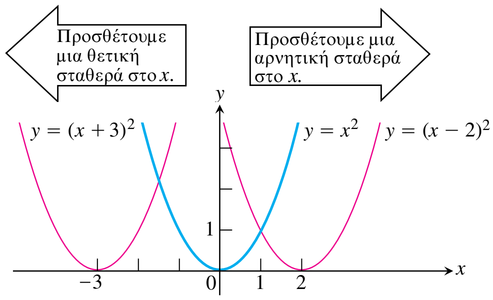
Παράδειγμα 7 Κατακόρυφη μετατόπιση γραφήματος

Προσθέτοντας τη μονάδα στο δεξιό μέλος του τύπου $y = x^2$ παίρνουμε $y = x^2 + 1$, οπότε το γράφημα μετατοπίζεται προς τα πάνω κατά μία μονάδα (Σχήμα 20). Προσθέτοντας το -2 στο δεξιό μέλος του τύπου $y = x^2$ παίρνουμε $y = x^2 - 2$, οπότε το γράφημα μετατοπίζεται προς τα κάτω κατά δύο μονάδες (Σχήμα 20).

Για να μετατοπίσουμε το γράφημα της $y = f(x)$ προς τα αριστερά, προσθέτουμε μια θετική σταθερά στο x. Για μετατόπιση προς τα δεξιά, προσθέτουμε μια αρνητική σταθερά στο x.

Παράδειγμα 8 Οριζόντια μετατόπιση γραφήματος

Προσθέτοντας το 3 στο x, όπου $y = x^2$, παίρνουμε $y = (x + 3)^2$, και το γράφημα μετατοπίζεται προς τα αριστερά κατά τρεις μονάδες (Σχήμα 21). Προσθέτοντας το -2 στο x, όπου $y = x^2$, παίρνουμε $y = (x - 2)^2$, και το γράφημα μετατοπίζεται προς τα δεξιά κατά δύο μονάδες (Σχήμα 21).



Σχημα 21 Για να μετατοπίσουμε το γράφημα της $y = x^2$ προς τα αριστερά, προσθέτουμε μια θετική σταθερά στο x. Για μετατόπιση προς τα δεξιά, προσθέτουμε μια αρνητική σταθερά στο x.

Τύποι μετατόπισης

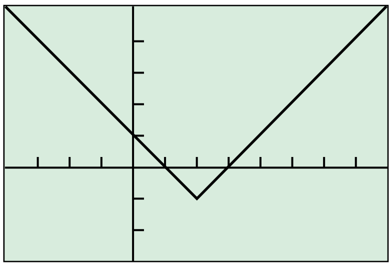
Κατακορυφες μετατοπισεις

$y = f(x) + k$	Μετατοπίζει το γράφημα k μονάδες *πάνω* αν $k > 0$
	Μετατοπίζει το γράφημα $\lvert k \rvert$ μονάδες *κάτω* αν $k < 0$

Οριζοντιες μετατοπισεις

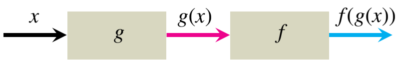
$y = f(x + h)$	Μετατοπίζει το γράφημα h μονάδες *αριστερά* αν $h > 0$
	Μετατοπίζει το γράφημα $\lvert h \rvert$ μονάδες *δεξιά* αν $h < 0$

$y = |x - 2| - 1$



$[-4, 8]$ επί $[-3, 5]$

Σχημα 22 Το κατώτερο σημείο του γραφήματος της $f(x) = |x - 2| - 1$ είναι το $(2, -1)$. (Παράδειγμα 9)



Σχημα 23 Δυο συναρτήσεις μπορούν να συντεθούν στο x, εφόσον η τιμή της πρώτης συναρτήσεως στο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της δεύτερης. Η σύνθετη συνάρτηση συμβολίζεται ως $f \circ g$.

Παράδειγμα 9 Συνδυασμός μετατοπίσεων

Βρείτε τα πεδία ορισμού και τιμών, και σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x - 2| - 1$.

Λύση Το γράφημα της f είναι αυτό της συνάρτησης απόλυτης τιμής μετατοπισμένο κατά 2 μονάδες οριζόντια, και συγκεκριμένα προς τα δεξιά, και κατά 1 μονάδα κατακόρυφα προς τα κάτω (Σχήμα 22). Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(-\infty, \infty)$, ενώ το πεδίο τιμών της είναι το $[-1, \infty)$.

Σύνθετες συναρτήσεις

Ας υποθέσουμε ότι μερικές από τις εξόδους (τιμές) μιας συναρτήσεως g μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως είσοδοι μιας άλλης συναρτήσεως f. Μπορούμε τότε να συνδέσουμε τις g και f και να κατασκευάσουμε μια νέα συνάρτηση της οποίας οι είσοδοι x είναι οι είσοδοι της g, ενώ οι έξοδοί της είναι οι αριθμοί $f(g(x))$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 23. Λέμε τότε ότι η συνάρτηση $f(g(x))$ (διαβάζεται «f του g του x») είναι η **σύνθετη συνάρτηση των g και f.** Η συνάρτηση αυτή κατασκευάστηκε *συνθέτοντας* τις g και f με πρώτη κατά σειρά εφαρμογής την g και δεύτερη την f. Ο συνήθης συμβολισμός για τη σύνθετη αυτή συνάρτηση είναι $f \circ g$, και διαβάζεται «f του g». Η τιμή της $f \circ g$ στο x είναι $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Σημειώστε ότι ο συμβολισμός $f \circ g$ δηλώνει ότι πρώτα εφαρμόζουμε την g στη μεταβλητή εισόδου x, και κατόπιν την f.

Παράδειγμα 10 Θεωρώντας μια συνάρτηση σύνθετη

Η συνάρτηση $y = \sqrt{1 - x^2}$ στο Παράδειγμα 2 μπορεί να ειδωθεί ως μια αλληλουχία δύο βημάτων, όπου στο πρώτο υπολογίζεται το $1 - x^2$ και στο δεύτερο εξάγεται η τετραγωνική ρίζα του πρώτου αποτελέσματος. Η συνάρτηση y είναι η σύνθεση της $g(x) = 1 - x^2$ και της $f(x) = \sqrt{x}$. Σημειώστε ότι η ποσότητα $1 - x^2$ δεν μπορεί να είναι αρνητική. Το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης είναι λοιπόν το διάστημα $[-1, 1]$.

Παράδειγμα 11 Τύπος και τιμή σύνθετης συναρτήσεως

Βρείτε έναν τύπο για την $f(g(x))$ αν $g(x) = x^2$ και $f(x) = x - 7$. Κατόπιν υπολογίστε την τιμή $f(g(2))$.

Λύση Για να βρούμε την $f(g(x))$, αντικαθιστούμε το x στον τύπο $f(x) = x - 7$ με την έκφραση που δίδεται για την $g(x)$.

$$f(x) = x - 7$$
$$f(g(x)) = g(x) - 7 = x^2 - 7$$

Έπειτα υπολογίζουμε την τιμή $f(g(2))$ θέτοντας όπου x το 2.

$$f(g(2)) = (2)^2 - 7 = -3.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2

Εύρεση τύπων συναρτήσεων

1. Εκφράστε το εμβαδόν και την περίμετρο ισόπλευρου τριγώνου συναρτήσει του μήκους πλευράς x.

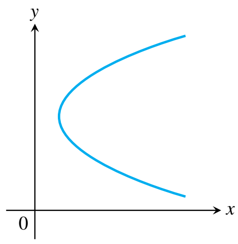
2. Εκφράστε το μήκος πλευράς τετραγώνου συναρτήσει του μήκους της διαγωνίου του d. Κατόπιν εκφράστε το εμβαδόν του τετραγώνου συναρτήσει του μήκους της διαγωνίου.

3. Εκφράστε το μήκος της ακμής κύβου συναρτήσει του μήκους της διαγωνίου του κύβου d. Κατόπιν εκφράστε το εμβαδόν και τον όγκο του κύβου συναρτήσει του μήκους της διαγωνίου.

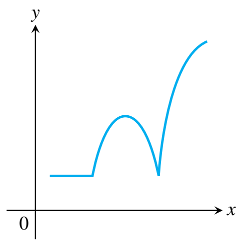
4. Ένα σημείο P στο πρώτο τεταρτημόριο ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$. Εκφράστε τις συντεταγμένες του P συναρτήσει της κλίσεως της ευθείας που συνδέει το P με την αρχή των αξόνων.

Ποια από τα διαγράμματα των Ασκήσεων 5 και 6 αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων του x, και ποια όχι; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

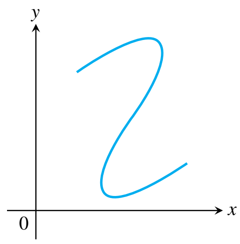
5. **(α)**



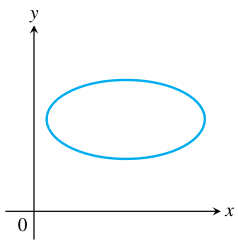
(β)



6. **(α)**



(β)



Πεδία ορισμού και τιμών

Στις Ασκήσεις 7-10, βρείτε τα πεδία ορισμού και τιμών για κάθε συνάρτηση.

7. **(α)** $f(x) = 1 + x^2$ **(β)** $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

8. **(α)** $F(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ **(β)** $F(t) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{t}}$

9. $g(z) = \sqrt{4 - z^2}$ **10.** $g(z) = \sqrt[3]{z - 3}$

Συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις

Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων των Ασκήσεων 11 και 12. Ποιες συμμετρίες (αν υπάρχουν) διαθέτουν τα γραφήματα;

11. **(α)** $y = -x^3$ **(β)** $y = -\dfrac{1}{x^2}$

12. **(α)** $y = \sqrt{|x|}$ **(β)** $y = -\dfrac{1}{x}$

13. Σχεδιάστε τις παρακάτω εξισώσεις και εξηγήστε γιατί δεν αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων του x.

(α) $|y| = x$ **(β)** $y^2 = x^2$

14. Σχεδιάστε τις παρακάτω εξισώσεις και εξηγήστε γιατί δεν αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων του x.

(α) $|x| + |y| = 1$ **(β)** $|x + y| = 1$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Στις Ασκήσεις 15-20, αποφανθείτε για το αν η κάθε συνάρτηση είναι άρτια, περιττή, ή τίποτα από τα δύο.

15. **(α)** $f(x) = 3$ **(β)** $f(x) = x^{-5}$

16. **(α)** $f(x) = x^2 + 1$ **(β)** $f(x) = x^2 + x$

17. **(α)** $g(x) = x^3 + x$ **(β)** $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

18. **(α)** $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **(β)** $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

19. **(α)** $h(t) = \dfrac{1}{t - 1}$ **(β)** $h(t) = |t^3|$

20. **(α)** $h(t) = \sqrt{t^2 + 3}$ **(β)** $h(t) = 2|t| + 1$

Συναρτήσεις που ορίζονται κατά τμήματα

Στις Ασκήσεις 21-24, **(α)** σχεδιάστε τη γραφική παράσταση κάθε συναρτήσεως. Κατόπιν βρείτε **(β)** το πεδίο ορισμού και **(γ)** το πεδίο τιμών της.

21. **(α)** $f(x) = -|3 - x| + 2$ **(β)** $f(x) = 2|x + 4| - 3$

22. **(α)** $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \le 1 \\ 2x, & 1 < x \end{cases}$ **(β)** $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \ge 0 \end{cases}$

23. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x < 1 \\ (3/2)x + 3/2, & 1 \le x \le 3 \\ x + 3, & x > 3 \end{cases}$

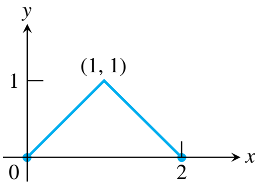
24. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^3, & 0 \le x \le 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$

25. *Μάθετε γράφοντας* Το *κριτήριο της κατακορύφου* μάς επιτρέπει να προσδιορίζουμε αν μία καμπύλη είναι η γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης, κι έχει ως εξής: Αν κάθε κατακόρυφη ευθεία που ανήκει στο επίπεδο xy τέμνει μια δεδομένη καμπύλη σε ένα το πολύ σημείο, τότε η καμπύλη αποτελεί τη γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης. Εξηγήστε γιατί αληθεύει η δήλωση αυτή.

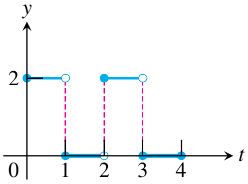
26. *Μάθετε γράφοντας* Ένα σημείο (x, y) θα ανήκει σε μια καμπύλη που είναι *συμμετρική ως προς τον άξονα x,* αν και μόνο αν και το $(x, -y)$ ανήκει σε αυτήν. Εξηγήστε γιατί μια συμμετρική ως προς τον άξονα x καμπύλη δεν μπορεί να είναι η γραφική παράσταση συναρτήσεως άλλης από την $y = 0$.

Στις Ασκήσεις 27 και 28, δώστε έναν τύπο που να ορίζει κατά τμήματα τη συνάρτηση.

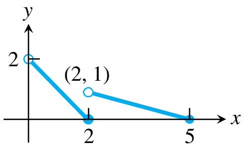
27. **(α)**



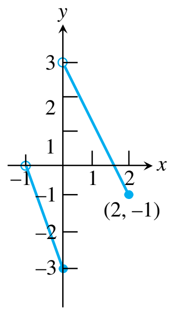
(β)



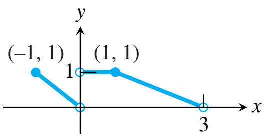
(γ)



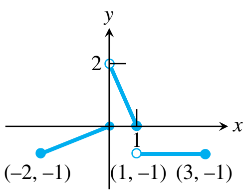
(δ)



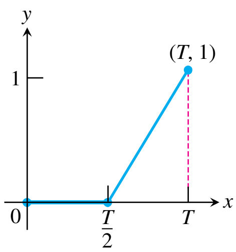
28. **(α)**



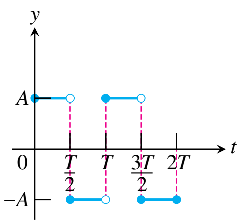
(β)



(γ)

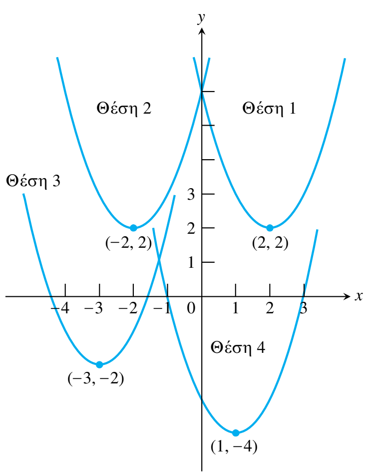


(δ)



Μετατόπιση γραφικών παραστάσεων

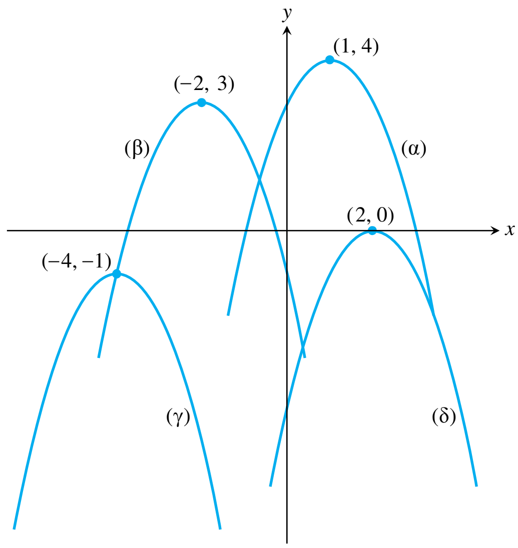
29. Αντιστοιχίστε τις εξισώσεις **(α)** έως **(δ)** στις θέσεις που σημειώνονται στο παρακάτω σχήμα.



(α) $y = (x-1)^2 - 4$ **(β)** $y = (x-2)^2 + 2$

(γ) $y = (x+2)^2 + 2$ **(δ)** $y = (x+3)^2 - 2$

30. Το σχήμα δείχνει τη γραφική παράσταση της $y = -x^2$, μετατοπισμένη σε τέσσερις νέες θέσεις. Γράψτε μια εξίσωση για καθεμία από τις τέσσερις γραφικές παραστάσεις.



Στις Ασκήσεις 31-36 δηλώνεται κατά πόσες μονάδες και προς ποιες κατευθύνσεις πρέπει να μετατοπιστούν οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων που δίδονται. Βρείτε μια εξίσωση για κάθε μετατοπισμένη γραφική παράσταση. Κατόπιν σχεδιάστε πρόχειρα στο ίδιο διάγραμμα τόσο το αρχικό όσο και τα μετατοπισμένα γραφήματα, ονομάζοντας το καθένα με την εξίσωση που του αντιστοιχεί.

31. $x^2 + y^2 = 49$ Κάτω 3, αριστερά 2

32. $y = x^3$ Αριστερά 1, κάτω 1

33. $y = x^{2/3}$ Δεξιά 1, κάτω 1

34. $y = -\sqrt{x}$ Δεξιά 3

35. $y = (1/2)(x+1) + 5$ Κάτω 5, δεξιά 1

36. $x = y^2$ Αριστερά 1

Σύνθετες συναρτήσεις

37. Αν $f(x) = x + 5$ και $g(x) = x^2 - 3$, βρείτε τις παρακάτω ποσότητες:

(α) $f(g(0))$ **(β)** $g(f(0))$

(γ) $f(g(x))$ **(δ)** $g(f(x))$

(ε) $f(f(-5))$ **(στ)** $g(g(2))$

(ζ) $f(f(x))$ **(η)** $g(g(x))$

38. Αν $f(x) = x - 1$ και $g(x) = 1/(x+1)$, βρείτε τις παρακάτω ποσότητες:

(α) $f(g(1/2))$ **(β)** $g(f(1/2))$

(γ) $f(g(x))$ **(δ)** $g(f(x))$

(ε) $f(f(2))$ **(στ)** $g(g(2))$

(ζ) $f(f(x))$ **(η)** $g(g(x))$

39. Αν $u(x) = 4x - 5$, $v(x) = x^2$, και $f(x) = 1/x$, βρείτε έναν τύπο για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις:

(α) $u(v(f(x)))$ **(β)** $u(f(v(x)))$

(γ) $v(u(f(x)))$ (δ) $v(f(u(x)))$

(ε) $f(u(v(x)))$ (στ) $f(v(u(x)))$

40. Αν $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x/4$, και $h(x) = 4x - 8$, βρείτε έναν τύπο για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις:

(α) $h(g(f(x)))$ (β) $h(f(g(x)))$

(γ) $g(h(f(x)))$ (δ) $g(f(h(x)))$

(ε) $f(g(h(x)))$ (στ) $f(h(g(x)))$

Έστω $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^3$, και $j(x) = 2x$. Στις Ασκήσεις 41 και 42, εκφράστε κάθε δοθείσα συνάρτηση ως σύνθεση μιας ή περισσοτέρων από τις f, g, h, και j.

41. (α) $y = \sqrt{x} - 3$ (β) $y = 2\sqrt{x}$

(γ) $y = x^{1/4}$ (δ) $y = 4x$

(ε) $y = \sqrt{(x-3)^3}$ (στ) $y = (2x - 6)^3$

42. (α) $y = 2x - 3$ (β) $y = x^{3/2}$

(γ) $y = x^9$ (δ) $y = x - 6$

(ε) $y = 2\sqrt{x - 3}$ (στ) $y = \sqrt{x^3 - 3}$

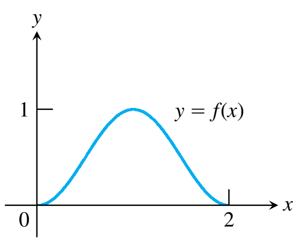
43. Αντιγράψτε και συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(α)	;	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(β)	;	$1 + 1/x$	x
(γ)	$1/x$	;	x
(δ)	$\sqrt{x}$	;	$\lvert x \rvert$

44. Αντιγράψτε και συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα:

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(α)	$x - 7$	$\sqrt{x}$	;
(β)	$x + 2$	$3x$	;
(γ)	;	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(δ)	$\dfrac{x}{x-1}$	$\dfrac{x}{x-1}$	;
(ε)	;	$1 + \dfrac{1}{x}$	x
(στ)	$\dfrac{1}{x}$	;	x

45. Το σχήμα δείχνει το γράφημα της συναρτήσεως $f(x)$ που έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 2]$ και πεδίο τιμών το $[0, 1]$. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τιμών των παρακάτω συναρτήσεων, και σχεδιάστε πρόχειρα τις γραφικές τους παραστάσεις.



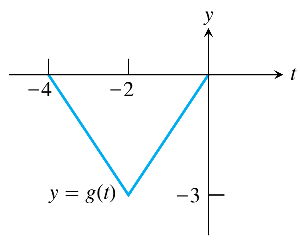
(α) $f(x) + 2$ (β) $f(x) - 1$

(γ) $2f(x)$ (δ) $-f(x)$

(ε) $f(x + 2)$ (στ) $f(x - 1)$

(ζ) $f(-x)$ (η) $-f(x + 1) + 1$

46. Το σχήμα δείχνει το γράφημα της συναρτήσεως $g(t)$ που έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4, 0]$ και πεδίο τιμών το $[-3, 0]$. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τιμών των παρακάτω συναρτήσεων, και σχεδιάστε τις γραφικές τους παραστάσεις.



(α) $g(-t)$ (β) $-g(t)$

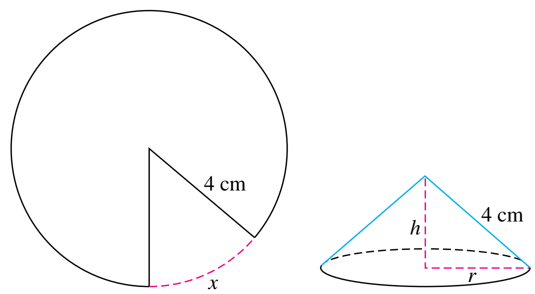
(γ) $g(t) + 3$ (δ) $1 - g(t)$

(ε) $g(-t + 2)$ (στ) $g(t - 2)$

(ζ) $g(1 - t)$ (η) $-g(t - 4)$

Θεωρία και παραδείγματα

T **47.** *Το πρόβλημα του κώνου* Πάρτε ένα κυκλικό κομμάτι χαρτί ακτίνας 4 cm, όπως φαίνεται στο σχήμα (α). Αποκόψτε έναν κυκλικό τομέα μήκους τόξου x. Στο κομμάτι χαρτιού που απέμεινε, ενώστε τις δύο ακμές σχηματίζοντας κώνο ακτίνας r και ύψους h, όπως φαίνεται στο σχήμα (β).



(α) (β)

(α) Εξηγήστε γιατί η περιφέρεια της βάσης του κώνου ισούται με $8\pi - x$.

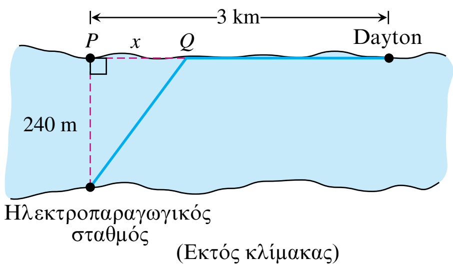
(β) Εκφράστε την ακτίνα r συναρτήσει του x.

(γ) Εκφράστε το ύψος h συναρτήσει του x.

(δ) Εκφράστε τον όγκο V του κώνου συναρτήσει του x.

48. *Βιομηχανικό κόστος* Η εταιρεία Dayton Power and Light, Inc., διαθέτει έναν σταθμό παραγωγής ενέργειας στον ποταμό Miami, σε σημείο όπου το πλάτος του ποταμού είναι 240 m. Η εγκατάσταση καινούριου καλωδίου σύνδεσης του σταθμού με την πόλη η οποία απέχει 3 km κατά μήκος του ποταμού και βρίσκεται στην αντίπερα όχθη, στοιχίζει \$600 το μέτρο διά του ποταμού και \$330 το μέτρο διά ξηράς (δηλ. κατά μήκος της όχθης).

(α) Υποθέστε ότι το καλώδιο εκτείνεται από τον σταθμό μέχρι το σημείο Q στην αντίπερα όχθη, το οποίο απέχει x από το αμέσως απέναντι στον σταθμό σημείο P.



Γράψτε τον τύπο μιας συνάρτησης $C(x)$ που δίνει το κόστος εγκατάστασης του καλωδίου συναρτήσει του x.

(β) Φτιάξτε έναν πίνακα τιμών προκειμένου να προσδιορίσετε αν η ελαχίστου κόστους τοποθεσία του σημείου Q απέχει λιγότερο ή περισσότερο από 600 m από το σημείο P.

49. *Άρτιες και περιττές συναρτήσεις*

(α) Το γινόμενο δύο άρτιων συναρτήσεων είναι απαραίτητα άρτια συνάρτηση; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(β) Ομοίως, τι είδους συνάρτηση είναι το γινόμενο δύο περιττών συναρτήσεων; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(γ) Είναι δυνατόν να είναι μια συνάρτηση άρτια και περιττή ταυτόχρονα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

50. *Ένα μαγικό κόλπο* Θα έχετε ακούσει κάποιο τρικ του είδους: Διάλεξε έναν αριθμό στην τύχη. Πρόσθεσέ του το 5. Διπλασίασε ό,τι βρήκες. Αφαίρεσε 6. Διαίρεσε με το 2. Αφαίρεσε 2. Τώρα πες μου τι βρήκες, και θα σου πω ποιον αριθμό είχες αρχικά επιλέξει.

(α) Διαλέξτε έναν αριθμό στην τύχη και δοκιμάστε το.

(β) Γιατί δουλεύει το τρικ για τυχόντα αριθμό;

T 51. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$ στο ίδιο διάγραμμα με **(α)** το άθροισμά τους, **(β)** το γινόμενό τους, **(γ)** τη διαφορά τους, και **(δ)** το πηλίκο τους.

T 52. Έστω $f(x) = x - 7$ και $g(x) = x^2$. Σχεδιάστε τις f και g στο ίδιο διάγραμμα με τις $f \circ g$ και $g \circ f$.

Μερικοί υπολογιστές μάς επιτρέπουν να χρησιμοποιούμε μια συνάρτηση y_1 ως την ανεξάρτητη μεταβλητή μιας άλλης συνάρτησης. Με τον τρόπο αυτόν μπορούμε να συνθέτουμε συναρτήσεις.

T 53. **(α)** Σε τέτοιο υπολογιστή εισάγετε τις συναρτήσεις

$y_1 = f(x) = 4 - x^2$, $y_2 = g(x) = \sqrt{x}$,

$y_3 = y_2(y_1(x))$, και $y_4 = y_1(y_2(x))$.

Ποια από τις y_3 και y_4 αντιστοιχεί στην $f \circ g$; Ποια αντιστοιχεί στην $g \circ f$;

(β) Σχεδιάστε τις y_1, y_2, και y_3 προκειμένου να εικάσετε τα πεδία ορισμού και τιμών της y_3.

(γ) Σχεδιάστε τις y_1, y_2, και y_4 προκειμένου να εικάσετε τα πεδία ορισμού και τιμών της y_4.

(δ) Επαληθεύστε τις εικασίες σας αλγεβρικά, βρίσκοντας τους τύπους των συναρτήσεων y_3 και y_4.

T 54. Εισάγετε στον υπολογιστή σας τις συναρτήσεις $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = \sqrt{1-x}$ και $y_3 = y_1 + y_2$.

(α) Σχεδιάστε την y_3 στην περιοχή που ορίζεται από τα διαστήματα $[-3, 3]$ για το x και $[-1, 3]$ για το y.

(β) Συγκρίνετε το πεδίο ορισμού του γραφήματος της y_3 με τα πεδία ορισμού των γραφημάτων των y_1 και y_2.

(γ) Αντικαταστήστε τη συνάρτηση y_3 κατά σειρά με τις ακόλουθες:

$y_1 - y_2$, $y_2 - y_1$, $y_1 \cdot y_2$, y_1/y_2, και y_2/y_1,

και επαναλάβετε τη σύγκριση του ερωτήματος (β).

(δ) Βασιζόμενοι στις παρατηρήσεις που κάνατε στα (β) και (γ), τι συμπεραίνετε για τα πεδία ορισμού αθροισμάτων, διαφορών, γινομένων, και πηλίκων συναρτήσεων;

Παλινδρομική ανάλυση: πρυμναία κύματα και απόσταση ακινητοποίησης

Δείτε τη σελ. 5 για μια εισαγωγή στην παλινδρομική ανάλυση με υπολογιστή.

T 55. *Πρυμναία κύματα* Παρατηρήσεις των πρυμναίων κυμάτων που δημιουργεί μια βάρκα σε κάθετες διευθύνσεις προς την πορεία της έχουν δείξει ότι η απόσταση μεταξύ των κορυφών των κυμάτων αυτών (το *μήκος κύματος*) αυξάνεται με την ταχύτητα της βάρκας. Ο Πίνακας 6 δείχνει τη σχέση μεταξύ του μήκους κύματος και της ταχύτητας της βάρκας.

(α) Βρείτε μια παλινδρομική εξίσωση δύναμης του τύπου $y = ax^b$ για τα δεδομένα του Πίνακα 6, όπου x είναι το μήκος κύματος, και y είναι η ταχύτητα της βάρκας.

(β) Τοποθετήστε σε ενιαίο σχήμα το γράφημα της παλινδρομικής εξίσωσης δύναμης και το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

(γ) Από το γράφημα της παλινδρομικής εξίσωσης δύναμης, προβλέψτε την ταχύτητα της βάρκας όταν το μήκος κύματος γίνει 11 m. Επαληθεύστε αλγεβρικά το αποτέλεσμα που βρήκατε.

(δ) Εφαρμόστε τώρα *γραμμική* παλινδρόμηση για να προβλέψετε την ταχύτητα όταν το μήκος κύματος είναι 11 m. Τοποθετήστε σε ενιαίο σχήμα την παλινδρομική ευθεία και το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων. Ποια από τις δύο ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα, η ευθεία αυτή ή η καμπύλη του ερωτήματος (β);

Πίνακας 6 Μήκη κύματος

Μήκος κύματος (m)	Ταχύτητα (km/h)
0,20	1,8
0,65	3,6
1,13	5,4
2,55	7,2
4,00	9,0
5,75	10,8
7,80	12,6
10,20	14,4
12,90	16,2
16,00	18,0
18,40	19,8

56. *Απόσταση ακινητοποίησης οχήματος* Ο Πίνακας 7 περιέχει πειραματικά δεδομένα της συνολικής απόστασης που διανύει ένα αυτοκίνητο μέχρι να ακινητοποιηθεί, έναντι της ταχύτητάς του.

(α) Βρείτε τη δευτεροβάθμια παλινδρομική εξίσωση που αντιστοιχεί στα δεδομένα του Πίνακα 7.

(β) Τοποθετήστε σε ενιαίο σχήμα τη γραφική παράσταση της δευτεροβάθμιας παλινδρομικής εξίσωσης και το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

(γ) Από το γράφημα της δευτεροβάθμιας παλινδρομικής εξίσωσης, προβλέψτε τη μέση συνολική απόσταση ακινητοποίησης για τις ταχύτητες των 108 και 127,5 km/h. Επαληθεύστε αλγεβρικά τις προβλέψεις σας.

(δ) Τώρα, εφαρμόστε *γραμμική* παλινδρόμηση για να προβλέψετε τη μέση συνολική απόσταση ακινητοποίησης για τις ίδιες ταχύτητες των 108 και 127,5 km/h. Τοποθετήστε σε ενιαίο σχήμα την παλινδρομική ευθεία και το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων. Ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα του Πίνακα 7 η ευθεία αυτή ή η δευτεροβάθμια καμπύλη του ερωτήματος (β);

Πίνακας 7 Απόσταση ακινητοποίησης οχήματος

Ταχύτητα (km/h)	Μέση συνολική απόσταση ακινητοποίησης (m)
30	11,95
37,5	15,90
45	20,90
52,5	26
60	32,95
67,5	40,5
75	49,15
82,5	59,5
90	70,45
97,5	83
115	97,45
122,5	113,90
130	131,80

Πηγή: U.S. Bureau of Public Roads.

3 Εκθετικές συναρτήσεις

Εκθετική αύξηση • Πληθυσμιακή αύξηση • Η εκθετική συνάρτηση e^x • Τι απέγινε η συνάρτηση a^x;

Οι εκθετικές συναρτήσεις αποκτούν μεγάλη σπουδαιότητα σε πολλές επιστημονικές και τεχνολογικές εφαρμογές. Στην ενότητα αυτή θα συνοψίσουμε τα περί των εκθετικών συναρτήσεων και θα μελετήσουμε μερικά από τα κυριότερα εκθετικά μοντέλα αύξησης και ελάττωσης. Τα μαθηματικά που αφορούν τις ιδιότητες αυτών των καταπληκτικών συναρτήσεων, καθώς και τις σχέσεις τους με τις λογαριθμικές συναρτήσεις (τις οποίες παρουσιάζουμε στην επόμενη ενότητα), έχουν κομψότητα και βάθος. Θα τα διερευνήσουμε λεπτομερέστερα στα Κεφάλαια 3 και 6.

Εκθετική αύξηση

Ο Πίνακας 8 δείχνει την αύξηση ενός κεφαλαίου 100 € που επενδύθηκε το 1996 με επιτόκιο 5,5%, ανατοκιζόμενο ετησίως. Μετά την παρέλευση ενός έτους, ο λογαριασμός διαθέτει πάντα 1,055 φορές το ποσό που υπήρχε το προηγούμενο έτος. Μετά n έτη, οι καταθέσεις είναι $y = 100 \cdot (1{,}055)n$.

Το φαινόμενο του ανατοκισμού είναι ένα παράδειγμα *εκθετικής αύξησης* και περιγράφεται από μια συνάρτηση του τύπου $y = P \cdot ax$, όπου P είναι το αρχικό κεφάλαιο, και το a ισούται με τη μονάδα προσαυξημένη κατά το επιτόκιο σε δεκαδική μορφή.

Η εξίσωση $y = P \cdot ax$, $a > 0$, $a \neq 1$, ορίζει μια οικογένεια συναρτήσεων που καλούνται *εκθετικές συναρτήσεις*.

Παράδειγμα 1 Σχεδίαση της $y = a^x$

Σχεδιάστε τις συναρτήσεις $y = 2x$, $y = 3x$, και $y = 10x$. Για ποιες τιμές του x αληθεύουν οι σχέσεις $2x > 3x > 10x$;

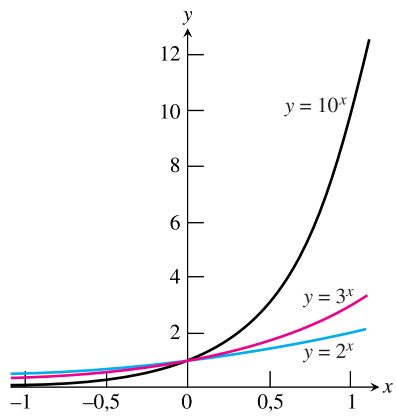
Λύση Από τις γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 24, παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις αυξάνονται για κάθε τιμή του x. Για $x <$

Πίνακας 8 Αύξηση καταθέσεων λογαριασμού ταμιευτηρίου

Έτος	Ποσό (σε €)	Αύξηση (σε €)
1996	100	
1997	100(1,055) = 105,50	5,50
1998	$100(1{,}055)^2 = 111{,}30$	5,80
1999	$100(1{,}055)^3 = 117{,}42$	6,12
2000	$100(1{,}055)^4 = 123{,}88$	6,46

0, έχουμε $2x > 3x > 10x$. Για $x = 0$, είναι $2x = 3x = 10x = 1$. Για $x > 0$, έχουμε $2x < 3x < 10x$.

Το πεδίο ορισμού της $f(x) = ax$ είναι το διάστημα $(-\infty, \infty)$, ενώ το πεδίο τιμών είναι το $(0, \infty)$. Αν $a > 1$, το γράφημα της f μοιάζει με το γράφημα της $y = 2x$ στο Σχήμα 25α. Αν $0 < a < 1$, τότε το γράφημα της f μοιάζει με αυτό της $y = (1/2)x = 2\text{-}x$ του Σχήματος 25β.



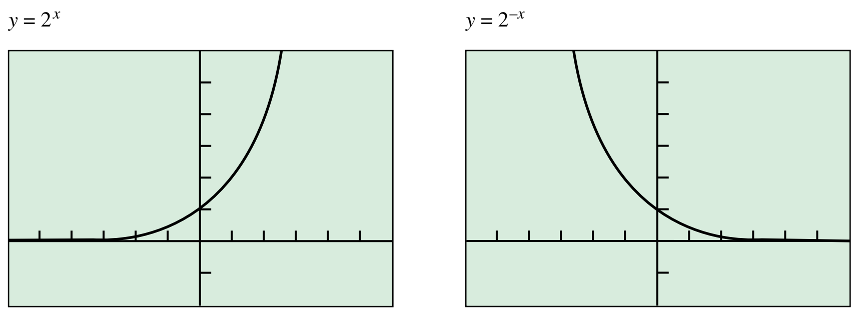
Σχημα 24 $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 10^x$.

Ορισμός **Εκθετική συνάρτηση**

Έστω a ένας θετικός πραγματικός αριθμός διάφορος του 1. Η συνάρτηση

$$f(x) = ax$$

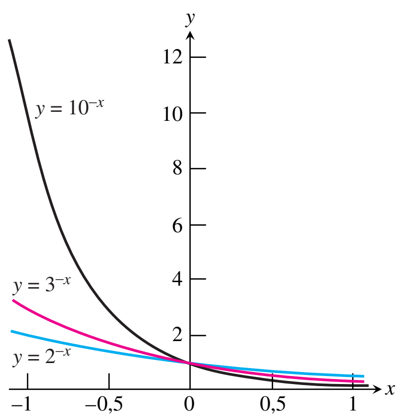
είναι η **εκθετική συνάρτηση με βάση a**.



[–6, 6] επί [–2, 6] (α)

[–6, 6] επί [–2, 6] (β)

Σχημα 25 Γραφικές παραστάσεις των (α) $y = 2^x$ και (β) $y = 2^{-x}$.



Σχημα 26 $y = 2^{-x}$, $y = 3^{-x}$, $y = 10^{-x}$.

Παράδειγμα 2 Σχεδίαση της $y = a^{-x}$

Σχεδιάστε τις συναρτήσεις $y = 2^{-}x$, $y = 3^{-}x$, και $y = 10^{-}x$. Για ποιες τιμές του x αληθεύουν οι σχέσεις $2^{-}x > 3^{-}x > 10^{-}x$;

Λύση Από τις γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 26, παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις φθίνουν για κάθε τιμή του x. Για $x < 0$, θα έχουμε $2^{-}x < 3^{-}x < 10^{-}x$. Για $x = 0$, ισχύει $2^{-}x = 3^{-}x = 10^{-}x = 1$. Για $x > 0$, έχουμε $2^{-}x > 3^{-}x > 10^{-}x$.

Οι εκθετικές συναρτήσεις έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

Ιδιότητες εκθετικών

Αν $a > 0$ και $b > 0$, τότε για τους πραγματικούς αριθμούς x και y θα ισχύουν τα εξής:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$
4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
5. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

Πληθυσμιακή αύξηση

Σε μερικές περιπτώσεις, η αύξηση ενός πληθυσμού μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά με μια εκθετική συνάρτηση. Στον Πίνακα 9 δίδονται κάποιες τιμές του (ανθρώπινου) πληθυσμού της Γης. Σε μια τρίτη στήλη έχουμε διαιρέσει τον πληθυσμό κάθε έτους με αυτόν του προηγούμενου έτους, προκειμένου να αποκτήσουμε μια αίσθηση του πώς αυξάνεται ο πληθυσμός.

Πίνακας 9 Παγκόσμιος πληθυσμός

Έτος	Πληθυσμός (εκατομμύρια)	Πηλίκο
1986	4936	
1987	5023	$5023/4936 \approx 1,0176$
1988	5111	$5111/5023 \approx 1,0175$
1989	5201	$5201/5111 \approx 1,0176$
1990	5329	$5329/5201 \approx 1,0246$
1991	5422	$5422/5329 \approx 1,0175$

Πηγή: Statistical Office of the United Nations, *Monthly Bulletin Statistics,* 1991.

Παράδειγμα 3 Πρόβλεψη του παγκόσμιου πληθυσμού

Χρησιμοποιήστε τα δεδομένα του Πίνακα 9 και ένα εκθετικό μοντέλο, ώστε να προβλέψετε τον πληθυσμό της Γης το έτος 2010.

Λύση Βασιζόμενοι στην τρίτη στήλη του Πίνακα 9 (και παρά τις όποιες παρεκκλίσεις), φαίνεται εύλογη η εικασία ότι ο παγκόσμιος πληθυσμός κάθε έτους ισούται περίπου με 1,018 φορές τον πληθυσμό του προηγούμενου έτους. Έτσι, μετά την παρέλευση t ετών από το 1986, ο πλανήτης θα έχει $P(t) = 4936\ (1,018)t$ εκατομμύρια ανθρώπους. Ο πληθυσμός το έτος 2010, δηλαδή $t = 24$ έτη μετά το 1986, θα είναι περίπου

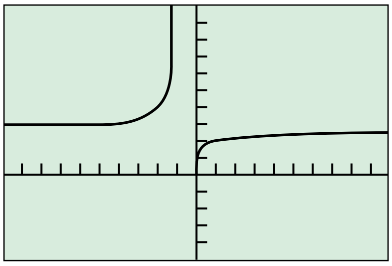
$$P(24) = 4936(1,018)^{24} \approx 7573,9$$

δηλαδή 7,6 δισεκατομμύρια άνθρωποι.

Η εκθετική συνάρτηση e^x

Η σπουδαιότερη εκθετική συνάρτηση για τη μαθηματική περιγραφή φυσικών και οικονομικών φαινομένων είναι η **φυσική εκθετική συν-**

$y = (1 + 1/x)^x$



[–10, 10] επί [–5, 10]

X	Y1	
1000	2.7169	
2000	2.7176	
3000	2.7178	
4000	2.7179	
5000	2.718	
6000	2.7181	
7000	2.7181	
Y1=(1+1/X)^X		

Σχημα 27 Τόσο η γραφική παράσταση όσο και ο πίνακας τιμών της $f(x) = (1 + 1/x)x$ υποδεικνύουν ότι καθώς $x \to \infty$, $f(x) \to e \approx 2{,}718$.

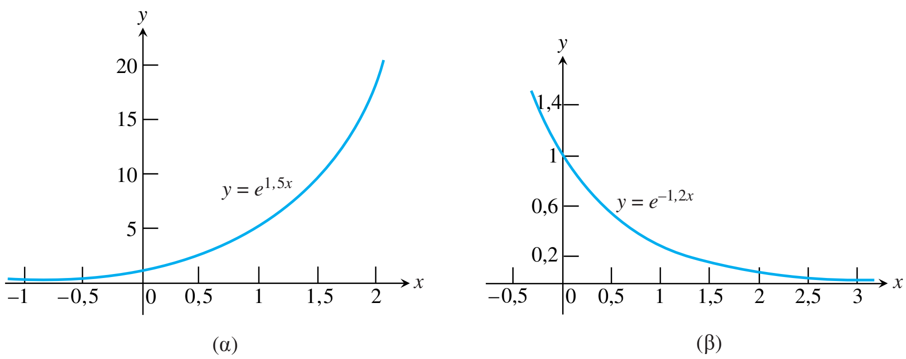
άρτηση, που έχει ως βάση τον περίφημο αριθμό e, ο οποίος ισούται με 2,718281828, με ακρίβεια εννέα δεκαδικών ψηφίων. Μπορούμε να ορίσουμε το e ως τον αριθμό που προσεγγίζεται από την τιμή της συνάρτησης $f(x) = (1 + 1/x)^x$ καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα. Τόσο η γραφική παράσταση όσο και ο πίνακας τιμών του Σχήματος 27 δημιουργούν εύλογα την πεποίθηση ότι ένας τέτοιος αριθμός όντως υπάρχει. Κατά την ενασχόλησή σας με τον απειροστικό λογισμό θα μάθετε περισσότερα για τον αριθμό e, και για το πώς αυτός προκύπτει.

Οι εκθετικές συναρτήσεις $y = e^{kx}$, όπου k είναι μια μη μηδενική σταθερά, χρησιμοποιούνται συχνότατα ως μοντέλα εκθετικών αυξήσεων ή μειώσεων. Παράδειγμα εκθετικής αύξησης είναι ο **συνεχής ανατοκισμός** κεφαλαίου, όπου εφαρμόζεται το μοντέλο $y = P \cdot ert\cdot$ εδώ P είναι το αρχικό κεφάλαιο, r είναι το επιτόκιο εκπεφρασμένο ως δεκαδικός αριθμός, και t είναι το χρονικό διάστημα σε έτη. Ένα παράδειγμα εκθετικής μείωσης είναι το μοντέλο $y = A \cdot e^{-1{,}2\times 10^{-4}t}$, που περιγράφει τη ραδιενεργό διάσπαση του στοιχείου άνθρακας-14 με την πάροδο του χρόνου. Εδώ A είναι η αρχική ποσότητα άνθρακα-14, και t είναι ο χρόνος σε έτη. Η διάσπαση του άνθρακα-14 χρησιμεύει στη χρονολόγηση λειψάνων νεκρών οργανισμών (κοχυλιών, σπόρων) καθώς και ξύλινων αντικειμένων.

Ορισμοί Εκθετική αύξηση, εκθετική μείωση

Η συνάρτηση $y = y_0 e^{kx}$ αποτελεί μοντέλο **εκθετικής αυξήσεως** αν $k > 0$ και **εκθετικής μειώσεως** αν $k < 0$.

Στο Σχήμα 28 έχουν σχεδιαστεί γραφικές παραστάσεις εκθετικής αύξησης και μείωσης.



Σχημα 28 Γραφήματα (α) εκθετικής αυξήσεως, $k = 1{,}5 > 0$ και (β) εκθετικής μειώσεως, $k = -1{,}2 < 0$.

Παράδειγμα 4 Αύξηση κεφαλαίου λογαριασμού ταμιευτηρίου

Το μοντέλο του συνεχούς ανατοκισμού χρησιμοποιείται από εταιρείες επενδύσεων προκειμένου να υπολογίσουν την αύξηση του επενδυόμενου κεφαλαίου τους. Εφαρμόστε το μοντέλο αυτό για να μελετήσετε την αύξηση ενός κεφαλαίου 100 € που επενδύθηκε το 1996 με ετήσιο επιτόκιο 5,5%, συνεχώς ανατοκιζόμενο.

Λύση

Μοντέλο

Έστω ότι η τιμή $x = 0$ αντιστοιχεί στο 1996, η $x = 1$ στο 1997, κ.ο.κ. Το εκθετικό μοντέλο για συνεχή ανατοκισμό είναι τότε $y(x) = P \cdot e^{rx}$, όπου $P = 100$ (το αρχικό κεφάλαιο), $r = 0{,}055$ (το ετήσιο επιτόκιο εκπεφρασμένο ως δεκαδικός αριθμός), και x είναι το χρονικό διάστημα σε έτη. Για να προβλέψουμε το ύψος των καταθέσεων το 2000, για παράδειγμα, θέτουμε $x = 4$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} y(4) &= 100 \cdot e^{0,055(4)} \\ &= 100 \cdot e^{0,22} \\ &= 124,61. \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα αυτό με το ποσό των 123,88 € που προκύπτει όταν ο ανατοκισμός είναι ετήσιος (Πίνακας 10), βλέπουμε ότι συμφέρει τον επενδυτή να ανατοκίζεται το κεφάλαιο όσο το δυνατόν συχνότερα (στην περίπτωση που εξετάζουμε εδώ, *συνεχώς*). Στον Πίνακα 10, συγκρίνουμε την απόδοση του ετήσιου (βλ. και Πίνακα 8) και του συνεχούς ανατοκισμού για την περίοδο από το 1996 ώς το 2000.

Πίνακας 10 Σύγκριση αυξήσεως κεφαλαίου λογαριασμών ταμιευτηρίου

Έτος	Ποσό (σε €), ετήσιος ανατοκισμός	Ποσό (σε €), συνεχής ανατοκισμός
1996	100,00	100,00
1997	105,50	105,65
1998	111,30	111,63
1999	117,42	117,94
2000	123,88	124,61

Μια τράπεζα θα προτιμούσε, ενδεχομένως, να αποδώσει κάτι περισσότερο στους πελάτες της σε τόκους, προκειμένου να προσελκύσει επενδυτές με το δέλεαρ του συνεχούς ανατοκισμού, που θα διαφήμιζε βέβαια κατάλληλα.

Παράδειγμα 5 Μοντέλο ραδιενεργού διάσπασης

Εργαστηριακά πειράματα απέδειξαν ότι τα άτομα ορισμένων στοιχείων εκπέμπουν μέρος της μάζας τους ως ακτινοβολία, και στη συνέχεια αναδιοργανώνονται σχηματίζοντας άτομα κάποιου νέου στοιχείου. Για παράδειγμα, ο ραδιενεργός άνθρακας-14 διασπάται σε άζωτο, ενώ το ράδιο μετά από μια αλληλουχία διασπάσεων μετατρέπεται τελικά σε μόλυβδο. Αν y_0 είναι ο αριθμός των ραδιενεργών πυρήνων που υπάρχουν τη χρονική στιγμή μηδέν, τότε ο αριθμός των πυρήνων που θα συνεχίζουν να υπάρχουν σε μια τυχούσα μεταγενέστερη στιγμή t θα ισούται με

$$y = y_0 e^{-rt}, \qquad r > 0.$$

Ο αριθμός r καλείται **ρυθμός διασπάσεως** της ραδιενεργού ουσίας. Για τον άνθρακα-14, η τιμή του ρυθμού διασπάσεως έχει προσδιοριστεί πειραματικά ότι είναι $r = 1,2 \times 10^{-4}$ όταν ο χρόνος t μετράται σε έτη. Κάντε μια πρόβλεψη για το ποσοστό του άνθρακα-14 που θα έχει απομείνει σε δείγμα ουσίας μετά την παρέλευση 866 ετών.

Λύση Αν αρχικά υπήρχαν y_0 πυρήνες άνθρακα-14, μετά από 866 έτη θα έχουν απομείνει

$$\begin{aligned} y(866) &= y_0 e^{(-1,2\times 10^{-4})(866)} \\ &\approx (0,901)\, y_0. \end{aligned}$$

Δηλαδή, μετά από 866 χρόνια, θα έχει απομείνει το 90% περίπου της αρχικής ποσότητας· με άλλα λόγια, ένα ποσοστό 10% των αρχικών πυρήνων θα έχει διασπαστεί. Στο Παράδειγμα 12 της επόμενης ενότητας, θα δείτε πώς υπολογίζεται ο αριθμός ετών που πρέπει να παρέλθουν («χρόνος ημιζωής» ή, απλούστερα, «ημιζωή») ώστε να έχουν διασπαστεί ακριβώς οι μισοί ραδιενεργοί πυρήνες.

Τι απέγινε το a^x;

Ίσως να αναρωτιέστε για ποιον λόγο χρησιμοποιούμε την οικογένεια συναρτήσεων $y = y_0e^{kx}$ για διαφορετικές τιμές της σταθεράς k, αντί των γενικών εκθετικών συναρτήσεων της μορφής $y = Pax$. Στην επόμενη ενότητα, θα δούμε ότι η εκθετική συνάρτηση ax ταυτίζεται με την ekx για κάποια κατάλληλη τιμή της σταθεράς k. Έτσι, ο τύπος $y = y_0e^{kx}$ καλύπτει το σύνολο των εκθετικών συναρτήσεων.

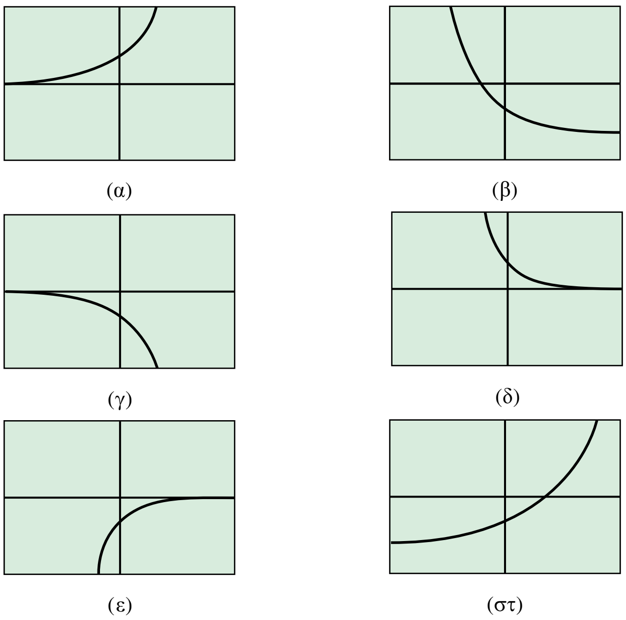
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3

Στις Ασκήσεις 1-6, αντιστοιχίστε κάθε συνάρτηση με ένα από τα γραφήματα του Σχήματος 29, χωρίς να καταφύγετε σε υπολογιστική σχεδίαση.

1. $y = 2x$ **2.** $y = 3^{-}x$

3. $y = -3^{-}x$ **4.** $y = -0{,}5^{-}x$

5. $y = 2^{-x} - 2$ **6.** $y = 1{,}5x - 2$



Σχημα 29 Γραφήματα για τις Ασκήσεις 1-6.

Στις Ασκήσεις 7-10, σχεδιάστε τη συνάρτηση. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τιμών της, καθώς και τα σημεία όπου το γράφημά της τέμνει τους άξονες.

7. $y = -2x + 3$ **8.** $y = ex + 3$

9. $y = 3 \cdot e^{-}x - 2$ **10.** $y = -2^{-}x - 1$

Στις Ασκήσεις 11-14, ξαναγράψτε την εκθετική έκφραση στην ενδεδειγμένη βάση.

11. 9^2x, βάση 3 **12.** 16^3x, βάση 2

13. $(1/8)^2x$, βάση 2 **14.** $(1/27)x$, βάση 3

Στις Ασκήσεις 15-18, αντιγράψτε και συμπληρώστε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης, εργαζόμενοι *σε ομάδες των δύο-τριών ατόμων*.

15. $y = 2x - 3$

x	y	***Μεταβολή*** (Δy)
1	;	;
2	;	;
3	;	;
4	;	

16. $y = -3x + 4$

x	y	***Μεταβολή*** (Δy)
1	;	;
2	;	;
3	;	;
4	;	

17. $y = x^2$

x	y	***Μεταβολή*** (Δy)
1	;	;
2	;	;
3	;	;
4	;	

18. $y = 3ex$

x	y	***Πηλίκο*** $(yi/yi\text{–}1)$
1	;	;
2	;	;
3	;	;
4	;	

19. *Μάθετε γράφοντας* Εξηγήστε πώς συνδέεται η μεταβολή Δy με τις κλίσεις των ευθειών στις Ασκήσεις 15 και 16. Αν οι μεταβολές του x είναι σταθερές για μια γραμμική συνάρτηση, τι συμπεραίνετε για τις αντίστοιχες μεταβολές του y;

20. *Μάθετε γράφοντας* Περιγράψτε πώς συνδέεται η μεταβολή Δy (που προκύπτει καθώς το x αλλάζει διαδοχικά τιμές στην Άσκηση 17), με τις τιμές αυτές του x. Πόσο είναι το Δy καθώς το x μεταβάλλεται από το $x = 1000$

στο $x = 1001$; Πόσο, καθώς το x μεταβάλλεται από την τιμή n στην $n + 1$, όπου n είναι ένας τυχών θετικός ακέραιος;

Προεκτείνοντας τις έννοιες

Στις Ασκήσεις 21 και 22, υποθέστε ότι το γράφημα της εκθετικής συναρτήσεως $f(x) = k \cdot ax$ διέρχεται από τα δύο σημεία. Βρείτε τις τιμές του a και του k.

21. (1, 4,5), (−1, 0,5) **22.** (1, 1,5), (−1, 6)

Γραφική επίλυση

Στις Ασκήσεις 23-26, επιλύστε τις εξισώσεις μέσω γραφικών παραστάσεων.

23. $2x = 5$ **24.** $ex = 4$

25. $3x - 0{,}5 = 0$ **26.** $3 - 2^{-}x = 0$

Θεωρία και παραδείγματα

27. *Παγκόσμιος πληθυσμός* (*συνέχεια του Παραδείγματος 3*) Χρησιμοποιήστε το πηλίκο 1,018 και τον πληθυσμό του 1991 για να εκτιμήσετε τον παγκόσμιο πληθυσμό το έτος 2010.

28. *Βακτηριακή εξάπλωση* Ο αριθμός των βακτηρίων που υπάρχουν σε μια καλλιέργεια τρυβλίου petri (Σ.τ.Μ. ένα είδος πειραματικού σωλήνα στη μικροβιολογία) μετά από t ώρες είναι $B = 100e^{0{,}693}t$.

(α) Πόσα βακτήρια υπήρχαν αρχικά;

(β) Πόσα βακτήρια υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

(γ) Πότε περίπου θα έχουν γίνει τα βακτήρια 200; Εκτιμήστε τον χρόνο διπλασιασμού του αριθμού τους.

Στις Ασκήσεις 29-40, χρησιμοποιήστε ένα εκθετικό μοντέλο και έναν υπολογιστή για να υπολογίσετε κατ' εκτίμηση τη λύση κάθε προβλήματος.

29. *Πληθυσμιακή αύξηση* Ο πληθυσμός της πόλης Knoxville είναι 500.000 και αυξάνεται με ποσοστό 3,75% κατ' έτος. Πότε περίπου θα έχει φθάσει το 1 εκατομμύριο;

30. *Πληθυσμιακή αύξηση* Ο πληθυσμός της πόλης Silver Run το έτος 1890 ήταν 6250 άτομα. Υποθέστε ότι η αύξηση του πληθυσμού ήταν 2,75% κατ' έτος.

(α) Δώστε μια εκτίμηση του πληθυσμού της πόλης τα έτη 1915 και 1940.

(β) Πότε περίπου ανήλθε ο πληθυσμός στις 50.000;

31. *Ραδιενεργός διάσπαση* Ο χρόνος ημιζωής του φωσφόρου-32 είναι περίπου 14 μέρες. Αρχικά υπάρχουν 6,6 γραμμάρια του στοιχείου.

(α) Εκφράστε την ποσότητα του εναπομείναντος φωσφόρου-32 συναρτήσει του χρόνου t.

(β) Πότε θα έχει απομείνει 1 γραμμάριο φωσφόρου στο δείγμα;

32. *Υπολογισμός χρόνου* Αν ο Γιάννης επενδύσει 2300 € σε έναν λογαριασμό ταμιευτηρίου με 6% επιτόκιο και ετήσιο ανατοκισμό, πόσο χρονικό διάστημα θα χρειαστεί για να γίνει το κεφάλαιό του 4150 €;

33. *Διπλασιασμός χρημάτων* Προσδιορίστε πόσο χρονικό διάστημα απαιτείται για να διπλασιαστεί ένα κεφάλαιο που επενδύεται με επιτόκιο 6,25% και ετήσιο ανατοκισμό.

34. *Διπλασιασμός χρημάτων* Προσδιορίστε πόσο χρονικό διάστημα απαιτείται για να διπλασιαστεί ένα κεφάλαιο που επενδύεται με επιτόκιο 6,25% και μηνιαίο ανατοκισμό.

35. *Διπλασιασμός χρημάτων* Προσδιορίστε πόσο χρονικό διάστημα απαιτείται για να διπλασιαστεί ένα κεφάλαιο που επενδύεται με επιτόκιο 6,25% και συνεχή ανατοκισμό.

36. *Τριπλασιασμός χρημάτων* Προσδιορίστε πόσο χρονικό διάστημα απαιτείται για να τριπλασιαστεί ένα κεφάλαιο που επενδύεται με επιτόκιο 5,75% και ετήσιο ανατοκισμό.

37. *Τριπλασιασμός χρημάτων* Προσδιορίστε πόσο χρονικό διάστημα απαιτείται για να τριπλασιαστεί ένα κεφάλαιο που επενδύεται με επιτόκιο 5,75% και ημερήσιο ανατοκισμό.

38. *Τριπλασιασμός χρημάτων* Προσδιορίστε πόσο χρονικό διάστημα απαιτείται για να τριπλασιαστεί ένα κεφάλαιο που επενδύεται με επιτόκιο 5,75% και συνεχή ανατοκισμό.

39. *Βακτήρια χολέρας* Υποθέστε ότι μια αποικία βακτηρίων που περιέχει αρχικά 1 βακτήριο διπλασιάζει τον αριθμό της ανά μισή ώρα. Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στην αποικία μετά από 24 h;

40. *Εξάλειψη ασθένειας* Υποθέστε ότι κάθε χρόνο μειώνεται ο αριθμός των κρουσμάτων μιας ασθένειας κατά 20%. Αν υπάρχουν 10.000 κρούσματα σήμερα, τότε πόσα χρόνια θα χρειαστούν για

(α) να μειωθεί ο αριθμός κρουσμάτων στα 1000;

(β) να εξαλειφθεί η ασθένεια αυτή; (Δηλαδή, να μειωθεί ο αριθμός κρουσμάτων σε λιγότερα του ενός;)

Παλινδρομική ανάλυση: εκθετικά πληθυσμιακά μοντέλα

Δείτε τη σελ. 5 για μια εισαγωγή στην παλινδρομική ανάλυση με υπολογιστή.

41. Ο Πίνακας 11 περιέχει στοιχεία για τον πληθυσμό του Μεξικού.

(α) Έστω ότι η τιμή $x = 0$ αντιστοιχεί στο 1900, η τιμή $x = 1$ αντιστοιχεί στο 1901, κ.ο.κ. Βρείτε μια εκθετική εξίσωση παλινδρόμησης για τα δεδομένα του πίνακα και σχεδιάστε την σε ενιαίο σχήμα με το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

Πίνακας 11 Πληθυσμός Μεξικού

Έτος	Πληθυσμός (εκατομμύρια)
1950	25,8
1960	34,9
1970	48,2
1980	66,8
1990	81,1

Πηγή: The Statesman's Yearbook, 129th ed. (London: The Macmillan Press, Ltd., 1992).

(β) Χρησιμοποιήστε την εκθετική εξίσωση παλινδρόμησης για να κάνετε μια εκτίμηση του πληθυσμού του Μεξικού κατά το έτος 1900. Πόσο κοντά πέσατε στον πραγματικό πληθυσμό του 1900, ο οποίος ήταν 13.607.272;

(γ) Χρησιμοποιήστε την εκθετική εξίσωση παλινδρόμησης για να κάνετε μια εκτίμηση του ετήσιου ρυθμού αύξησης του μεξικανικού πληθυσμού.

42. Ο Πίνακας 12 περιέχει στοιχεία για τον πληθυσμό της Νότιας Αφρικής.

(α) Έστω ότι η τιμή $x = 0$ αντιστοιχεί στο 1900, η τιμή $x = 1$ αντιστοιχεί στο 1901, κ.ο.κ. Βρείτε μια εκθετική εξίσωση παλινδρόμησης για τα δεδομένα του πίνακα και σχεδιάστε την σε ενιαίο σχήμα με το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

(β) Χρησιμοποιήστε την εκθετική εξίσωση παλινδρόμησης για να κάνετε μια εκτίμηση του πληθυσμού της Νότιας Αφρικής κατά το έτος 1990.

(γ) Χρησιμοποιήστε την εκθετική εξίσωση παλινδρόμησης για να εκτιμήσετε τον ετήσιο ρυθμό αύξησης του νοτιοαφρικανικού πληθυσμού.

Πίνακας 12 Πληθυσμός Νότιας Αφρικής

Έτος	Πληθυσμός (εκατομμύρια)
1904	5,2
1911	6,0
1921	6,9
1936	9,6
1946	11,4
1951	12,7
1960	16,0
1970	18,3
1980	20,6

Πηγή: The Statesman's Yearbook, 129th ed. (London: The Macmillan Press, Ltd., 1992).

4 Αντίστροφες συναρτήσεις και λογάριθμοι

Αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις (1-1) • Αντίστροφες συναρτήσεις • Εύρεση αντίστροφων συναρτήσεων • Λογαριθμικές συναρτήσεις • Ιδιότητες λογαρίθμων • Εφαρμογές

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε τι εννοούμε λέγοντας ότι μία συνάρτηση είναι η αντίστροφη κάποιας άλλης. Επίσης θα δούμε ποιες σχέσεις υπάρχουν μεταξύ των τύπων και των γραφημάτων συναρτήσεων και των αντιστρόφων τους. Κατόπιν θα μελετήσουμε τη λογαριθμική συνάρτηση ως αντίστροφη της εκθετικής (στην κατάλληλη βάση), και θα παρουσιάσουμε αρκετές σημαντικές εφαρμογές των λογαριθμικών συναρτήσεων.

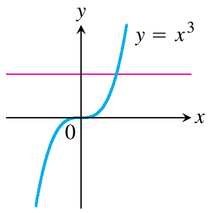
Αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις (1-1)

Όπως γνωρίζουμε, μια συνάρτηση δεν είναι παρά ένας κανόνας που αντιστοιχίζει μία και μόνο τιμή του πεδίου τιμών σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Μερικές συναρτήσεις αντιστοιχίζουν την ίδια τιμή εξόδου σε περισσότερες από μία τιμές εισόδου. Για παράδειγμα, η $f(x) = x^2$ αναθέτει την έξοδο 4 τόσο στην είσοδο 2 όσο και στην -2. Υπάρχουν άλλες συναρτήσεις που δεν αποδίδουν ποτέ την ίδια τιμή περισσότερες από μία φορές. Για παράδειγμα, οι κύβοι διαφορετικών αριθμών δεν είναι ποτέ ίσοι.

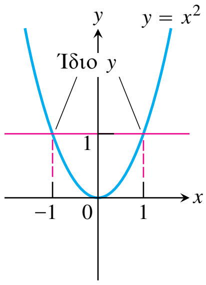
Αν κάθε τιμή εξόδου μιας συναρτήσεως αντιστοιχίζεται με μόνο μία τιμή εισόδου, η συνάρτηση καλείται *αμφιμονοσήμαντη* ή 1-1 (*ένα προς ένα*).

Ορισμός **Αμφιμονοσήμαντη (1-1) συνάρτηση**
Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι **αμφιμονοσήμαντη** ή **1-1 (ένα προς ένα)** σε ένα πεδίο ορισμού D αν $f(a) \neq f(b)$ οποτεδήποτε $a \neq b$.

Η γραφική παράσταση μιας αμφιμονοσήμαντης συναρτήσεως $y = f(x)$ μπορεί να τέμνει μια τυχούσα οριζόντια ευθεία το πολύ σε ένα της ση-



1-1: Το γράφημα τέμνει κάθε οριζόντια ευθεία μία μόνο φορά.



Μη 1-1: Το γράφημα τέμνει κάποια οριζόντια ευθεία περισσότερες από μία φορές.

Σχημα 30 Με το κριτήριο της οριζόντιας ευθείας, συμπεραίνουμε ότι η $y = x^3$ είναι αμφιμονοσήμαντη, ενώ η $y = x^2$ δεν είναι.

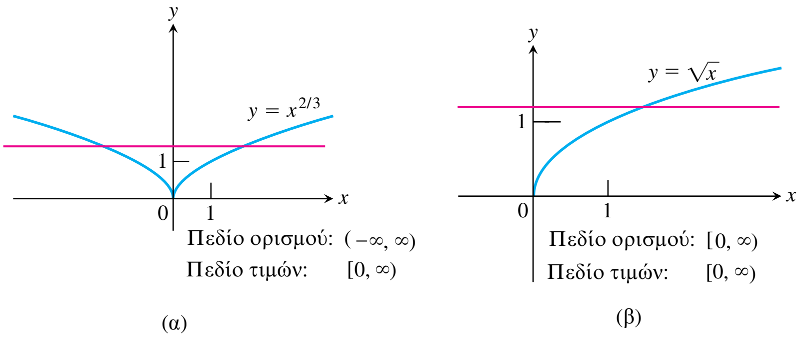
μείο (η πρόταση αυτή αποτελεί το λεγόμενο *κριτήριο της οριζόντιας ευθείας*). Αν την τέμνει σε περισσότερα σημεία, αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση αποκτά την ίδια τιμή y περισσότερες από μία φορές και κατά συνέπεια δεν είναι αμφιμονοσήμαντη. (Σχήμα 30).

Παράδειγμα 1 Χρήση του κριτηρίου της οριζόντιας ευθείας

Προσδιορίστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι αμφιμονοσήμαντες ή όχι.

$$\textbf{(α)}\ f(x) = x^{2/3} \qquad \textbf{(β)}\ g(x) = \sqrt{x}$$

Λύση Όπως φαίνεται στο Σχήμα 31α, κάθε οριζόντια ευθεία $y = c$, $c > 0$, τέμνει το γράφημα της $f(x) = x^{2/3}$ δύο φορές, άρα η f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη. Από την άλλη, από το Σχήμα 31β διακρίνουμε ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της $g(x) = \sqrt{x}$ είτε μία φορά είτε καθόλου. Έτσι, η συνάρτηση g είναι αμφιμονοσήμαντη.



Σχημα 31 (α) Το γράφημα της $f(x) = x^{2/3}$ και μια οριζόντια ευθεία. (β) Το γράφημα της $g(x) = \sqrt{x}$ και μια οριζόντια ευθεία. (Παράδειγμα 1)

Αντίστροφες συναρτήσεις

Εφόσον κάθε έξοδος μιας αμφιμονοσήμαντης συναρτήσεως προέρχεται από μία και μόνη είσοδο, μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση θα μπορεί να αντιστραφεί και να «αποστείλει» τις εξόδους πίσω στις αντίστοιχες εισόδους από τις οποίες αυτές προέκυψαν. Η συνάρτηση που ορίζεται αντιστρέφοντας μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση f είναι η **αντίστροφη της f**. Οι συναρτήσεις στους Πίνακες 13 και 14 είναι αντίστροφες η μία της άλλης. Συμβολίζουμε την αντίστροφη της f ως f^{-1}, και διαβάζουμε «αντίστροφη f». Το σύμβολο -1 στην f^{-1} δεν είναι εκθέτης· έτσι το $f^{-1}(x)$ δεν ισούται με $1/f(x)$.

Πίνακας 13 Μίσθωμα έναντι χρόνου

Χρόνος x (ώρες)	**Χρέωση y (σε €)**
1	5,00
2	7,50
3	10,00
4	12,50
5	15,00
6	17,50

Πίνακας 14 Χρόνος έναντι μισθώματος

Χρέωση x (σε €)	**Χρόνος y (ώρες)**
5,00	1
7,50	2
10,00	3
12,50	4
15,00	5
17,50	6

Όπως φαίνεται από τους Πίνακες 13 και 14, αν συνθέσουμε (με οποιαδήποτε σειρά) μια συνάρτηση με την αντίστροφή της, τότε κάθε τιμή εισόδου της σύνθετης συναρτήσεως θα αποστέλλεται ως έξοδος πίσω στον εαυτό της. Με άλλα λόγια, το αποτέλεσμα της σύνθεσης μιας συνάρτησης με την αντίστροφή της (ανεξαρτήτως της σειράς με την οποία οι δύο συναρτήσεις συντίθενται) θα είναι η **ταυτοτική συνάρτηση,** δηλαδή η συνάρτηση που αντιστοιχίζει κάθε αριθμό στον εαυτό του. Έτσι, η σύνθεση δύο συναρτήσεων f και g μας παρέχει έναν τρόπο ελέγχου για το αν η μία είναι αντίστροφη της άλλης: Υπολογίζουμε τις τιμές $f \circ g$ και $g \circ f$. Αν $(f \circ g)(x) = x$ και $(g \circ f)(x) = x$, τότε οι f και g είναι αντίστροφες η μία της άλλης· αλλιώς, δεν είναι. Οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^{1/3}$ είναι μεταξύ τους αντίστροφες διότι $(x^3)^{1/3} = x$ και $(x^{1/3})^3 = x$, για κάθε x.

Κριτήριο αντιστρόφων

Οι συναρτήσεις f και g αποτελούν ζεύγος αντιστρόφων αν και μόνο αν

$$f(g(x)) = x \qquad \text{και} \qquad g(f(x)) = x.$$

Στην περίπτωση αυτή, $g = f^{-1}$ και $f = g^{-1}$.

Παράδειγμα 2 Έλεγχος για αντίστροφες συναρτήσεις

(α) Οι συναρτήσεις

$$f(x) = 3x \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{x}{3}$$

αποτελούν ζεύγος αντιστρόφων, διότι

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x}{3}\right) = 3\left(\frac{x}{3}\right) = x \qquad \text{και} \qquad g(f(x)) = g(3x) = \frac{3x}{3} = x$$

για κάθε x.

(β) Οι συναρτήσεις

$$f(x) = x \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

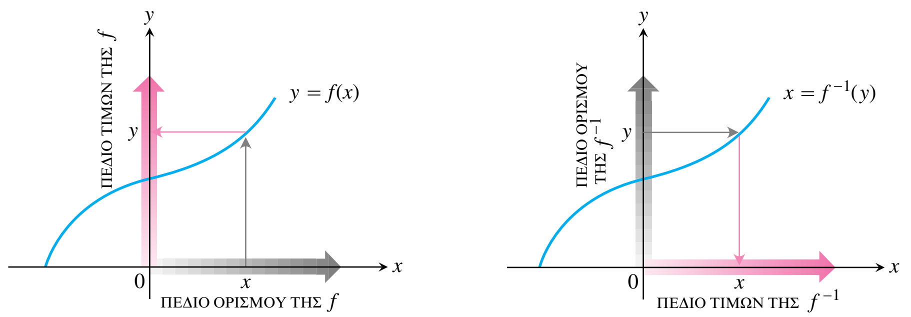
δεν είναι αντίστροφες, διότι

$$f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \neq x.$$

Εύρεση αντίστροφων συναρτήσεων

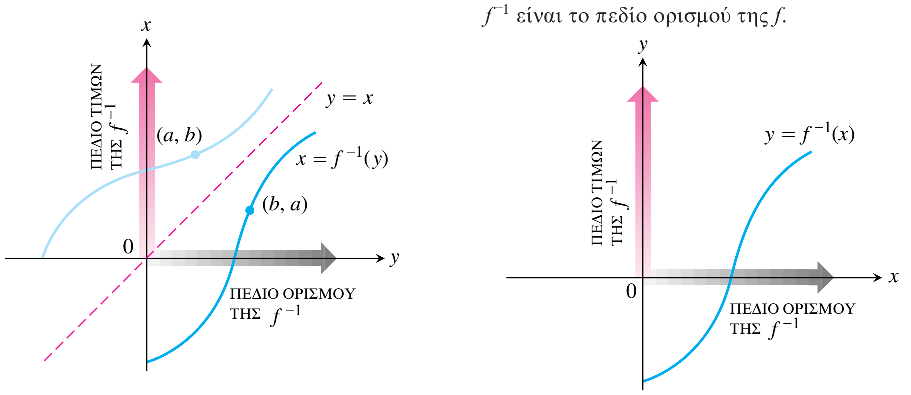
Πώς βρίσκουμε τη γραφική παράσταση της αντίστροφης μιας συναρτήσεως; Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι η συνάρτηση που μας ενδιαφέρει είναι αυτή που έχουμε σχεδιάσει στο Σχήμα 32α. Διαβάζουμε το γράφημα ως εξής: Ξεκινάμε από το σημείο x του άξονα x, κινούμαστε προς τα πάνω μέχρι να συναντήσουμε το γράφημα, και έπειτα κινούμαστε προς τον άξονα y όπου διαβάζουμε την τιμή y. Αν ξεκινήσουμε αντίστροφα, από το y, και ζητούμε να βρούμε το x που του αντιστοιχεί, θα αντιστρέψουμε τη διαδικασία (Σχήμα 32β).

Η γραφική παράσταση της f είναι ταυτόχρονα και η γραφική παράσταση της f^{-1}, αν και σχεδιασμένη με ανορθόδοξο τρόπο, δηλαδή ο οριζόντιος άξονας δεν αποτελεί το πεδίο ορισμού της f^{-1} και ο κατακόρυφος άξονας δεν αποτελεί το πεδίο τιμών της. Για την f^{-1}, τα ζεύγη τιμών εισόδου-εξόδου έχουν αντιστραφεί. Έτσι, για να παρουσιάσουμε το γράφημα της f^{-1} κατά τον συνήθη τρόπο, θα χρειαστεί να αντιστρέψουμε τα ζεύγη (x, y) κατοπτρίζοντας τη γραφική παράσταση πάνω



(α) Για να βρούμε την τιμή της f στο x, ξεκινάμε από το x, κινούμαστε κατακόρυφα ώς την καμπύλη, και κατόπιν οριζόντια ώς τον άξονα y.

(β) Το γράφημα της f είναι γράφημα και της f^{-1}. Για να βρούμε το x που έδωσε το y, ξεκινάμε από το y και κινούμαστε οριζόντια ώς την καμπύλη, και κατόπιν κατακόρυφα ώς τον άξονα x. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το πεδίο τιμών της f. Το πεδίο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της f.



(γ) Για να σχεδιάσουμε την f^{-1} κατά τα συνήθη, κατοπτρίζουμε το σύστημα (καμπύλη και άξονες) πάνω στην ευθεία $y = x$.

(δ) Τέλος, εναλλάσσουμε τα σύμβολα x και y. Τώρα έχουμε μια «κανονική» γραφική παράσταση της f^{-1} έναντι του x.

Σχημα 32 Η γραφική παράσταση της $y = f^{-1}(x)$.

στην ευθεία $y = x$ (Σχήμα 32γ) και να εναλλάξουμε τα σύμβολα x και y (Σχήμα 32δ). Με τον τρόπο αυτόν έχουμε «φέρει» την ανεξάρτητη μεταβλητή, που καλούμε και πάλι x, πάνω στον οριζόντιο άξονα, ενώ την εξαρτημένη μεταβλητή, που καλούμε τώρα y, πάνω στον κατακόρυφο άξονα.

Το γεγονός ότι τα γραφήματα των f και f^{-1} είναι κατοπτρικά είδωλα το ένα του άλλου ως προς την ευθεία $y = x$ είναι αναμενόμενο, αφού τα ζεύγη τιμών εισόδου-εξόδου (a, b) της f έχουν αντιστραφεί έτσι ώστε να παράγουν τα ζεύγη τιμών εισόδου-εξόδου (b, a) της f^{-1}.

Στο Σχήμα 32 φαίνεται πώς μπορούμε να εκφράσουμε αλγεβρικά την f^{-1} ως συνάρτηση του x.

Γράφοντας την f^{-1} ως συνάρτηση του x

Βήμα 1. Λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x (δηλαδή συναρτήσει του y).

Βήμα 2. Εναλλάσσουμε τα x και y. Έτσι καταλήγουμε σε τύπο της μορφής $y = f^{-1}(x)$.

Παράδειγμα 3 Εύρεση αντίστροφης συνάρτησης

Βρείτε την αντίστροφη της $y = \frac{1}{2}x + 1$, και εκφράστε την ως συνάρτηση του x.

Λύση

Βήμα 1: Λύνουμε ως προς x συναρτήσει του y:

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$
$$2y = x + 2$$
$$x = 2y - 2\,.$$

Βήμα 2: Εναλλάσσουμε τα x και y:

$$y = 2x - 2\,.$$

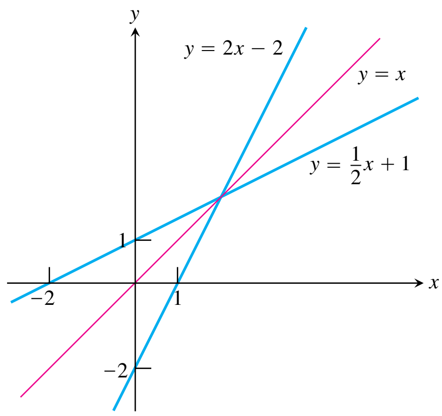
Η αντίστροφη της $f(x) = (1/2)x + 1$ είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x) = 2x - 2$.

Έλεγχος: Για επαλήθευση, ελέγχουμε αν και οι δύο δυνατές συνθέσεις δίνουν την ταυτοτική συνάρτηση:

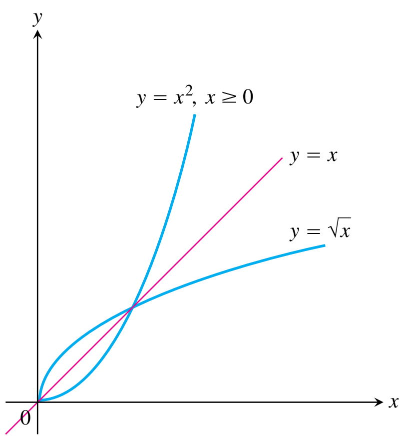
$$f^{-1}(f(x)) = 2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2 = x + 2 - 2 = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}(2x - 2) + 1 = x - 1 + 1 = x.$$

Δείτε το Σχήμα 33.



Σχήμα 33 Σχεδίαση στο ίδιο σχήμα των $f(x) = (1/2)x + 1$ και $f^{-1}(x) = 2x - 2$. Η συμμετρία των δύο γραφημάτων ως προς την ευθεία $y = x$ είναι εμφανής.



Σχήμα 34 Οι συναρτήσεις $y = \sqrt{x}$ και $y = x^2$, $x \geq 0$, είναι αντίστροφες η μία της άλλης. (Παράδειγμα 4)

Παράδειγμα 4 Εύρεση αντίστροφης συνάρτησης

Βρείτε την αντίστροφη της συναρτήσεως $y = x^2$, $x \geq 0$, και εκφράστε την ως συνάρτηση του x.

Λύση

Βήμα 1: Λύνουμε ως προς x συναρτήσει του y:

$$y = x^2$$
$$\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x \qquad |x| = x \text{ εφόσον } x \geq 0$$

Βήμα 2: Εναλλάσσουμε τα x και y:

$$y = \sqrt{x}.$$

Η αντίστροφη της $y = x^2$, $x \geq 0$, είναι η $y = \sqrt{x}$. Δείτε το Σχήμα 34.

Να σημειωθεί ότι, σε αντίθεση με την περιορισμένη συνάρτηση $y = x^2$, $x \geq 0$, η ελεύθερη περιορισμού συνάρτηση $y = x^2$ δεν είναι αμφιμονοσήμαντη και συνεπώς δεν έχει αντίστροφη.

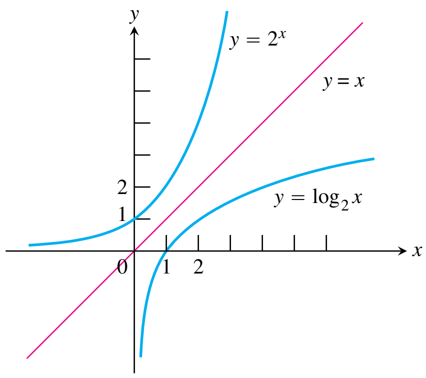
Στην Ενότητα 1.6, θα μάθετε έναν εύχρηστο τρόπο σχεδιασμού της $y = f(x)$ και της $y = f^{-1}(x)$ στο ίδιο σχήμα με τη βοήθεια υπολογιστή.

Λογαριθμικές συναρτήσεις

Αν a είναι τυχών θετικός πραγματικός αριθμός διάφορος της μονάδας, τότε η εκθετική συνάρτηση βάσεως a, $f(x) = a^x$, είναι αμφιμονοσήμαντη. Συνεπώς διαθέτει μια αντίστροφη συνάρτηση. Η αντίστροφη αυτή συνάρτηση καλείται *συνάρτηση λογαρίθμου (ή λογάριθμος) βάσεως a*.

Ορισμός Συνάρτηση λογαρίθμου με βάση a

Η **συνάρτηση λογαρίθμου με βάση *a***, $y = \log_a x$, είναι η αντίστροφη της εκθετικής συναρτήσεως με βάση a, $y = a^x$, (όπου $a > 0$, $a \neq 1$).



Σχημα 35 Η γραφική παράσταση της $2x$ και της αντίστροφής της, $\log_2 x$.

Το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως log$a$ x είναι το διάστημα $(0, \infty)$, δηλαδή συμπίπτει με το πεδίο τιμών της ax. Το πεδίο τιμών της συναρτήσεως log$a$ x είναι το $(-\infty, \infty)$, δηλαδή το πεδίο ορισμού της ax.

Δεδομένου ότι δεν μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $y = ax$ ως προς το x συναρτήσει του y, δεν διαθέτουμε μια αναλυτική έκφραση για τη συνάρτηση του λογαρίθμου. Η γραφική παράσταση της $y =$ log$a$ x, ωστόσο, μπορεί να παραχθεί αν κατοπτρίσουμε το γράφημα της $y = ax$ πάνω στην ευθεία $y = x$ (Σχήμα 35).

Οι λογάριθμοι με βάσεις τους αριθμούς e και 10 βρίσκουν τόσες εφαρμογές που πολλές αριθμομηχανές διαθέτουν ειδικά πλήκτρα για τον άμεσο υπολογισμό τους. Οι συναρτήσεις αυτές έχουν μάλιστα ιδιαίτερο συμβολισμό και ονομασία:

η συνάρτηση $\log_e x$ γράφεται ως $\ln x$.

η συνάρτηση $\log_{10} x$ γράφεται ως $\log x$.

Η συνάρτηση $y = \ln x$ ονομάζεται **συνάρτηση φυσικού λογαρίθμου** (ή **φυσικός λογάριθμος),** ενώ η $y = \log x$ συχνά αποκαλείται και **κοινός λογάριθμος.**

Ιδιότητες των λογαρίθμων

Επειδή οι ax and log$a$ x είναι αντίστροφες, η σύνθεσή τους με οποιαδήποτε διάταξη θα μας δώσει την ταυτοτική συνάρτηση.

Ιδιότητες των αντίστροφων συναρτήσεων ax και log$a$ x

1. Βάση a: $a^{\log_a x} = x$, log$a$ $ax = x$, $a > 0, a \neq 1, x > 0$
2. Βάση e: $e^{\ln x} = x$, $\ln ex = x$, $x > 0$

Οι ιδιότητες αυτές μάς βοηθούν να επιλύουμε εξισώσεις που περιέχουν λογαρίθμους και εκθετικές συναρτήσεις.

Παράδειγμα 5 Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των αντιστρόφων

Λύστε τις εξισώσεις ως προς x: **(α)** $\ln x = 3t + 5$ **(β)** $e^2 x = 10$

Λύση

(α)
$$\ln x = 3t + 5$$
$$e^{\ln x} = e^{3t+5} \quad \text{Παίρνουμε το εκθετικό κάθε μέλους.}$$
$$x = e^{3t+5} \quad \text{Ιδιότητα αντίστροφων συναρτήσεων}$$

(β)
$$e^{2x} = 10$$
$$\ln e^{2x} = \ln 10 \quad \text{Παίρνουμε τον λογάριθμο κάθε μέλους.}$$
$$2x = \ln 10 \quad \text{Ιδιότητα αντίστροφων συναρτήσεων}$$
$$x = \frac{1}{2}\ln 10 \approx 1{,}15$$

Οι λογάριθμοι παρουσιάζουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

Ιδιότητες λογαρίθμων

Για τυχόντες πραγματικούς αριθμούς $x > 0$ και $y > 0$,

1. *Λογάριθμος του γινομένου:* log$a$ $xy =$ log$a$ $x +$ log$a$ y
2. *Λογάριθμος του πηλίκου:* log$a$ $\frac{x}{y} =$ log$a$ $x -$ log$a$ y
3. *Λογάριθμος της δύναμης:* log$a$ $xy = y$ log$a$ x

Αντικαθιστώντας το x με το a^x στην εξίσωση $x = e^{\ln x}$, μπορούμε να ξαναγράψουμε το ax ως δύναμη του e:

$$\begin{aligned} a^x &= e^{\ln(a^x)} && \text{Αντικαθιστούμε το } x \text{ με το } ax \text{ στη σχέση } x = e^{\ln} x \\ &= e^{x \ln a} && \text{Λογάριθμος δύναμης} \\ &= e^{(\ln a)x}. && \text{Αναδιατάσσουμε τον εκθέτη} \end{aligned}$$

Η εκθετική συνάρτηση ax είναι η ίδια με την ekx για $k = \ln a$. Συνηθίζεται να αποφεύγουμε τη χρήση παρενθέσεων στους σχετικούς τύπους.

> Κάθε εκθετική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως η φυσική εκθετική συνάρτηση υψωμένη στην κατάλληλη δύναμη.
>
> $$a^x = e^{x \ln a}$$
>
> Δηλαδή, η ax ταυτίζεται με την ex υψωμένη στη δύναμη $\ln a$.

Παράδειγμα 6 Γράφοντας τα εκθετικά ως δυνάμεις του e

$$2^x = e^{(\ln 2)x} = e^{x \ln 2}$$
$$5^{-3x} = e^{(\ln 5)(-3x)} = e^{-3x \ln 5}$$

Παράδειγμα 7 Επίλυση εξισώσεων με λογαρίθμους

Λύστε τις εξισώσεις ως προς x:

$$3^{\log_3(7)} - 4^{\log_4(2)} = 5^{(\log_5 x - \log_5 x^2)}$$

Λύση

$$\begin{aligned} 3^{\log_3(7)} - 4^{\log_4(2)} &= 5^{(\log_5 x - \log_5 x^2)} && \\ 3^{\log_3(7)} - 4^{\log_4(2)} &= 5^{\log_5(x/x^2)} && \text{Λογάριθμος πηλίκου} \\ 7 - 2 &= \frac{x}{x^2} && \text{Ιδιότητα αντίστροφων συναρτήσεων} \\ 5 &= \frac{1}{x} && \text{Απαλοιφή, αφού } x \neq 0 \\ \frac{1}{5} &= x && \end{aligned}$$

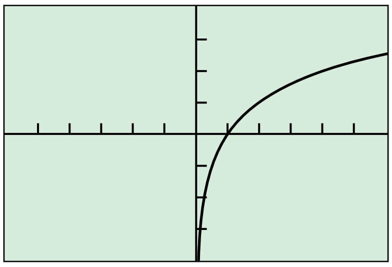
Από τις ιδιότητες των ax και $\log a\, x$, έχουμε

$$\begin{aligned} \ln x &= \ln a^{\log_a x} && \text{Ιδιότητα αντίστροφων συναρτήσεων για τα } ax \text{ και } \log a\, x \\ &= (\log_a x)(\ln a). && \text{Λογάριθμος δύναμης με } y = \log a\, x \end{aligned}$$

Ξαναγράφοντας την τελευταία εξίσωση ως $\log a\, x = (\ln x)/(\ln a)$ συμπεραίνουμε ότι κάθε λογαριθμική συνάρτηση είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο του $\ln x$.

> **Τύπος αλλαγής βάσης**
> Κάθε λογαριθμική συνάρτηση είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο του φυσικού λογαρίθμου.
>
> $$\log a\, x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$$

$y = \dfrac{\ln x}{\ln 2} = \log_2 x$



[–6, 6] επί [–4, 4]

Σχημα 36 Η γραφική παράσταση της $f(x) = \log_2 x$ μπορεί να σχεδιαστεί κάνοντας χρήση του ότι $f(x) = (\ln x)/(\ln 2)$. (Παράδειγμα 8)

Παράδειγμα 8 Σχεδίαση λογαριθμικής συνάρτησης βάσεως *a*

Σχεδιάστε την $f(x) = \log_2 x$.

Λύση Χρησιμοποιούμε τον τύπο αλλαγής βάσεως για να ξαναγράψουμε την $f(x)$.

$$f(x) = \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

Το Σχήμα 36 δείχνει τη γραφική παράσταση.

Εφαρμογές

Στην Ενότητα 3, χρησιμοποιήσαμε γραφικές μεθόδους για να επιλύσουμε προβλήματα εκθετικής αύξησης και μείωσης. Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των λογαρίθμων για να λύσουμε τα ίδια προβλήματα διά της αλγεβρικής οδού.

Παράδειγμα 9 Υπολογισμός χρόνου

Η Σάρα επενδύει 1000 € σε τραπεζικό λογαριασμό που της αποδίδει επιτόκιο 5,25% με ετήσιο ανατοκισμό. Πόσο χρονικό διάστημα απαιτείται για να ανέλθουν οι καταθέσεις της στο ποσό των 2500 €;

Λύση

Μοντέλο

Μετά από t έτη ανατοκισμού, το αρχικό κεφάλαιο έχει γίνει $1000(1{,}0525)t$, κι έτσι χρειάζεται να λύσουμε την εξίσωση

$$1000(1{,}0525)t = 2500\,.$$

Αλγεβρική λύση

$$\begin{aligned}
(1{,}0525)^t &= 2{,}5 && \text{Διαιρούμε με το 1000.}\\
\ln(1{,}0525)^t &= \ln 2{,}5 && \text{Παίρνουμε τον λογάριθμο κάθε μέλους.}\\
t \ln 1{,}0525 &= \ln 2{,}5 && \text{Λογάριθμος δύναμης}\\
t &= \frac{\ln 2{,}5}{\ln 1{,}0525} \approx 17{,}9
\end{aligned}$$

Ερμηνεία

Το αρχικό κεφάλαιο συν τους τόκους θα ανέρχεται στο ποσό των 2500 € μετά από παρέλευση 17,9 ετών, δηλαδή περίπου 17 χρόνια και 11 μήνες από την κατάθεση του αρχικού κεφαλαίου.

Παράδειγμα 10 Σεισμική ένταση

Η ένταση ενός σεισμού καταγράφεται συνήθως στη λογαριθμική κλίμακα Richter. Ο σχετικός τύπος είναι

$$\text{Μέγεθος } R = \log\left(\frac{a}{T}\right) + B\,,$$

όπου a το πλάτος της ταλαντωτικής κίνησης του εδάφους στον σταθμό μετρήσεως και μετριέται σε μικρά (μm), T η περίοδος του σεισμικού κύματος σε δευτερόλεπτα, και B ένας εμπειρικά προσδιοριζόμενος παράγοντας που περιγράφει την εξασθένιση του σεισμικού κύματος καθώς η απόσταση από το επίκεντρο του σεισμού αυξάνεται. Για έναν σεισμό με επίκεντρο που απέχει 10.000 km από τον σταθμό μετρήσεως, $B = 6{,}8$. Αν η καταγραφείσα κατακόρυφη κίνηση του εδάφους είναι $a = 10\ \mu$m και η περίοδος είναι $T = 1$ sec, τότε ο σεισμός έχει μέγεθος

$$R = \log\left(\frac{10}{1}\right) + 6{,}8 = 1 + 6{,}8 = 7{,}8\,.$$

Ένας σεισμός τέτοιου μεγέθους είναι ικανός να προκαλέσει τεράστιες καταστροφές κοντά στο επίκεντρό του.

Τυπικές εντάσεις ήχων

Όριο ακοής	0 db
Θρόισμα φύλλων	10 db
Συνήθης ψίθυρος	20 db
Αθόρυβο αυτοκίνητο	50 db
Συνήθης ομιλία	65 db
Αεροσυμπιεστής (κομπρεσέρ) σε απόσταση 3 μέτρων	90 db
Όριο πόνου	120 db

Παράδειγμα 11 Ένταση ήχου

Ένα άλλο παράδειγμα εφαρμογής των κοινών λογαρίθμων είναι η **κλίμακα ντεσιμπέλ** ή **db** που χρησιμοποιείται στην ηχομέτρηση. Αν I είναι η **ακουστική ένταση** σε Watt ανά τετραγωνικό μέτρο, τότε η αντίστοιχη ηχοστάθμη θα είναι

$$\textbf{ηχοστάθμη} = 10\log\left(I \times 10^{12}\right)\text{ db}\,. \qquad (1)$$

Αν αναρωτηθήκατε ποτέ γιατί όταν διπλασιάζετε την ισχύ του ενισχυτή στο στερεοφωνικό σας η «ηχηρότητα» του ήχου αυξάνεται κατά λίγα μόνο ντεσιμπέλ, η Εξίσωση (1) σας δίνει τώρα την απάντηση.

Ο διπλασιασμός του I στην Εξίσωση (1) επιφέρει αύξηση μόνο κατά 3 db:

$$
\begin{aligned}
\text{Ηχοστάθμη όταν}&\\
\text{διπλασιάζεται το } I &= 10\log\left(2I \times 10^{12}\right) && \text{Εξ. (1) με το } 2I \text{ στη θέση του } I\\
&= 10\log\left(2\cdot I \times 10^{12}\right)\\
&= 10\log 2 + 10\log\left(I \times 10^{12}\right)\\
&= \text{αρχική ηχοστάθμη} + 10\log 2\\
&\approx \text{αρχική ηχοστάθμη} + 3\cdot\log 2 \approx 0{,}30
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 12 Ημιζωή του πολωνίου-210

Η **ημιζωή** (ή **χρόνος ημιζωής**) ενός ραδιενεργού στοιχείου είναι ο χρόνος που απαιτείται για να διασπαστεί η μισή ποσότητα του στοιχείου. Το αξιοσημείωτο γεγονός είναι ότι η ημιζωή αποτελεί σταθερό μέγεθος που δεν εξαρτάται από τον αριθμό των αρχικών ραδιενεργών πυρήνων, αλλά μόνον από τη φύση της ραδιενεργού ουσίας.

Για να δείτε γιατί έχουν έτσι τα πράγματα, έστω y_0 ο αριθμός των ραδιενεργών πυρήνων που υπήρχαν αρχικά στο δείγμα. Ο αριθμός των πυρήνων y που έχουν απομείνει μετά από χρονικό διάστημα t θα ισούται με $y = y_0 e^{-}kt$. Εμείς ζητούμε την τιμή t για την οποία ο αριθμός των ραδιενεργών πυρήνων είναι ακριβώς ο μισός του αρχικού:

$$
\begin{aligned}
y_0 e^{-kt} &= \frac{1}{2}y_0\\
e^{-kt} &= \frac{1}{2}\\
-kt &= \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 && \text{Λογάριθμος πηλίκου και χρήση του ότι } \ln 1 = 0\\
t &= \frac{\ln 2}{k}\,. && (2)
\end{aligned}
$$

Η τιμή αυτή του t είναι η ημιζωή του στοιχείου. Εξαρτάται μόνο από την τιμή του k· το αρχικό πλήθος y_0 δεν παίζει κανένα ρόλο.

Ο χρόνος ημιζωής του πολωνίου-210 είναι τόσο μικρός που τον προσμετράμε σε μέρες αντί για έτη. Ο αριθμός ραδιενεργών ατόμων που έχουν απομείνει μετά από t ημέρες, σε δείγμα που αρχικά περιείχε y_0 ραδιενεργά άτομα, είναι

$$y = y_0 e^{-5\times 10^{-3}t}.$$

Έτσι, η ημιζωή του στοιχείου είναι

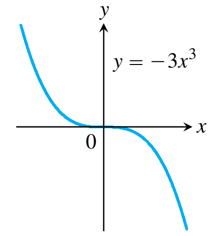
$$\begin{aligned}\text{Ημιζωή} &= \frac{\ln 2}{k} && \text{Εξ. (2)}\\ &= \frac{\ln 2}{5 \times 10^{-3}} && \text{Το } k \text{ της εξίσωσης διασπάσεως του πολωνίου}\\ &\approx 139 \text{ ημέρες.}\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4

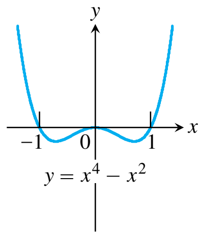
Αναγνώριση αμφιμονοσήμαντων συναρτήσεων από τα γραφήματά τους

Ποιες από τις συναρτήσεις των οποίων τα γραφήματα φαίνονται στις Ασκήσεις 1-6 είναι αμφιμονοσήμαντες και ποιες όχι;

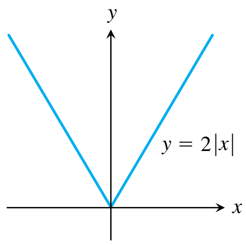
1.



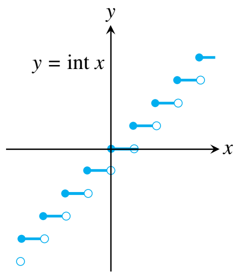
2.



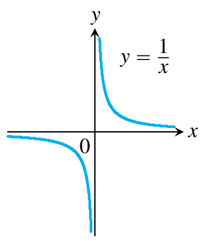
3.



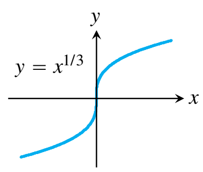
4.



5.



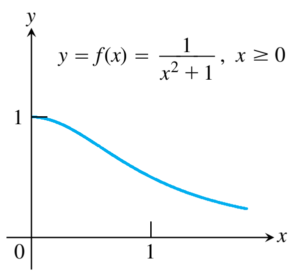
6.



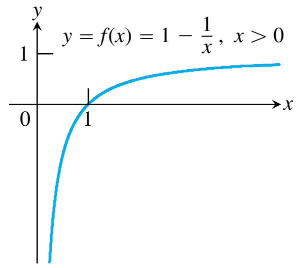
Σχεδίαση αντίστροφων συναρτήσεων

Καθεμία από τις Ασκήσεις 7-10 απεικονίζει το γράφημα μιας συνάρτησης $y = f(x)$. Αντιγράψτε τα γραφήματα αυτά και σχεδιάστε στο καθένα την ευθεία $y = x$. Έπειτα αξιοποιήστε τη συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$ για να προσθέσετε το γράφημα της f^{-1} σε κάθε διάγραμμα. (Δεν είναι απαραίτητο να βρείτε τον μαθηματικό τύπο της f^{-1}.) Προσδιορίστε τα πεδία ορισμού και τιμών της f^{-1}.

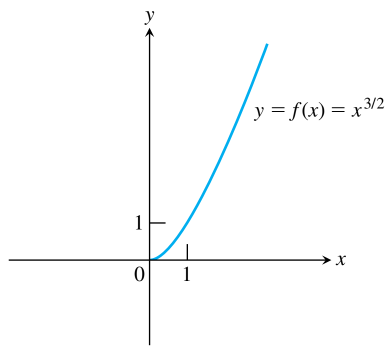
7.



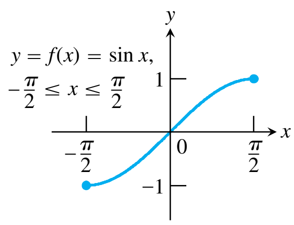
8.



9.



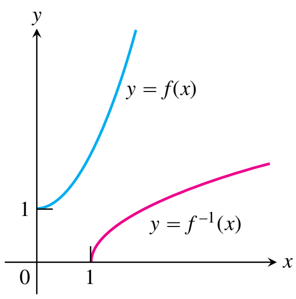
10.



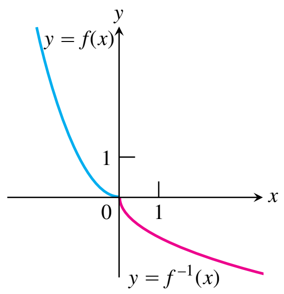
Τύποι αντίστροφων συναρτήσεων

Σε καθεμία από τις Ασκήσεις 11-16 παρέχεται ο τύπος της συνάρτησης $y = f(x)$, καθώς και οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}. Βρείτε έναν τύπο για την f^{-1} σε κάθε περίπτωση.

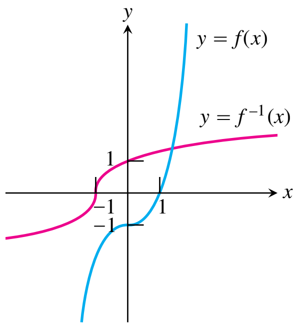
11. $f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$



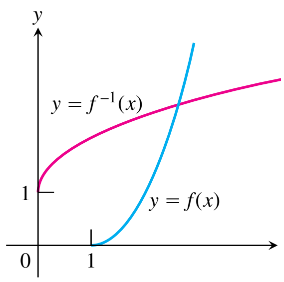
12. $f(x) = x^2, \quad x \le 0$



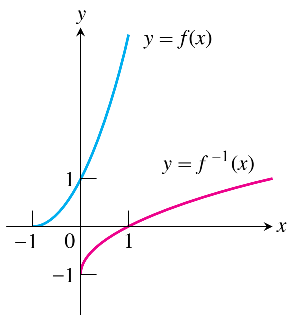
13. $f(x) = x^3 - 1$



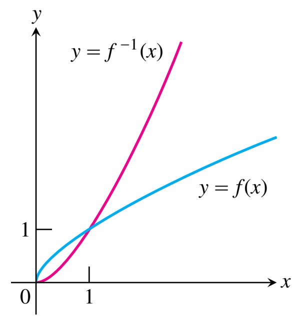
14. $f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad x \ge 1$



15. $f(x) = (x + 1)^2, \quad x \ge -1$



16. $f(x) = x^{2/3}, \quad x \ge 0$



Εύρεση αντίστροφων συναρτήσεων

Στις Ασκήσεις 17-28, βρείτε την f^{-1} και επαληθεύστε ότι

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x\,.$$

17. $f(x) = 2x + 3$

18. $f(x) = 5 - 4x$

19. $f(x) = x^3 - 1$

20. $f(x) = x^2 + 1, \quad x \ge 0$

21. $f(x) = x^2, \quad x \le 0$

22. $f(x) = x^{2/3}, \quad x \ge 0$

23. $f(x) = -(x - 2)^2, \quad x \le 2$

24. $f(x) = x^2 + 2x + 1, \quad x \ge -1$

25. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad x > 0$

26. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

27. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 3}$

28. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$

Αλλαγή βάσης εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων

Στις Ασκήσεις 29 και 30, εκφράστε την εκθετική συνάρτηση ως δύναμη του e. Βρείτε το πεδίο **(α)** ορισμού και **(β)** τιμών.

29. $y = 3x - 1$

30. $y = 4x^{+1}$

Στις Ασκήσεις 31 και 32, εκφράστε κάθε συνάρτηση συναρτήσει του φυσικού λογαρίθμου. Βρείτε το πεδίο **(α)** ορισμού και **(β)** τιμών. **(γ)** Σχεδιάστε πρόχειρα το γράφημα.

31. $y = 1 - (\ln 3) \log_3 x$

32. $y = (\ln 10) \log (x + 2)$

Επίλυση εξισώσεων ως προς τον εκθέτη

Στις Ασκήσεις 33-36, επιλύστε την εξίσωση αλγεβρικά. Αν διαθέτετε υπολογιστή, επιβεβαιώστε τη λύση σας γραφικά.

33. $(1{,}045)t = 2$

34. $e^{0{,}05}t = 3$

35. $ex + e^{-}x = 3$

36. $2x + 2^{-}x = 5$

Επίλυση εξισώσεων που περιέχουν λογαριθμικούς όρους

Στις Ασκήσεις 37 και 38, λύστε ως προς y.

37. $\ln y = 2t + 4$

38. $\ln (y - 1) - \ln 2 = x + \ln x$

Θεωρία και εφαρμογές

39. Βρείτε έναν τύπο για την f^{-1} και επαληθεύστε ότι

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x.$$

(α) $f(x) = \dfrac{100}{1 + 2^{-x}}$ **(β)** $f(x) = \dfrac{50}{1 + 1{,}1^{-x}}$

40. *Αντίστροφες συναρτήσεις* Εδώ προτείνουμε στους φοιτητές να εργαστούν *σε ομάδες των δύο-τριών ατόμων.*

$$\text{Έστω } y = f(x) = mx + b\,, \quad m \ne 0\,.$$

(α) *Μάθετε γράφοντας* Επιχειρηματολογήστε πειστικά για το αμφιμονοσήμαντο της συνάρτησης f.

(β) Βρείτε έναν τύπο για την αντίστροφη της f. Ποια η σχέση μεταξύ των κλίσεων των γραφημάτων των f και f^{-1};

(γ) Αν τα γραφήματα δύο συναρτήσεων είναι παράλληλες ευθείες μη μηδενικής κλίσεως, τι συμπεραίνετε για τα γραφήματα των αντίστροφών τους συναρτήσεων;

(δ) Αν τα γραφήματα δύο συναρτήσεων είναι κάθετες ευθείες μη μηδενικής κλίσεως, τι συμπεραίνετε για τα γραφήματα των αντίστροφών τους συναρτήσεων;

41. *Ραδιενεργός διάσπαση* Η ημιζωή κάποιας ραδιενεργούς ουσίας είναι 12 ώρες. Αρχικά υπάρχουν 8 γραμμάρια της ουσίας.

(α) Βρείτε μια έκφραση για την ποσότητα της ουσίας που έχει απομείνει συναρτήσει του χρόνου t.

(β) Πότε θα έχει απομείνει 1 γραμμάριο;

42. *Διπλασιασμός χρημάτων* Προσδιορίστε τον απαιτούμενο χρόνο διπλασιασμού ενός κεφαλαίου 500 € με επιτόκιο 4,75% και ετήσιο ανατοκισμό.

43. *Πληθυσμιακή αύξηση* Ο πληθυσμός της πόλης Glenbrook είναι 375.000 και αυξάνεται με ετήσιο ρυθμό 2,25%. Κάντε μία πρόβλεψη για το πότε θα φθάσει ο πληθυσμός το 1 εκατομμύριο.

44. *Ενισχυτές στερεοφωνικών* Βρείτε με ποιον παράγοντα k θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί η ένταση I του ήχου στον ενισχυτή του στερεοφωνικού σας, έτσι ώστε να αυξηθεί η ηχοστάθμη του ήχου κατά 10 db.

45. *Ενισχυτές στερεοφωνικών* Δεκαπλασιάσατε την ένταση του ήχου στο στερεοφωνικό σας. Κατά πόσα ντεσιμπέλ αυξήθηκε ο ήχος που ακούτε (δηλ. η ηχοστάθμη);

46. *Ραδόνιο-222* Η εξίσωση διάσπασης του αέριου ραδονίου-222 είναι η $y = y_0 e^{-0,18}t$, όπου t ο χρόνος σε ημέρες. Πόσος περίπου χρόνος θα χρειαστεί για να ελαττωθεί μια ποσότητα αέριου ραδονίου εντός αεροστεγούς δοχείου στο 90% της αρχικής της τιμής;

Επίλυση εξισώσεων και σύγκριση συναρτήσεων

T Στις Ασκήσεις 47-50, χρησιμοποιήστε υπολογιστή για να βρείτε τα σημεία τομής των δύο καμπυλών. Στρογγυλοποιήστε τις απαντήσεις σας σε δύο δεκαδικά ψηφία.

47. $y = 2x - 3, \quad y = 5$

48. $y = -3x + 5, \quad y = -3$

49. **(α)** $y = 2x, \quad y = 3$ **(β)** $y = 2x, \quad y = -1$

50. **(α)** $y = e^{-}x, \quad y = 4$ **(β)** $y = e^{-}x, \quad y = -1$

T Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων των Ασκήσεων 51-54:

(α) Σχεδιάστε την f και την g στο ίδιο σχήμα.

(β) Σχεδιάστε την $f \circ g$.

(γ) Σχεδιάστε την $g \circ f$.

Τι συμπεραίνετε από τα γραφήματα;

51. $f(x) = x^3, \quad g(x) = x^{1/3}$

52. $f(x) = x, \quad g(x) = 1/x$

53. $f(x) = 3x, \quad g(x) = x/3$

54. $f(x) = ex, \quad g(x) = \ln x$

T **55.** *Λογάριθμος γινομένου* Έστω $y_1 = \ln(ax)$, $y_2 = \ln x$, και $y_3 = y_1 - y_2$.

(α) Σχεδιάστε τις συναρτήσεις y_1 και y_2 για $a = 2, 3, 4$, και 5. Ποια σχέση φαίνεται να υπάρχει μεταξύ των γραφημάτων των y_1 και y_2;

(β) Ενισχύστε το παραπάνω συμπέρασμά σας σχεδιάζοντας την y_3.

(γ) Επιβεβαιώστε το συμπέρασμά σας αλγεβρικά.

T **56.** *Λογάριθμος πηλίκου* Έστω $y_1 = \ln(x/a)$, $y_2 = \ln x$, και $y_3 = y_2 - y_1$, και $y_4 = e^{y_3}$.

(α) Σχεδιάστε τις συναρτήσεις y_1 και y_2 για $a = 2, 3, 4$, και 5. Ποια σχέση φαίνεται να υπάρχει μεταξύ των γραφημάτων των y_1 και y_2;

(β) Σχεδιάστε την y_3 για $a = 2, 3, 4$, και 5. Περιγράψτε τα γραφήματα.

(γ) Σχεδιάστε την y_4 για $a = 2, 3, 4$, και 5. Συγκρίνετε τα γραφήματα με αυτό της ευθείας $y = a$.

(δ) Θέστε $e^{y_3} = e^{y_2 - y_1} = a$ και λύστε ως προς y_1.

T **57.** Η εξίσωση $x^2 = 2x$ έχει τρεις λύσεις: $x = 2$, $x = 4$, και άλλη μία. Με γραφικές μεθόδους προβείτε σε μια όσο το δυνατόν καλύτερη εκτίμηση της τρίτης αυτής λύσεως.

T **58.** Θα μπορούσε ο αριθμός $x^{\ln 2}$ να ισούται με τον $2^{\ln} x$ για $x > 0$; Σχεδιάστε τις δύο συναρτήσεις και περιγράψτε τι βλέπετε.

Λογαριθμική παλινδρομική ανάλυση: πετρελαϊκή παραγωγή

Δείτε τη σελ. 5 για μια εισαγωγή στην παλινδρομική ανάλυση με χρήση υπολογιστή.

T **59.** *Πετρελαϊκή παραγωγή Ινδονησίας* Ο Πίνακας 15 δείχνει την παραγωγή πετρελαίου της Ινδονησίας σε τρία διαφορετικά έτη.

Πίνακας 15 Πετρελαϊκή παραγωγή Ινδονησίας

Έτος	Τόνοι (εκατομμύρια)
1960	20,56
1970	42,10
1990	70,10

Πηγή: Statesman's Yearbook, 129th ed. (London: The Macmillan Press, Ltd., 1992).

(α) Με τη βοήθεια υπολογιστή βρείτε μια παλινδρομική εξίσωση φυσικού λογαρίθμου $y = a + b \ln x$ για τα δεδομένα του Πίνακα 15. Χρησιμοποιήστε την εξίσωση αυτή για να εκτιμήσετε την ποσότητα πετρελαίου που παρήγαγε η Ινδονησία μεταξύ του 1982 και του 2000. Για ευκολία, αντιστοιχίστε την τιμή $x = 60$ στο έτος 1960, την τιμή $x = 70$ στο 1970, κ.ο.κ.

(β) Τοποθετήστε σε ενιαίο σχήμα το γράφημα της εξίσωσης παλινδρόμησης και το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

(γ) Χρησιμοποιήστε τη γραφική παράσταση της εξίσωσης παλινδρόμησης για να προβλέψετε την πετρελαϊκή παραγωγή της Ινδονησίας τα έτη 1982 και 2000.

T **60.** *Πετρελαϊκή παραγωγή Σαουδικής Αραβίας*

(α) Βρείτε μια παλινδρομική εξίσωση φυσικού λογαρίθμου για τα δεδομένα του Πίνακα 16.

(β) Εκτιμήστε την ποσότητα πετρελαίου που παρήγαγε η Σαουδική Αραβία το 1975.

(γ) Κάντε μία πρόβλεψη για το πότε θα ξεπεράσει η πετρελαϊκή παραγωγή της Σαουδικής Αραβίας το όριο των 400 εκατομμυρίων τόνων.

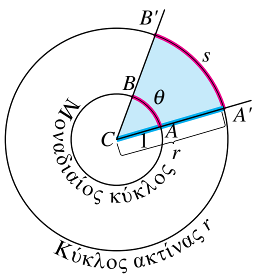
Πίνακας 16 Πετρελαϊκή παραγωγή Σαουδικής Αραβίας

Έτος	Τόνοι (εκατομμύρια)
1960	61,09
1970	176,85
1990	321,93

Πηγή: The Statesman's Yearbook, 129th ed. (London: The Macmillan Press, Ltd., 1992).

5 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους

Ακτινιακό μέτρο • Γραφικές παραστάσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων • Τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων • Περιοδικότητα • Άρτιες και περιττές τριγωνομετρικές συναρτήσεις • Μετασχηματισμοί γραφημάτων τριγωνομετρικών συναρτήσεων • Ταυτότητες • Ο νόμος των συνημιτόνων • Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις • Ταυτότητες τόξου ημιτόνου και τόξου συνημιτόνου



Σχημα 37 Το ακτινιακό μέτρο της γωνίας ACB είναι το μήκος θ του τόξου AB του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο C. Το θ ωστόσο μπορεί να υπολογιστεί σε οποιονδήποτε άλλο κύκλο, ως το πηλίκο s/r.

Στην ενότητα αυτή συνοψίζουμε τις κυριότερες τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις αντίστροφές τους. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις αποκτούν σπουδαιότητα διότι είναι περιοδικές, δηλαδή επαναλαμβανόμενες. Έτσι μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μοντέλα πολλών περιοδικών διεργασιών στη φύση, όπως οι καθημερινές θερμοκρασιακές διακυμάνσεις στην ατμόσφαιρα της Γης, η κυματική φύση των μουσικών φθόγγων, η αρτηριακή πίεση του αίματος στην καρδιά, ή η κυμαινόμενη στάθμη της θάλασσας κατά την παλίρροια και την άμπωτη.

Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις προκύπτουν όταν ζητούμε να υπολογίσουμε γωνίες τριγώνων των οποίων γνωρίζουμε τις πλευρές. Η χρησιμότητα των συναρτήσεων αυτών θα καταστεί προφανής στα Κεφάλαια 6 και 7.

Τύποι μετατροπής

1 μοίρα $= \frac{\pi}{180} (\approx 0{,}02)$ ακτίνια (radians)

Μοίρες σε ακτίνια: πολλαπλασιάζουμε με $\frac{\pi}{180}$

1 ακτίνιο $= \frac{180}{\pi} (\approx 57)$ μοίρες (degrees)

Ακτίνια σε μοίρες: πολλαπλασιάζουμε με $\frac{180}{\pi}$

Ακτινιακό μέτρο

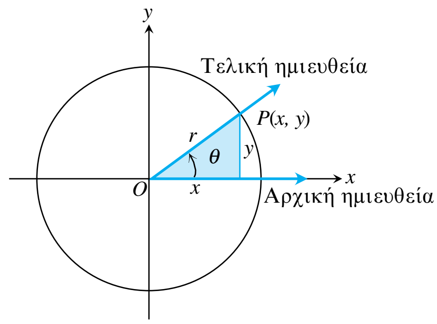
Το **ακτινιακό μέτρο** της γωνίας ACB του μοναδιαίου κύκλου (Σχήμα 37) ισούται με το μήκος του τόξου που η γωνία ACB «αποκόβει» από τον μοναδιαίο κύκλο.

Όταν μια γωνία (ακτινιακού) μέτρου θ τοποθετείται στη λεγόμενη *κανονική θέση* (δηλαδή έχει κορυφή το κέντρο κύκλου ακτίνας r και προσανατολισμό που φαίνεται στο Σχήμα 38), τότε οι έξι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις με όρισμα τη γωνία θ ορίζονται ως ακολούθως:

sine: $\sin\theta = \frac{y}{r}$ **cosecant:** $\csc\theta = \frac{r}{y}$

cosine: $\cos\theta = \frac{x}{r}$ **secant:** $\sec\theta = \frac{r}{x}$

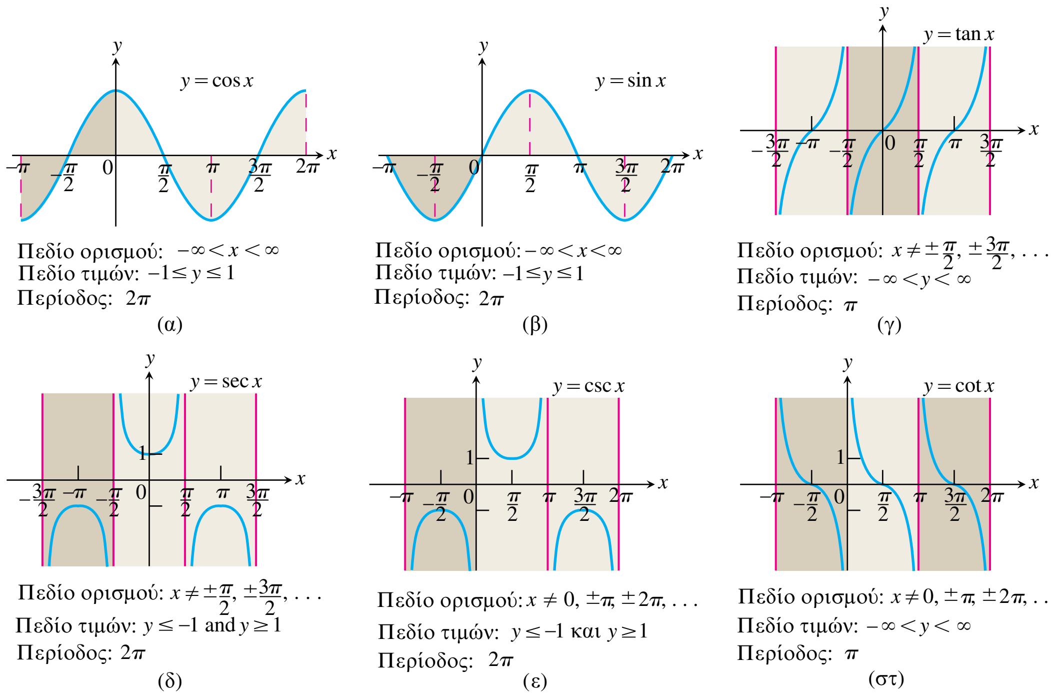
tangent: $\tan\theta = \frac{y}{x}$ **cotangent:** $\cot\theta = \frac{x}{y}$



Σχημα 38 Η γωνία θ στην κανονική της θέση.

Γραφικές παραστάσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Όταν σχεδιάζουμε τριγωνομετρικές συναρτήσεις στο επίπεδο, συνηθίζεται να δηλώνουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή (δηλ. τα ακτίνια) με το σύμβολο x αντί του θ (Σχήμα 39).



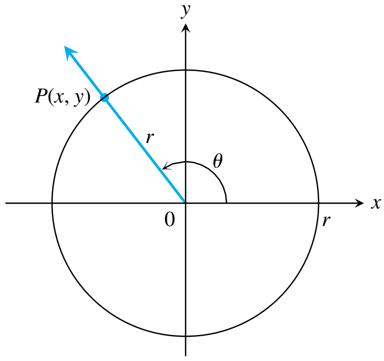
Σχημα 39 Γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων (α) συνημιτόνου, (β) ημιτόνου, (γ) εφαπτομένης, (δ) τέμνουσας, (ε) συντέμνουσας, και (στ) συνεφαπτομένης, έναντι του ακτινιακού μέτρου.

Τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

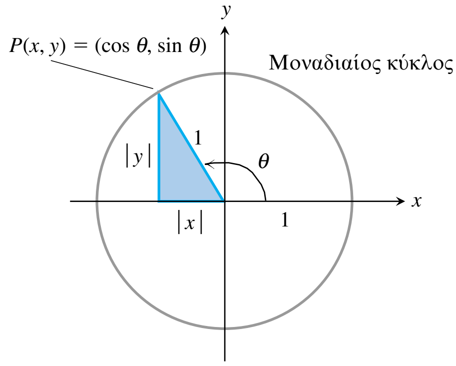
Αν ο κύκλος στο Σχήμα 40 έχει ακτίνα $r = 1$, τότε οι εξισώσεις που ορίζουν τα $\sin\theta$ και $\cos\theta$ γίνονται

$$\cos\theta = x, \qquad \sin\theta = y.$$

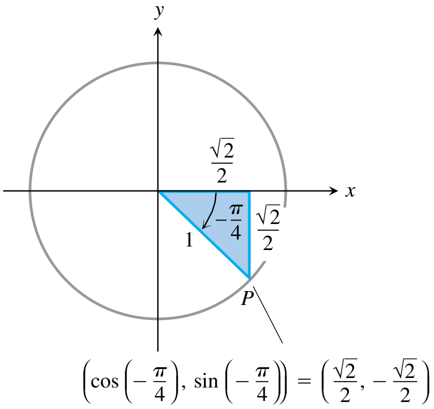
Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές του συνημιτόνου και του ημιτόνου άμεσα, από τις συντεταγμένες του σημείου P, αν τις γνωρίζουμε, ή έμμεσα, από το οξυγώνιο τρίγωνο αναφοράς που σχηματίζεται φέρνοντας από το P την κάθετο στον άξονα x (Σχήμα 41). Διαβάζουμε τα μέτρα των x και y από τις πλευρές του τριγώνου. Οι αλγεβρικές τιμές των x και y καθορίζονται από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται το τρίγωνο.



Σχημα 40 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις μιας γενικής γωνίας θ ορίζονται συναρτήσει των x, y, και r.



Σχημα 41 Το οξυγώνιο τρίγωνο αναφοράς για τη γωνία θ.



Σχημα 42 Από το τρίγωνο του σχήματος υπολογίζουμε το ημίτονο και το συνημίτονο γωνίας $-\pi/4$ ακτινίων. (Παράδειγμα 1)

Παράδειγμα 1 Εύρεση τιμών ημιτόνου και συνημιτόνου

Βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο των $-\pi/4$ ακτινίων.

Λύση

Βήμα 1: Σχεδιάζουμε τη γωνία στην κανονική θέση στον μοναδιαίο κύκλο και σημειώνουμε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου αναφοράς (Σχήμα 42).

Βήμα 2: Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου P στο οποίο η τελική ημιευθεία της γωνίας τέμνει τον κύκλο:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \text{συντεταγμένη } x \text{ του } P = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \text{συντεταγμένη } y \text{ του } P = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Με παρόμοιους υπολογισμούς συμπληρώνουμε τον Πίνακα 17. Τα περισσότερα κομπιουτεράκια επιτρέπουν τον άμεσο υπολογισμό τιμών των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, είτε σε ακτίνια είτε σε μοίρες.

Πίνακας 17 Τιμές των συναρτήσεων $\sin\theta$, $\cos\theta$, και $\tan\theta$ για επιλεγμένες γωνίες θ

Μοίρες	**−180**	**−135**	**−90**	**−45**	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**135**	**180**
θ (ακτίνια)	$-\pi$	$-3\pi/4$	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$\sin\theta$	0	$-\sqrt{2}/2$	−1	$-\sqrt{2}/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0
$\cos\theta$	−1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	−1
$\tan\theta$	0	1		−1	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$		−1	0

Περιοδικότητα

Όταν δύο γωνίες μέτρου θ και $\theta + 2\pi$, αντίστοιχα, βρίσκονται στην κανονική θέση, οι τελικές τους ημιευθείες συμπίπτουν. Έτσι, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις των δύο γωνιών έχουν τις ίδιες τιμές:

$$\begin{array}{lll} \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta & \sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta & \tan(\theta + 2\pi) = \tan\theta \\ \sec(\theta + 2\pi) = \sec\theta & \csc(\theta + 2\pi) = \csc\theta & \cot(\theta + 2\pi) = \cot\theta \end{array} \qquad (1)$$

Ομοίως, $\cos(\theta - 2\pi) = \cos\theta$, $\sin(\theta - 2\pi) = \sin\theta$, κ.ο.κ.

Παρατηρούμε ότι οι τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επαναλαμβάνονται κατά τακτά διαστήματα. Περιγράφουμε τη συμπεριφορά αυ-

Περίοδοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Περίοδος π: $\tan(x+\pi)=\tan x$
$\cot(x+\pi)=\cot x$

Περίοδος 2π: $\sin(x+2\pi)=\sin x$
$\cos(x+2\pi)=\cos x$
$\sec(x+2\pi)=\sec x$
$\csc(x+2\pi)=\csc x$

Σχημα 43 Η οθόνη της συσκευής δείχνει την περιοδική φύση μερικών ζωτικών λειτουργιών του ανθρώπινου οργανισμού. Η ηλεκτρονική αυτή διάταξη εποπτεύει δυναμικά (δηλ. διαρκώς) το ηλεκτροκαρδιογράφημα (ECG), την αναπνοή, και την πίεση του ασθενούς.

τή λέγοντας ότι οι έξι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι *περιοδικές*.

Ορισμός **Περιοδική συνάρτηση, περίοδος**
Μία συνάρτηση $f(x)$ είναι **περιοδική** εφόσον υπάρχει θετικός αριθμός p τέτοιος ώστε $f(x+p)=f(x)$ για κάθε x. Η μικρότερη δυνατή τιμή του p είναι η **περίοδος** της f.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 39, οι συναρτήσεις $\cos x$, $\sin x$, $\sec x$, και $\csc x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π. Οι συναρτήσεις $\tan x$ και $\cot x$ είναι περιοδικές με περίοδο π.

Η σπουδαιότητα των περιοδικών συναρτήσεων έγκειται στο γεγονός ότι πολλά φαινόμενα του κόσμου γύρω μας τα οποία μελετούν οι φυσικές επιστήμες παρουσιάζουν περιοδική συμπεριφορά. (Σχήμα 43). Τα εγκεφαλικά κύματα, η λειτουργία της καρδιάς, και το ηλεκτρικό ρεύμα που έχουμε στα σπίτια μας είναι όλα περιοδικά φαινόμενα. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που θερμαίνει το φαγητό στον φούρνο μικροκυμάτων είναι περιοδικό, όπως επίσης οι εισπράξεις των εποχικών επιχειρήσεων, ή η λειτουργία των περιστροφικών μηχανών. Οι εποχές του έτους είναι περιοδικές, το ίδιο και ο καιρός. Επίσης, οι διάφορες φάσεις της σελήνης, καθώς και οι κινήσεις των πλανητών. Υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις ότι οι παγετώδεις περίοδοι είναι περιοδικές, με περίοδο 90.000 έως 100.000 ετών.

Όμως, γιατί αποβαίνουν τόσο χρήσιμες οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις στη μελέτη των περιοδικών φαινομένων; Η απάντηση έρχεται από ένα απρόσμενο και όμορφο θεώρημα του προχωρημένου απειροστικού λογισμού, σύμφωνα με το οποίο κάθε περιοδική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως ένας αλγεβρικός συνδυασμός ημιτόνων και συνημιτόνων. Έτσι, μόλις κατανοήσουμε τον απειροστικό λογισμό των ημιτόνων και συνημιτόνων, θα είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε μαθηματικά μοντέλα για τη συμπεριφορά των περισσότερων περιοδικών φαινομένων.

Άρτιες και περιττές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

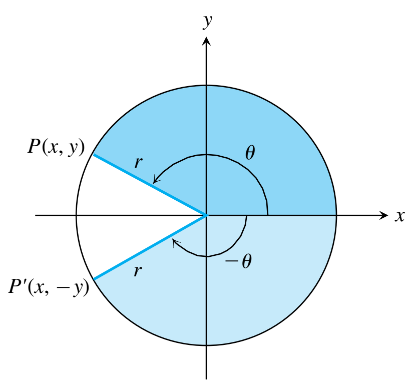
Όπως φαίνεται από το Σχήμα 39, οι συναρτήσεις $\cos x$ και $\sec x$ είναι άρτιες, αφού οι γραφικές τους παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y. Οι υπόλοιπες τέσσερις βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι περιττές.

Παράδειγμα 2 Επαλήθευση άρτιου και περιττού χαρακτήρα

Δείξτε ότι το συνημίτονο είναι συνάρτηση άρτια, ενώ το ημίτονο περιττή.

Λύση Από το Σχήμα 44, έπεται ότι

$$\cos(-\theta)=\frac{x}{r}=\cos\theta, \qquad \sin(-\theta)=\frac{-y}{r}=-\sin\theta,$$



Σχημα 44 Αντίθετες γωνίες. (Παράδειγμα 2)

που σημαίνει ότι το μεν συνημίτονο είναι άρτια συνάρτηση, το δε ημίτονο περιττή.

Χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα του Παραδείγματος 2, μπορούμε να αποφανθούμε για την *ισοτιμία* των υπόλοιπων τεσσάρων βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Για παράδειγμα,

$$\sec(-\theta) = \frac{1}{\cos(-\theta)} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta,$$
$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta,$$

κι έτσι η τέμνουσα είναι άρτια συνάρτηση, ενώ η εφαπτομένη περιττή. Με παρόμοιους συλλογισμούς μπορούμε να δείξουμε ότι η συντέμνουσα και η συνεφαπτομένη είναι περιττές συναρτήσεις.

Μετασχηματισμοί γραφημάτων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Οι ίδιοι κανόνες που μας επιτρέπουν να μετατοπίζουμε, να επιμηκύνουμε, να συρρικνώνουμε, και να κατοπτρίζουμε το γράφημα μιας τυχούσας συναρτήσεως, ισχύουν και για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις ειδικότερα. Το ακόλουθο διάγραμμα θα σας βοηθήσει να θυμάστε τον ρόλο κάθε παραμέτρου σε καθεμία από τις διεργασίες αυτές.

Κατακόρυφη επιμήκυνση ή συρρίκνωση· κατοπτρισμός στον άξονα x

Κατακόρυφη μετατόπιση

$$y = af(b(x + c)) + d$$

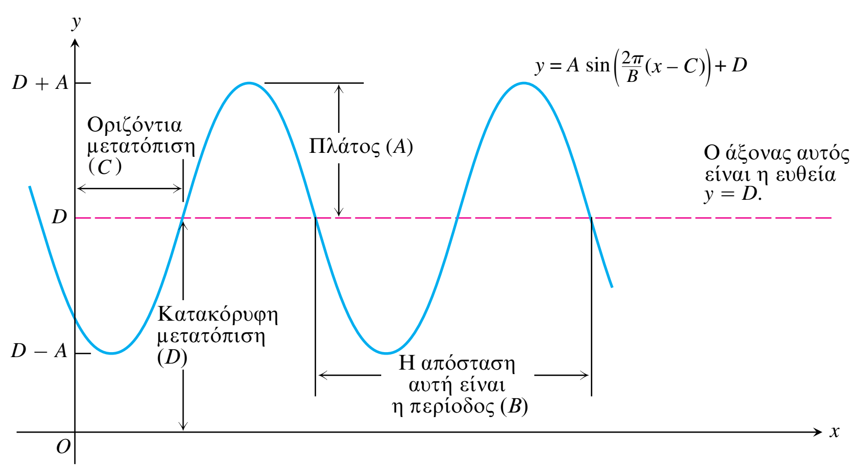
Οριζόντια επιμήκυνση ή συρρίκνωση· κατοπτρισμός στον άξονα y

Οριζόντια μετατόπιση

Παράδειγμα 3 Μοντέλο της θερμοκρασίας στην Αλάσκα

Οι κατασκευαστές του τεράστιου αγωγού που διασχίζει την Αλάσκα χρησιμοποίησαν θερμομονωτική επένδυση για να αποφύγουν το ενδεχόμενο να λειώσει το μόνιμα παγωμένο έδαφος λόγω μεταφοράς θερμότητας σε αυτό από τον αγωγό. Κατά τον σχεδιασμό της μονωτικής επενδύσεως, τους ήταν απαραίτητο να γνωρίζουν τη διακύμανση της θερμοκρασίας του ατμοσφαιρικού αέρα στη διάρκεια ενός έτους. Στους υπολογισμούς τους αποφάσισαν να παραστήσουν τη διακύμανση αυτή με μία συνάρτηση ημιτόνου (ή **ημιτονοειδή**) της μορφής

$$f(x) = A\sin\left[\frac{2\pi}{B}(x - C)\right] + D, \tag{2}$$



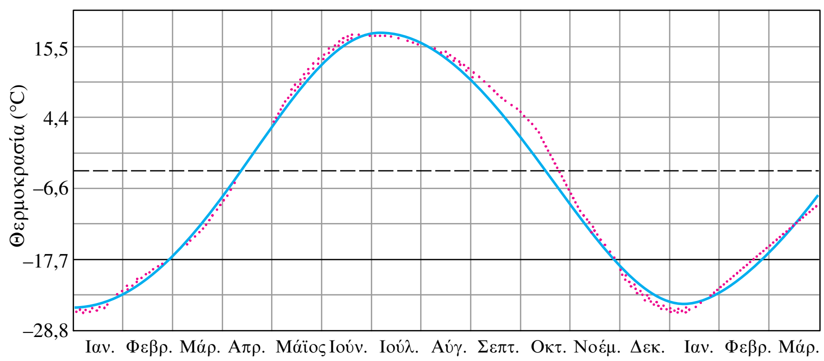
Σχήμα 45 Η γενική ημιτονοειδής καμπύλη $y = A\sin[(2\pi/B)(x - C)] + D$, για θετικές τιμές των A, B, C, και D. (Παράδειγμα 3)

όπου $|A|$ είναι το *πλάτος*, $|B|$ η *περίοδος*, C η *οριζόντια μετατόπιση*, και D η *κατακόρυφη μετατόπιση* της καμπύλης (Σχήμα 45).

Το Σχήμα 46 δείχνει πώς με μια τέτοια συνάρτηση μπορούμε να παραστήσουμε τη μετρώμενη θερμοκρασία. Κάθε κουκκίδα στο σχήμα παριστάνει τη μέση ημερήσια θερμοκρασία του αέρα στην τοποθεσία Fairbanks της Αλάσκας, βάσει μετρήσεων της Εθνικής Μετεωρολογικής Υπηρεσίας των Η.Π.Α. μεταξύ 1941 και 1970. Η ημιτονοειδής συνάρτηση που χρησιμοποιήθηκε για να προσεγγίσει όσο το δυνατόν καλύτερα τα πειραματικά δεδομένα είναι η

$$f(x) = 20{,}5 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right] - 3{,}8,$$

όπου f είναι η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου, και x είναι ο αύξων αριθμός των ημερών, λαμβάνοντας ως αφετηρία την πρώτη ημέρα του έτους. Όπως βλέπετε, η ημιτονοειδής καμπύλη ταιριάζει εξαιρετικά καλά στο διάκριτο γράφημα των μετρήσεων.*



Πηγή: «Is the Curve of Temperature Variation a Sine Curve?” by B. M. Lando and C. A. Lando, *The Mathematics Teacher*, Vol. 7, No. 6 (September 1977), Fig. 2, p. 53.

Σχημα 46 Μέση θερμοκρασία αέρα από μετρήσεις στο Fairbanks της Αλάσκας (κόκκινες κουκκίδες). Σε μπλε χρώμα έχει σχεδιαστεί η ημιτονοειδής συνάρτηση που προσεγγίζει τα πειραματικά δεδομένα, $f(x) = 20{,}5 \sin[(2\pi/365)(x - 101)] - 3{,}8$.

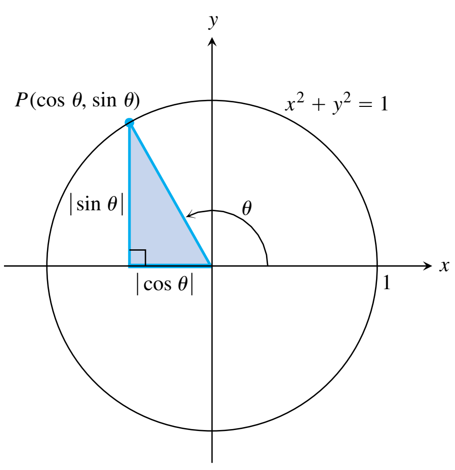
*Σ.τ.Μ. Μετατρέψαμε τις θερμοκρασίες από °F που είναι στο πρωτότυπο, σε °C. Αυτός είναι και ο λόγος των δεκαδικών θερμοκρασιών του Σχ. 46. Στο πρωτότυπο, ο κατακόρυφος άξονας έχει βαθμονομηθεί ανά 20 °F, ξεκινώντας από τους –20 °F, ενώ η προσεγγιστική συνάρτηση είναι

$f(x) = 37\cdot \sin[(2\pi/365)(x - 101)] + 25$.

Ταυτότητες

Αν εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο αναφοράς το οποίο προκύπτει φέρνοντας την κάθετο στον άξονα x από το σημείο $P(\cos\theta, \sin\theta)$ του μοναδιαίου κύκλου (Σχήμα 47), τότε

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1. \qquad (3)$$



Σχημα 47 Το τρίγωνο αναφοράς για μια γενική γωνία θ.

Η εξίσωση αυτή, που αληθεύει για κάθε θ, χρησιμοποιείται συχνότερα από κάθε άλλη τριγωνομετρική ταυτότητα. Διαιρώντας την κατά σειρά με $\cos^2\theta$ και $\sin^2\theta$ παίρνουμε

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta,$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta.$$

Οι παρακάτω τύποι αληθεύουν για τυχούσες γωνίες A και B.

Όλες οι τριγωνομετρικές ταυτότητες που θα σας χρειαστούν στο βιβλίο αυτό προκύπτουν από τις Εξισώσεις (3) και (4).

Τύποι αθροίσματος γωνιών

$$\begin{aligned}\cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B\\ \sin(A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B\end{aligned} \tag{4}$$

Αν τώρα θέσουμε όπου A και B την ίδια γωνία θ, εξάγουμε άλλες δύο χρήσιμες ταυτότητες.

Αντί να αποστηθίσετε τις Εξισώσεις (5), είναι προτιμότερο να θυμάστε τις γενικότερες Εξισώσεις (4).

Τύποι διπλών γωνιών

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\\ \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta\end{aligned} \tag{5}$$

Ο νόμος των συνημιτόνων

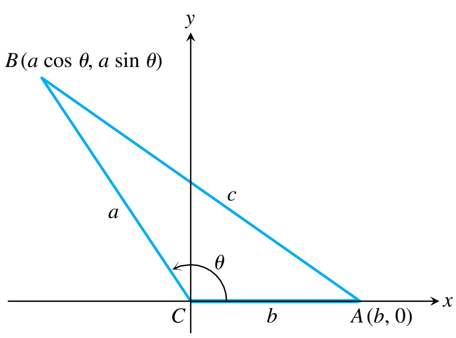
Αν a, b, και c είναι οι πλευρές ενός τριγώνου ABC, και θ είναι η γωνία απέναντι από την πλευρά c, τότε

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta. \tag{6}$$

Η εξίσωση αυτή καλείται **νόμος των συνημιτόνων**.

Μπορούμε αμέσως να πεισθούμε για την ισχύ του νόμου αυτού αν τοποθετήσουμε την κορυφή C στην αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων, ενώ ο άξονας x διατρέχει τη μία πλευρά του τριγώνου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 48. Οι συντεταγμένες του A γίνονται τότε $(b, 0)$, ενώ αυτές του B είναι $(a\cos\theta, a\sin\theta)$. Το τετράγωνο της απόστασης μεταξύ των A και B ισούται με

$$\begin{aligned}c^2 &= (a\cos\theta - b)^2 + (a\sin\theta)^2\\ &= a^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} + b^2 - 2ab\cos\theta\\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.\end{aligned}$$



Σχημα 48 Εκφράζοντας το τετράγωνο της απόστασης μεταξύ των A και B καταλήγουμε στον νόμο των συνημιτόνων.

Έτσι, ο νόμος των συνημιτόνων γενικεύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Αν $\theta = \pi/2$, τότε $\cos\theta = 0$ και $c^2 = a^2 + b^2$.

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

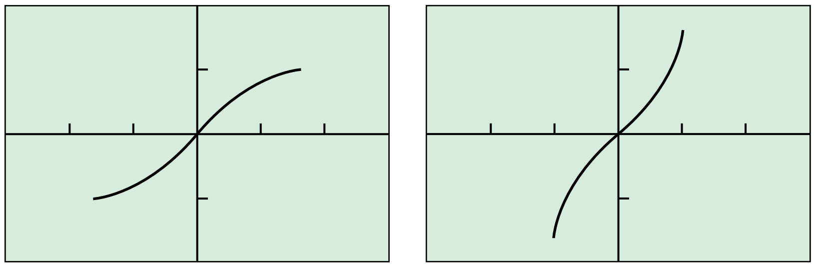
Καμία από τις έξι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις του Σχήματος 39 δεν είναι αμφιμονοσήμαντη. Οι συναρτήσεις αυτές δεν έχουν αντίστροφες. Ωστόσο, περιορίζοντας το πεδίο ορισμού καθεμίας από αυτές, μπορούμε να παραγάγουμε νέες αντιστρέψιμες συναρτήσεις, όπως γίνεται φανερό στο Παράδειγμα 4.

Παράδειγμα 4 Περιορισμός του πεδίου ορισμού του ημιτόνου

Δείξτε ότι η συνάρτηση $y = \sin x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, είναι αμφιμονοσήμαντη, και σχεδιάστε την αντίστροφή της.

Λύση Το Σχήμα 49α δείχνει τη γραφική παράσταση της περιορισμένης συνάρτησης ημιτόνου. Η συνάρτηση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη, εφόσον δεν επαναλαμβάνει καμία από τις τιμές εξόδου της. Συνεπώς υπάρχει η αντίστροφή της, την οποία σχεδιάσαμε στο Σχήμα 49β, εναλλάσσοντας τα διατεταγμένα ζεύγη, σύμφωνα με την Ενότητα 4.

$x = t,\ y = \sin t,\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ $x = \sin t,\ y = t,\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$



[–3, 3] επί [–2, 2] [–3, 3] επί [–2, 2]

(α) (β)

Σχημα 49 (α) Μια περιορισμένη ημιτονοειδής συνάρτηση και (β) η αντίστροφή της. Τα γραφήματα αυτά παρήχθησαν με παραμετρική σχεδίαση σε υπολογιστή. Δείτε την Ενότητα 6 για μια επισκόπηση των παραμετρικών συναρτήσεων. (Παράδειγμα 4)

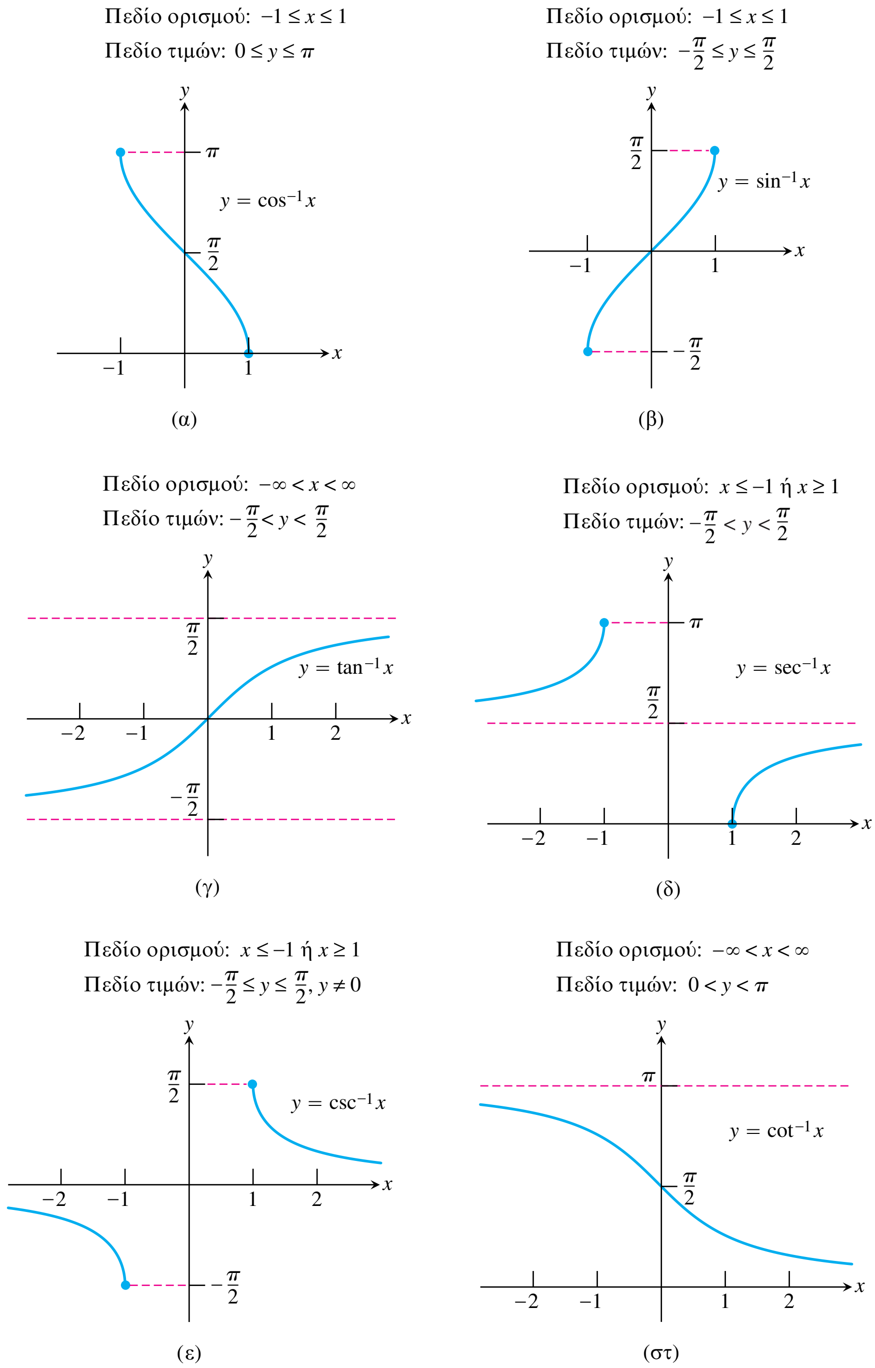
Η αντίστροφη της περιορισμένης συνάρτησης του ημιτόνου του Παραδείγματος 4 καλείται *συνάρτηση αντίστροφου ημιτόνου*. Το αντίστροφο ημίτονο x είναι η γωνία εντός του διαστήματος $[-\pi/2, \pi/2]$ της οποίας το ημίτονο ισούται με x. Συμβολίζεται με $\sin^{-1} x$ ή $\arcsin x$. Αμφότεροι οι συμβολισμοί αυτοί διαβάζονται «τόξο ημιτόνου x» ή «αντίστροφο ημίτονο x».

Τα πεδία ορισμού των υπόλοιπων βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων μπορούν επίσης να περιοριστούν προκειμένου να καταστεί δυνατή η ύπαρξη των αντιστρόφων τους. Στην περίπτωση αυτή τα πεδία ορισμού και τιμών των αντίστροφων συναρτήσεων αποτελούν τμήμα του ορισμού τους.

Ορισμοί Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Συνάρτηση	Πεδίο ορισμού	Πεδίο τιμών
$y = \cos^{-1} x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \sin^{-1} x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \tan^{-1} x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \sec^{-1} x$	$\lvert x \rvert \geq 1$	$0 \leq y \leq \pi, \quad y \neq \frac{\pi}{2}$
$y = \csc^{-1} x$	$\lvert x \rvert \geq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad y \neq 0$
$y = \cot^{-1} x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$

Οι γραφικές παραστάσεις των έξι αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων φαίνονται στο Σχήμα 50.



Σχημα 50 Γραφικές παραστάσεις των (α) $y = \cos^{-1} x$, (β) $y = \sin^{-1} x$, (γ) $y = \tan^{-1} x$, (δ) $y = \sec^{-1} x$, (ε) $y = \csc^{-1} x$, και (στ) $y = \cot^{-1} x$.

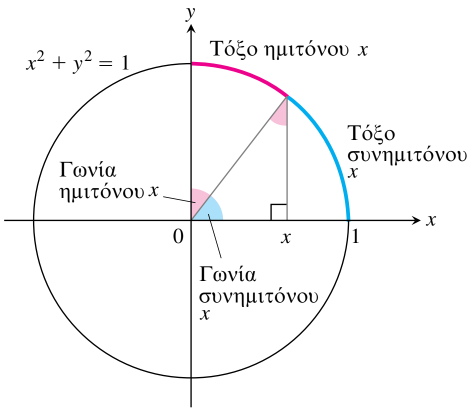
Τα πεδία ορισμού και τιμών των αντίστροφων συναρτήσεων επιλέγονται (όπου αυτό είναι απαραίτητο) έτσι ώστε να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις μεταξύ των συναρτήσεων:

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x),$$
$$\csc^{-1} x = \sin^{-1}(1/x),$$
$$\cot^{-1} x = \pi/2 - \tan^{-1} x.$$

Όταν το κομπιουτεράκι μας διαθέτει πλήκτρα άμεσου υπολογισμού μόνο για τις συναρτήσεις $\cos^{-1} x$, $\sin^{-1} x$, και $\tan^{-1} x$, τότε από τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε τις τιμές των $\sec^{-1} x$, $\csc^{-1} x$, και $\cot^{-1} x$.

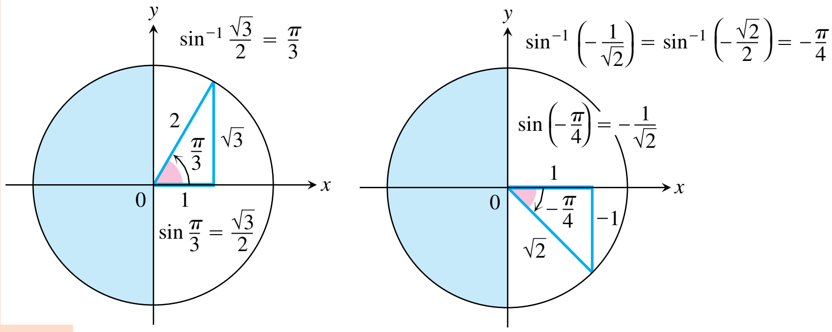
Τι σημαίνει το «τόξο» στα τόξα ημιτόνου και συνημιτόνου

Το σχήμα δίνει μια γεωμετρική ερμηνεία των συναρτήσεων $y = \sin^{-1} x$ και $y = \cos^{-1} x$ για γωνίες που μετρώνται σε ακτίνια και κείνται εντός του πρώτου τεταρτημορίου. Για τον μοναδιαίο κύκλο, η εξίσωση $s = r\theta$ γίνεται $s = \theta$, δηλαδή οι επίκεντρες γωνίες θα είναι ίδιου μέτρου με το τόξο που ορίζουν πάνω στον κύκλο. Αν $x = \sin y$, τότε το y, εκτός από γωνία ημιτόνου x, θα είναι επίσης το μήκος τόξου επί του μοναδιαίου κύκλου το οποίο κείται έναντι γωνίας ημιτόνου x. Έτσι καλούμε το y «τόξο του οποίου το ημίτονο είναι x».



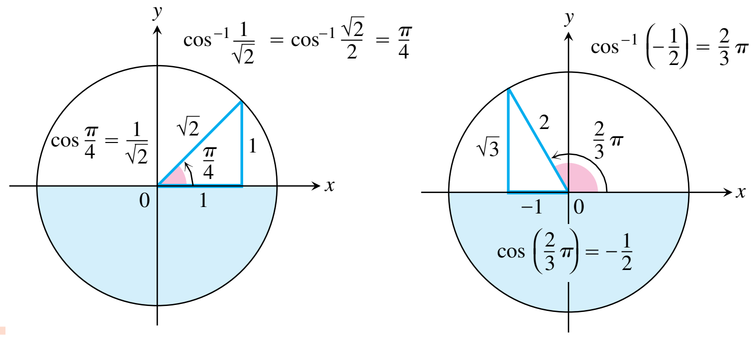
Παράδειγμα 5 Συνήθεις τιμές του $\sin^{-1} x$

Οι γωνίες ανήκουν στο πρώτο και τέταρτο τεταρτημόριο, αφού το πεδίο τιμών της συναρτήσεως $\sin^{-1} x$ είναι το διάστημα $[-\pi/2\,,\ \pi/2]$.



Παράδειγμα 6 Συνήθεις τιμές του $\cos^{-1} x$

Οι γωνίες ανήκουν στο πρώτο και δεύτερο τεταρτημόριο αφού το πεδίο τιμών της συναρτήσεως $\cos^{-1} x$ είναι το διάστημα $[0, \pi]$.



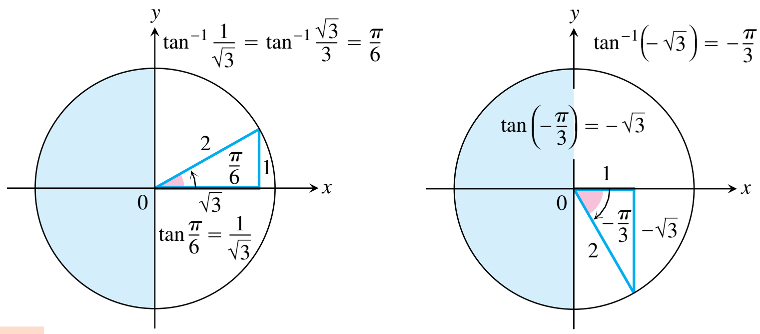
x	$\sin^{-1} x$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$
$1/2$	$\pi/6$
$-1/2$	$-\pi/6$
$-\sqrt{2}/2$	$-\pi/4$
$-\sqrt{3}/2$	$-\pi/3$

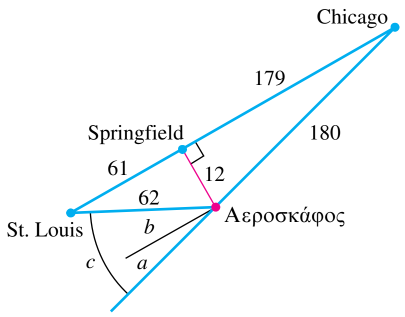
x	$\cos^{-1} x$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/6$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$
$1/2$	$\pi/3$
$-1/2$	$2\pi/3$
$-\sqrt{2}/2$	$3\pi/4$
$-\sqrt{3}/2$	$5\pi/6$

x	$\tan^{-1} x$
$\sqrt{3}$	$\pi/3$
1	$\pi/4$
$\sqrt{3}/3$	$\pi/6$
$-\sqrt{3}/3$	$-\pi/6$
1	$-\pi/4$
$-\sqrt{3}$	$-\pi/3$

Παράδειγμα 7 Συνήθεις τιμές της $\tan^{-1} x$

Οι γωνίες ανήκουν στο πρώτο και τέταρτο τεταρτημόριο, αφού το πεδίο τιμών της συναρτήσεως $\tan^{-1} x$ είναι το διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$.





Σχημα 51 Το διάγραμμα δείχνει τη διόρθωση πορείας (Παράδειγμα 8). Οι αποστάσεις (που σημειώνονται σε μίλια) έχουν στρογγυλοποιηθεί (εκτός κλίμακας σχεδίαση).

Παράδειγμα 8 Διόρθωση πορείας

Κατά τη διάρκεια μιας αεροπορικής πτήσης από το Chicago στο St. Louis, ο κυβερνήτης συνειδητοποιεί ότι το αεροσκάφος έχει αποκλίνει από την ενδεδειγμένη πορεία του κατά 12 μίλια, όπως φαίνεται στο Σχήμα 51. Βρείτε τη γωνία a που ορίζει πορεία παράλληλη προς την αρχική (ορθή) πορεία. Βρείτε ακόμη τη γωνία b, και τέλος τη διορθωτική γωνία $c = a + b$.

Λύση

$$a = \sin^{-1}\frac{12}{180} \approx 0{,}067 \text{ ακτίνια} \approx 3{,}8°$$

$$b = \sin^{-1}\frac{12}{62} \approx 0{,}195 \text{ ακτίνια} \approx 11{,}2°$$

$$c = a + b \approx 15°.$$

Ταυτότητες τόξου ημιτόνου και τόξου συνημιτόνου

Η γραφική παράσταση της $y = \sin^{-1} x$ είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 50β. Συνεπώς, το τόξο ημιτόνου είναι μια περιττή συνάρτηση:

$$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x. \tag{7}$$

Η γραφική παράσταση της $y = \cos^{-1} x$ δεν παρουσιάζει αντίστοιχη συμμετρία. Αντ' αυτής, όπως δείχνει το Σχήμα 52, το τόξο συνημιτόνου x ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi, \tag{8}$$

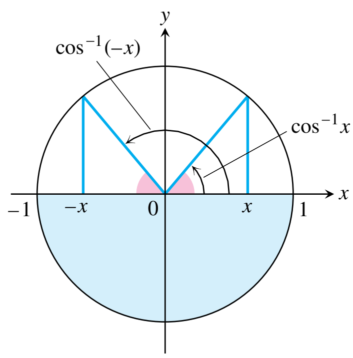
ή

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x. \tag{9}$$

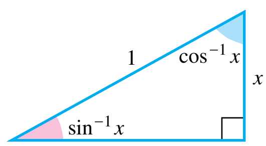
Μπορούμε, δε, να δούμε από το τρίγωνο του Σχήματος 53 ότι για $x > 0$,

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2. \tag{10}$$

Η Εξίσωση (10) ισχύει και για τις υπόλοιπες τιμές του x στο διάστημα $[-1, 1]$.



Σχημα 52 $\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi$.



Σχημα 53 Στο σχήμα αυτό, $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5

Ακτίνια, μοίρες, και κυκλικά τόξα

1. Σε κύκλο ακτίνας 10 m, ποιο το μήκος τόξου που ορίζει επίκεντρος γωνία ίση με **(α)** $4\pi/5$ ακτίνια; **(β)** $110°$;
2. Σε κύκλο ακτίνας ίσης με 8, μια επίκεντρος γωνία ορίζεται από τόξο μήκους 10π. Υπολογίστε τη γωνία σε ακτίνια (ακτινιακό μέτρο) και σε μοίρες.

Εύρεση τιμών τριγωνομετρικών συναρτήσεων

3. Αντιγράψτε και συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων. Εάν μία συνάρτηση δεν ορίζεται για κάποια γωνία, στην αντίστοιχη θέση γράψτε «ΑΟΡ». Μην χρησιμοποιήσετε υπολογιστή ή έτοιμο πίνακα τιμών.

θ	$-\pi$	$-2\pi/3$	0	$\pi/2$	$3\pi/4$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					
$\cot\theta$					
$\sec\theta$					
$\csc\theta$					

4. Αντιγράψτε και συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων. Εάν μία συνάρτηση δεν ορίζεται για κάποια γωνία, στην αντίστοιχη θέση γράψτε «ΑΟΡ». Μην χρησιμοποιήσετε υπολογιστή ή έτοιμο πίνακα τιμών.

θ	$-3\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/6$	$\pi/4$	$5\pi/6$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					
$\cot\theta$					
$\sec\theta$					
$\csc\theta$					

Στις Ασκήσεις 5 και 6, δίδεται η τιμή μίας εκ των συναρτήσεων $\sin x$, $\cos x$, και $\tan x$. Βρείτε τις τιμές των υπόλοιπων δύο συναρτήσεων στα καθορισμένα διαστήματα.

5. **(α)** $\sin x = \frac{3}{5},\quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

   (β) $\cos x = \frac{1}{3},\quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

6. **(α)** $\tan x = \frac{1}{2},\quad x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

   (β) $\sin x = -\frac{1}{2},\quad x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

Σχεδίαση τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που ακολουθούν (Ασκήσεις 7-10). Ποια η περίοδος καθεμίας από αυτές;

7. **(α)** $\sin 2x$ **(β)** $\cos \pi x$
8. **(α)** $-\sin\frac{\pi x}{3}$ **(β)** $-\cos 2\pi x$
9. **(α)** $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **(β)** $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
10. **(α)** $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ **(β)** $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$

Στις Ασκήσεις 11 και 12, σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων στο επίπεδο ts (οριζόντιος ο άξονας t, κατακόρυφος ο άξονας s). Ποια είναι η περίοδος κάθε συναρτήσεως; Τι είδους συμμετρία παρουσιάζουν οι γραφικές παραστάσεις;

11. $s = \cot 2t$
12. $s = \sec\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

Χρήση των τύπων αθροίσματος γωνιών

Στις Ασκήσεις 13 και 14, εκφράστε τη δοθείσα ποσότητα συναρτήσει των $\sin x$ και $\cos x$.

13. **(α)** $\cos(\pi + x)$ **(β)** $\sin(2\pi - x)$
14. **(α)** $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ **(β)** $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

Χρησιμοποιήστε τους τύπους του αθροίσματος γωνιών για να αποδείξετε τις ταυτότητες στις Ασκήσεις 15 και 16.

15. **(α)** $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$

    (β) $\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$
16. **(α)** $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

    (β) $\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$
17. Τι θα προκύψει αν θέσετε $B = A$ στην ταυτότητα $\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$; Συμφωνεί το αποτέλεσμα με κάτι που ήδη γνωρίζατε;
18. Τι θα προκύψει αν θέσετε $B = 2\pi$ στους τύπους αθροίσματος γωνιών; Συμφωνούν τα αποτελέσματα με κάτι που ήδη γνωρίζατε;

Γενικές ημιτονοειδείς καμπύλες

Αφού αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις των Ασκήσεων 19 και 20 με την εξίσωση (2) του κειμένου, βρείτε τις σταθερές A, B, C, και D. Σχεδιάστε πρόχειρα τις γραφικές τους παραστάσεις.

19. **(α)** $y = 2\sin(x + \pi) - 1$

    (β) $y = \frac{1}{2}\sin(\pi x - \pi) + \frac{1}{2}$
20. **(α)** $y = -\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{-2}\mathrm{t}\right) + \frac{1}{\pi}$

    (β) $y = \frac{L}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{L},\quad L > 0$
21. *Θερμοκρασία στο Fairbanks της Αλάσκας* Βρείτε **(α)** το πλάτος, **(β)** την περίοδο, **(γ)** την οριζόντια μετατόπιση, και **(δ)** την κατακόρυφη μετατόπιση της γενικής ημιτονοειδούς συναρτήσεως

$$f(x) = 20{,}5 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right) - 3{,}8.$$

22. *Θερμοκρασία στο Fairbanks της Αλάσκας* Χρησιμοποιήστε την εξίσωση της Ασκήσεως 21 για να απαντήσετε προσεγγιστικά στα παρακάτω ερωτήματα σχετικά με τη θερμοκρασία στο Fairbanks της Αλάσκας, της οποίας η γραφική παράσταση δίδεται στο Σχήμα 46. Υποθέστε ότι το έτος έχει 365 ημέρες.

(α) Ποιες οι μέγιστες και ελάχιστες μέσες ημερήσιες θερμοκρασίες;

(β) Ποιος είναι ο μέσος όρος των μέγιστων και ελάχιστων μέσων ημερήσιων θερμοκρασιών; Γιατί ο μέσος όρος αυτός ισούται με την κατακόρυφη μετατόπιση της συναρτήσεως;

Συνήθεις τιμές των αντίστροφων τριγωνομερικών συναρτήσεων

Χρησιμοποιήστε τρίγωνα αναφοράς όπως στα Παραδείγματα 5-7 προκειμένου να υπολογίσετε τις ζητούμενες γωνίες στις Ασκήσεις 23-26.

23. **(α)** $\tan^{-1} 1$ **(β)** $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ **(γ)** $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

24. **(α)** $\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ **(β)** $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **(γ)** $\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

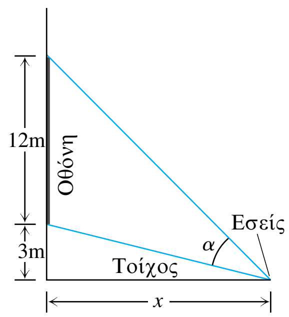
25. **(α)** $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **(β)** $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ **(γ)** $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

26. **(α)** $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$ **(β)** $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ **(γ)** $\sec^{-1}(-2)$

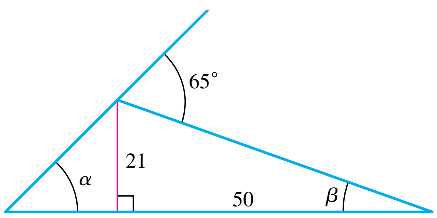
Εφαρμογές και θεωρία

27. Βρισκόσαστε σε μια κινηματογραφική αίθουσα και καθόσαστε δίπλα στον πλευρικό τοίχο, ενώ κοιτάτε προς την οθόνη (δείτε το ακόλουθο σχήμα). Η οθόνη έχει 12 μέτρα μήκος και απέχει 3 μέτρα από τον πλευρικό τοίχο. Δεδομένου ότι απέχετε x μέτρα από τον τοίχο όπου βρίσκεται η οθόνη, δείξτε ότι η γωνία θέασης που έχετε είναι

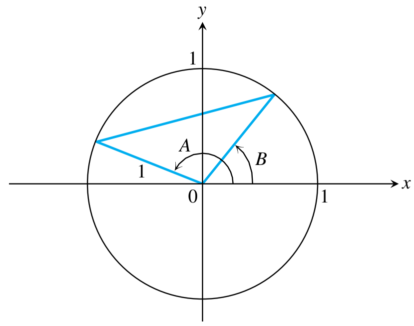
$$\alpha = \cot^{-1}\frac{x}{15} - \cot^{-1}\frac{x}{3}$$



28. Υπολογίστε τη γωνία α.

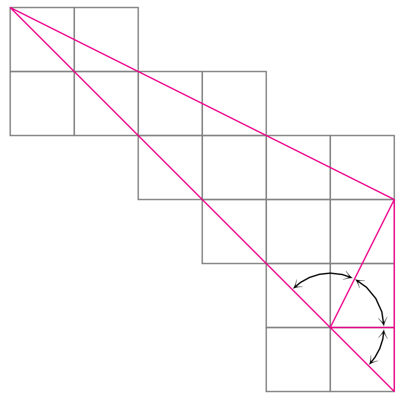


29. Εφαρμόζοντας τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο του σχήματος, βρείτε μια έκφραση για την ποσότητα $\cos(A - B)$.



30. Εάν εφαρμοσθεί σε σχήμα παρόμοιο με αυτό της Άσκησης 29, ο νόμος των συνημιτόνων οδηγεί απευθείας σε έναν τύπο για την ποσότητα $\cos(A + B)$. Ποιο είναι αυτό το σχήμα, και πώς γίνεται η απόδειξη;

31. Ακολουθεί μια άτυπη απόδειξη του ότι $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \pi$. Εξηγήστε τι ακριβώς συμβαίνει.

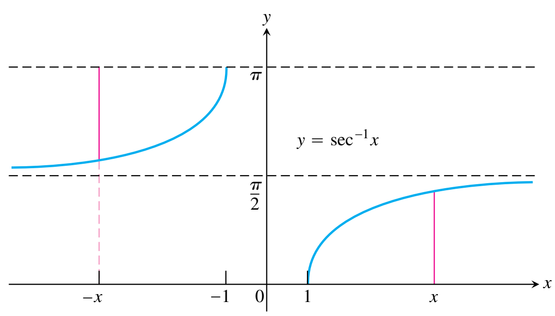


32. *Δύο αποδείξεις της ταυτότητας* $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$

(α) (*Γεωμετρική*) Ακολουθεί μια σχηματική απόδειξη της σχέσης $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$. Μπορείτε να την εξηγήσετε;

(β) (*Αλγεβρική*) Συνδυάζοντας κατάλληλα τις ακόλουθες δύο εξισώσεις, αποδείξτε την ταυτότητα $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$:

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x,$$
$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x).$$



33. *Η ταυτότητα* $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$ Το Σχήμα 53 τεκμηριώνει την ταυτότητα αυτή για $0 < x < 1$. Προκειμένου να την τεκμηριώσετε και για το υπόλοιπο του διαστήματος $[-1, 1]$, επαληθεύστε πρώτα με απευθείας υπολογισμό ότι η ταυτότητα ισχύει για $x = 1, 0$, και

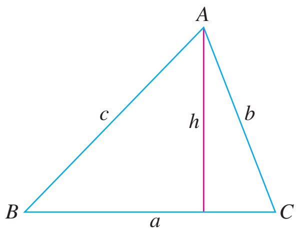
-1. Έπειτα, για x εντός του διαστήματος $(-1, 0)$, θέστε $x = -a$, $a > 0$, και εφαρμόστε τις Εξισώσεις (7) και (9) στο άθροισμα $\sin^{-1}(-a) + \cos^{-1}(-a)$.

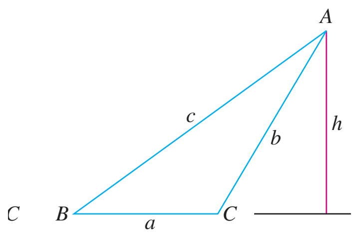
34. Δείξτε ότι το άθροισμα $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1/x)$ παραμένει σταθερό.

35. *Νόμος των ημιτόνων* Ο νόμος των ημιτόνων μάς λέει ότι αν a, b, και c είναι οι απέναντι πλευρές των αντίστοιχων γωνιών A, B, και C ενός τριγώνου, τότε

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Κάνοντας κατάλληλη χρήση των ακόλουθων σχημάτων, καθώς και της ταυτότητας $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$, αποδείξτε τον νόμο αυτόν.





36. *Εφαπτομένη αθροίσματος γωνιών* Ο συνήθης τύπος για την εφαπτομένη του αθροίσματος δύο γωνιών είναι

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

Αποδείξτε τον.

Επίλυση τριγώνων και σύγκριση συναρτήσεων

37. *Επίλυση τριγώνων*

(α) Ένα τρίγωνο έχει πλευρές $a = 2$ και $b = 3$ και γωνία $C = 60°$. Βρείτε το μήκος της πλευράς c.

(β) Ένα τρίγωνο έχει πλευρές $a = 2$ και $b = 3$ και γωνία $C = 40°$. Βρείτε το μήκος της πλευράς c.

38. *Επίλυση τριγώνων*

(α) Ένα τρίγωνο έχει πλευρές $a = 2$ και $b = 3$ και γωνία $C = 60°$ (όπως στην Άσκηση 37, ερώτημα (α)). Υπολογίστε το ημίτονο της γωνίας B κάνοντας χρήση του νόμου των ημιτόνων της Ασκήσεως 35.

(β) Ένα τρίγωνο έχει πλευρά $c = 2$ και προσκείμενες γωνίες $A = \pi/4$ και $B = \pi/3$. Υπολογίστε το μήκος a της απέναντι πλευράς της γωνίας A.

T 39. *Η προσέγγιση $\sin x \approx x$* Όταν το x μετριέται σε ακτίνια και παίρνει μικρές τιμές, η προσέγγιση $\sin x \approx x$ μπορεί να αποβεί ιδιαίτερα χρήσιμη. Στην Ενότητα 3.6 θα δούμε γιατί ισχύει η προσέγγιση αυτή. Για τιμές $|x| < 0{,}1$, το σχετικό σφάλμα είναι μικρότερο του ενός πεντακοσιοστού.

(α) Αφού προγραμματίσετε το κομπιουτεράκι σας να μετρά τις γωνίες σε ακτίνια (οπότε εμφανίζεται στην οθόνη η ένδειξη “radians”) σχεδιάστε τις συναρτήσεις $y = \sin x$ και $y = x$ σε ενιαίο σχήμα και σε περιοχή γύρω από την αρχή των αξόνων. Τι βλέπετε να συμβαίνει καθώς το x πλησιάζει στην αρχή;

(β) Προγραμματίστε το κομπιουτεράκι σας σε μοίρες (“degrees”), και κατόπιν σχεδιάστε τις $y = \sin x$ και $y = x$ σε ενιαίο σχήμα και σε περιοχή γύρω από την αρχή των αξόνων. Σε τι διαφέρει η εικόνα που βλέπετε από αυτήν που πήρατε στην επιλογή “radians”;

(γ) *Μοίρες ή ακτίνια; Ένας γρήγορος έλεγχος* Είναι προγραμματισμένο το κομπιουτεράκι σας σε ακτίνια; Υπολογίστε το $\sin x$ για x κοντά στο μηδέν, π.χ. για $x = 0{,}1$. Αν προκύπτει ότι $\sin x \approx x$, τότε το κομπιουτεράκι σας μετράει γωνίες σε ακτίνια (“radians”)· αλλιώς, όχι. Δοκιμάστε το.

T 40. *Συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους*

(α) Σχεδιάστε τις $y = \cos x$ και $y = \sec x$ σε ενιαίο σχήμα για $-3\pi/2 \le x \le 3\pi/2$. Σχολιάστε τη συμπεριφορά της συναρτήσεως $\sec x$ σχετικά με τα πρόσημα και τις τιμές του $\cos x$.

(β) Σχεδιάστε τις $y = \sin x$ και $y = \csc x$ σε ενιαίο σχήμα για $-\pi \le x \le 2\pi$. Σχολιάστε τη συμπεριφορά της συναρτήσεως $\csc x$ σχετικά με τα πρόσημα και τις τιμές του $\sin x$.

T Στις Ασκήσεις 41 και 42, βρείτε τα πεδία ορισμού και τιμών κάθε σύνθετης συνάρτησης. Κατόπιν σχεδιάστε τις σύνθετες συναρτήσεις σε χωριστά διαγράμματα. Κατανοείτε τη συμπεριφορά κάθε γραφικής παραστάσεως; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. Σχολιάστε τις όποιες διαφορές διακρίνετε μεταξύ των γραφημάτων.

41. **(α)** $y = \tan^{-1}(\tan x)$ **(β)** $y = \tan(\tan^{-1} x)$

42. **(α)** $y = \sin^{-1}(\sin x)$ **(β)** $y = \sin(\sin^{-1} x)$

Στις Ασκήσεις 43-46, επιλύστε την εξίσωση στο καθορισμένο διάστημα.

43. $\tan x = 2{,}5, \quad 0 \le x < 2\pi$

44. $\cos x = -0{,}7, \quad 2\pi \le x < 4\pi$

45. $\sec x = -3, \quad -\pi \le x < \pi$

46. $\sin x = -0{,}5, \quad -\infty < x < \infty$

T 47. *Τριγωνομετρικές ταυτότητες* Έστω $f(x) = \sin x + \cos x$.

(α) Σχεδιάστε την $y = f(x)$. Περιγράψτε τη γραφική παράσταση.

(β) Από τη γραφική παράσταση βρείτε το πλάτος, την περίοδο, την οριζόντια μετατόπιση, και την κατακόρυφη μετατόπιση.

(γ) Επαληθεύστε τις απαντήσεις σας από τον τύπο του ημιτόνου αθροίσματος δυο γωνιών

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + \beta).$$

T 48. *Οφιοειδής του Νεύτωνα* Σχεδιάστε την οφιοειδή καμπύλη του Νεύτωνα, $y = 4x/(x^2 + 1)$. Κατόπιν σχεδιάστε σε ενιαίο σχήμα την $y = 2\sin(2\tan^{-1} x)$. Τι παρατηρείτε; Εξηγήστε.

Ημιτονοειδής παλινδρομική ανάλυση: μουσικοί φθόγγοι και θερμοκρασία

Δείτε τη σελ. 5 για μια εισαγωγή στην παλινδρομική ανάλυση με υπολογιστή. Μια ημιτονοειδής εξίσωση παλινδρομήσεως είναι μια γενική ημιτονοειδής καμπύλη της μορφής (2). Πολλοί υπολογιστές μπορούν να προσαρμόσουν τέτοιες εξισώσεις παλινδρομήσεως σε αριθμητικά δεδομένα.

T **49.** *Εύρεση συχνότητας μουσικού φθόγγου* Οι μουσικοί φθόγγοι (νότες) δεν είναι παρά κύματα συμπιέσεως του αέρα. Η κυματική συμπεριφορά στη φύση μπορεί να αποδοθεί με μεγάλη ακρίβεια μέσω γενικών ημιτονοειδών καμπυλών. Υπάρχουν διατάξεις (τα λεγόμενα συστήματα CBL, δηλ. Calculator Based Laboratory™ (CBL) systems) που καταγράφουν τέτοια κύματα συμπιέσεως με ένα μικρόφωνο. Στον Πίνακα 18 φαίνονται τα αποτελέσματα μετρήσεων των μεταβολών της πίεσης έναντι του χρόνου, οι οποίες προέκυψαν καθώς παλλόταν ένα διαπασών και μετρήθηκαν από σύστημα CBL.

(α) Βρείτε μια ημιτονοειδή εξίσωση παλινδρόμησης (γενική ημιτονοειδή καμπύλη) για τα αριθμητικά δεδομένα του πίνακα, και σχεδιάστε την σε κοινό σχήμα με το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

(β) Η *συχνότητα* ενός μουσικού φθόγγου, δηλαδή ενός κύματος, μετριέται σε κύκλους ανά δευτερόλεπτο, δηλαδή σε Hertz (1 Hz = 1 κύκλος ανά δευτερόλεπτο). Η συχνότητα είναι αντίστροφη της *περιόδου* του κύματος, η οποία μετριέται σε δευτερόλεπτα ανά κύκλο. Προβείτε σε μία εκτίμηση της συχνότητας του μουσικού φθόγγου που παράγεται από τοδιαπασών.

Πίνακας 18 Μετρήσεις διαπασών

Χρόνος	Πίεση	Χρόνος	Πίεση
0,00091	−0,080	0,00362	0,217
0,00108	0,200	0,00379	0,480
0,00125	0,480	0,00398	0,681
0,00144	0,693	0,00416	0,810
0,00162	0,816	0,00435	0,827
0,00180	0,844	0,00453	0,749
0,00198	0,771	0,00471	0,581
0,00216	0,603	0,00489	0,346
0,00234	0,368	0,00507	0,077
0,00253	0,099	0,00525	−0,164
0,00271	−0,141	0,00543	−0,320
0,00289	−0,309	0,00562	−0,354
0,00307	−0,348	0,00579	−0,248
0,00325	−0,248	0,00598	−0,035
0,00344	−0,041		

T **50.** *Θερμοκρασιακά δεδομένα* Ο Πίνακας 19 δίνει τις μέσες μηνιαίες θερμοκρασίες στο St. Louis για μια περίοδο 12 μηνών, αρχίζοντας από Ιανουάριο. Χρησιμοποιώντας για τη μηνιαία θερμοκρασία το μοντέλο

$$y = a \sin (b(t - h)) + k,$$

όπου y η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου και t ο χρόνος σε μήνες, απαντήστε στα εξής ερωτήματα:

Πίνακας 19 Μέση θερμοκρασία στο St. Louis

Χρόνος (μήνες)	Θερμοκρασία (°C)
1	1
2	–1
3	4
4	7
5	14
6	19
7	26
8	27
9	22
10	17
11	11
12	4

(α) Βρείτε την τιμή του b, δεδομένου ότι η περίοδος είναι 12 μήνες.

(β) Πώς σχετίζεται το πλάτος a με τη θερμοκρασιακή διαφορά $27° - (-1°)$;

(γ) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του (β) για να βρείτε το k.

(δ) Βρείτε το h και γράψτε την πλήρη έκφραση για το y.

(ε) Σχεδιάστε τη θερμοκρασιακή καμπύλη y σε κοινό σχήμα με το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

T **51.** *Ημιτονοειδής παλινδρόμηση* Ο Πίνακας 20 παρέχει τιμές της συναρτήσεως

$$f(x) = a \sin (bx + c) + d$$

με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

(α) Βρείτε μια ημιτονοειδή εξίσωση παλινδρομήσεως για τα δεδομένα.

(β) Ξαναγράψτε την εξίσωση με τα a, b, c, και d στρογγυλοποιημένα στον πλησιέστερο ακέραιο.

Πίνακας 20 Τιμές συνάρτησης

x	$f(x)$
1	3,42
2	0,73
3	0,12
4	2,16
5	4,97
6	5,97

T **52.** Προτείνουμε στους φοιτητές να *εργαστούν σε ομάδες των δύο-τριών ατόμων*. Κάθε μουσικός φθόγγος (δηλ. νότα) δεν είναι παρά μια αλληλουχία κυμάτων συμπιέσεως του αέρα. Ο Πίνακας 21 δίνει τη συχνότητα (σε Hertz) κάθε φθόγγου της διατονικής (δυτικής) μουσικής κλίμακας. Οι μετρήσεις πίεσης-χρόνου για το παλλόμενο διαπασών του Πίνακα 22 έγιναν με σύστημα CBL και μικρόφωνο.

(α) Βρείτε μια ημιτονοειδή εξίσωση παλινδρόμησης για τα δεδομένα του Πίνακα 22 και σχεδιάστε την σε κοινό σχήμα με το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

(β) Προσδιορίστε τη συχνότητα ταλάντωσης της διαπασών και αναγνωρίστε έτσι τη νότα που αυτή παρήγαγε.

Πίνακας 21 Συχνότητες μουσικών φθόγγων

Φθόγγος (νότα)	Συχνότητα (Hz)
Ντο	262
Ντο$^\sharp$ ή Ρε$^\flat$	277
Ρε	294
Ρε$^\sharp$ ή Μι$^\flat$	311
Μι	330
Φα	349
Φα$^\sharp$ ή Σολ$^\flat$	370
Σολ	392
Σολ$^\sharp$ ή Λα$^\flat$	415
Λα	440
Λα$^\sharp$ ή Σι$^\flat$	466
Σι	494
Ντο (επόμενη οκτάβα)	523

Πηγή: CBL™ System Experimental Workbook, Texas Instruments, Inc., 1994.

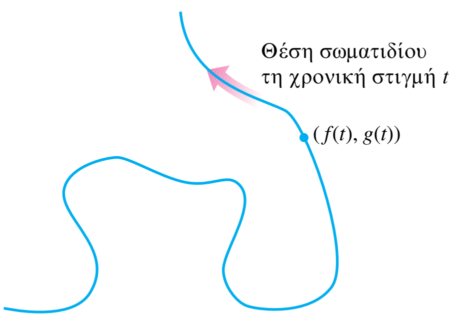
Πίνακας 22 Μετρήσεις διαπασών

Χρόνος	Πίεση	Χρόνος	Πίεση
0,0002368	1,29021	0,0049024	−1,06632
0,0005664	1,50851	0,0051520	0,09235
0,0008256	1,51971	0,0054112	1,44694
0,0010752	1,51411	0,0056608	1,51411
0,0013344	1,47493	0,0059200	1,51971
0,0015840	0,45619	0,0061696	1,51411
0,0018432	−0,89280	0,0064288	1,43015
0,0020928	−1,51412	0,0066784	0,19871
0,0023520	−1,15588	0,0069408	−1,06072
0,0026016	−0,04758	0,0071904	−1,51412
0,0028640	1,36858	0,0074496	−0,97116
0,0031136	1,50851	0,0076992	0,23229
0,0033728	1,51971	0,0079584	1,46933
0,0036224	1,51411	0,0082080	1,51411
0,0038816	1,45813	0,0084672	1,51971
0,0041312	0,32185	0,0087168	1,50851
0,0043904	−0,97676	0,0089792	1,36298
0,0046400	−1,51971		

6 Παραμετρικές εξισώσεις

Παραμετρικοποιήσεις καμπυλών στο επίπεδο • Ευθείες και άλλες καμπύλες • Παραμετρικοποίηση αντίστροφων συναρτήσεων • Μια εφαρμογή

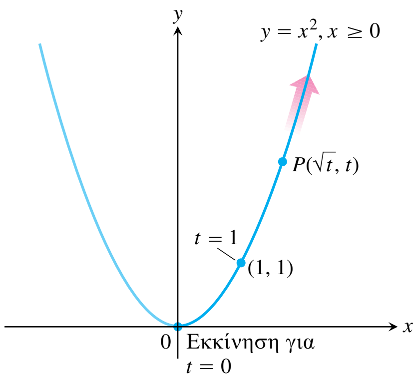
Όταν η τροχιά ενός σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο μοιάζει με αυτήν του Σχήματος 54, τότε δεν υπάρχει εξίσωση της μορφής $y = f(x)$ που να την περιγράφει, αφού υπάρχουν κατακόρυφες ευθείες που τέμνουν την καμπύλη σε περισσότερα από ένα σημεία (δείτε την Άσκηση 25 της Ενότητας 2). Ομοίως, δεν μπορούμε να περιγράψουμε την καμπύλη εκφράζοντας το x απευθείας ως συνάρτηση του y. Στην παρούσα ενότητα, θα μάθετε έναν άλλον τρόπο περιγραφής καμπυλών, ο οποίος χρησιμοποιεί μια τρίτη μεταβλητή, που καλείται *παράμετρος*. Η πολύ χρήσιμη αυτή μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί εξίσου καλά για να περιγράψουμε συνήθεις συναρτήσεις (και τις αντίστροφές τους, όταν αυτές υπάρχουν), όπως αυτές που έχουμε ήδη μελετήσει.



Σχημα 54 Η τροχιά ενός σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο xy δεν μπορεί πάντα να θεωρηθεί ως η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης του x ή του y.

Παραμετρικοποιήσεις καμπυλών στο επίπεδο

Όταν η τροχιά ενός σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο μοιάζει με αυτήν του Σχήματος 54, τότε εκφράζουμε τις συντεταγμένες θέσεως του σωματιδίου ως συναρτήσεις μιας τρίτης μεταβλητής t και περιγράφουμε την τροχιά με ένα ζεύγος εξισώσεων, $x = f(t)$ και $y = g(t)$. Όταν μελετούμε κίνηση, είθισται η μεταβλητή t να εκφράζει τον χρόνο. Τέτοιου είδους εξισώσεις υπερτερούν σε σχέση με τον καρτεσιανό τύπο $y = y(x,)$ δεδομένου ότι μας πληροφορούν για τη θέση του σωματιδίου $(x, y) = (f(t), g(t))$ σε κάθε μεταγενέστερη χρονική τιμή t.



Σχημα 55 Οι εξισώσεις $x = \sqrt{t}$ και $y = t$ και το διάστημα $t \geq 0$ περιγράφουν την κίνηση ενός σωματιδίου που διαγράφει το δεξιό ήμισυ της παραβολής $y = x^2$. (Παράδειγμα 1)

Παράδειγμα 1 Κίνηση σε παραβολική καμπύλη

Η θέση $P(x, y)$ σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο xy δίδεται από τις εξισώσεις και το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η παράμετρος

$$x = \sqrt{t}, \qquad y = t, \qquad t \geq 0.$$

Προσδιορίστε την τροχιά του σωματιδίου και περιγράψτε την κίνησή του.

Λύση Επιχειρούμε να προσδιορίσουμε την τροχιά απαλείφοντας τον χρόνο t από τις εξισώσεις $x = \sqrt{t}$ και $y = t$. Με λίγη τύχη, θα προκύψει μια αναγνωρίσιμη αλγεβρική σχέση μεταξύ των x και y. Βρίσκουμε ότι

$$y = t = (\sqrt{t})^2 = x^2.$$

Έτσι, οι συντεταγμένες θέσεως του σωματιδίου ικανοποιούν την εξίσωση $y = x^2$, δηλαδή το σωματίδιο κινείται στην παραβολική τροχιά $y = x^2$.

Θα ήταν λάθος, ωστόσο, να συμπεράνουμε ότι τροχιά του σωματιδίου είναι η πλήρης παραβολή $y = x^2$· στην πραγματικότητα είναι μόνο η μισή παραβολή. Η συντεταγμένη x δεν παίρνει ποτέ αρνητικές τιμές. Το σωματίδιο ξεκινά από το σημείο (0, 0) όταν $t = 0$ και κινείται πάντα εντός του πρώτου τεταρτημορίου, καθώς ο χρόνος αυξάνεται (Σχήμα 55).

Ορισμοί Παραμετρική καμπύλη, παραμετρικές εξισώσεις

Αν τα x και y δίδονται από τις συναρτήσεις

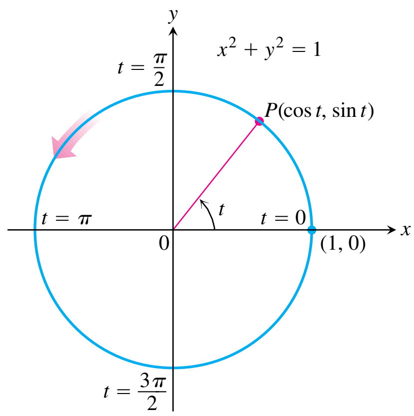
$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

και το t παίρνει τιμές σε κάποιο διάστημα, τότε το σύνολο των σημείων $(x, y) = (f(t), g(t))$ που ορίζονται από τις παραπάνω εξισώσεις αποτελεί μια **παραμετρική καμπύλη.** Οι εξισώσεις αυτές είναι οι **παραμετρικές εξισώσεις** της καμπύλης.

Η μεταβλητή t είναι μια **παράμετρος** της καμπύλης, το δε πεδίο ορισμού της I είναι το **παραμετρικό διάστημα.** Αν το I είναι κλειστό διάστημα, $a \leq t \leq b$, τότε το σημείο $(f(\alpha), g(\alpha))$ είναι το **αρχικό σημείο** της καμπύλης, ενώ το σημείο $(f(\beta), g(\beta))$ είναι το **τελικό σημείο.** Όταν δίνουμε τις παραμετρικές εξισώσεις και το παραμετρικό διάστημα μίας καμπύλης, λέμε ότι έχουμε **παραμετρικοποιήσει** την καμπύλη. Οι εξισώσεις και το διάστημα μαζί αποτελούν μία **παραμετρικοποίηση** της καμπύλης.

Στο Παράδειγμα 1, το παραμετρικό διάστημα είναι το $[0, \infty)$, συνεπώς αρχικό σημείο είναι το $(0, 0)$. Δεν υπάρχει τελικό σημείο.

Ο υπολογιστής μπορεί να σχεδιάζει παραμετρικές καμπύλες μόνο σε κλειστό διάστημα, κι έτσι η γραφική παράσταση στην οθόνη του εμφανίζει πάντα ακραία σημεία, ακόμη κι αν η καμπύλη που ζητούμε δεν διαθέτει τέτοια. Ας το έχετε κατά νου αυτό όταν σχεδιάζετε καμπύλες με υπολογιστή.



Σχημα 56 Οι εξισώσεις $x = \cos t$ και $y = \sin t$ περιγράφουν κίνηση επί του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$. Το βέλος δείχνει τη φορά του χρόνου t (φορά διαγραφής του κύκλου). (Παράδειγμα 2)

Παράδειγμα 2 Κίνηση με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού (αριστερόστροφη)

Σχεδιάστε τις παραμετρικές καμπύλες

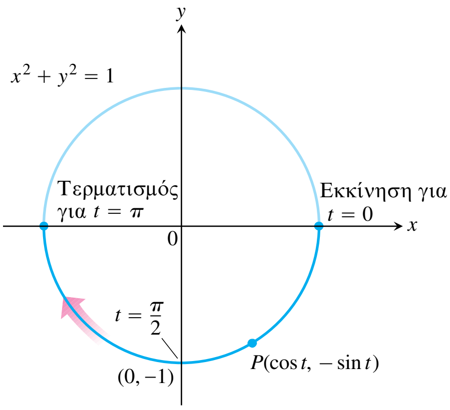
(α) $x = \cos t, \quad y = \sin t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

(β) $x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$

Λύση

(α) Εφόσον $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, η παραμετρική καμπύλη είναι ο μοναδιαίος κύκλος $x^2 + y^2 = 1$. Καθώς το t αυξάνεται από 0 σε 2π, το σημείο με συντεταγμένες $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ ξεκινά από τη θέση $(1, 0)$ και διαγράφει έναν πλήρη κύκλο με αριστερόστροφη φορά (Σχήμα 56).

(β) Όταν $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, και $0 \le t \le 2\pi$, έχουμε $x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2$. Η παραμετρικοποίηση περιγράφει τώρα μια κίνηση που αρχίζει από τη θέση $(a, 0)$ και εξελίσσεται αριστερόστροφα, διαγράφοντας έναν πλήρη κύκλο $x^2 + y^2 = a^2$ προτού επιστρέψει στο $(a, 0)$ τη χρονική στιγμή $t = 2\pi$.



Σχημα 57 Το σημείο $P(\cos t, -\sin t)$ κινείται με δεξιόστροφη φορά καθώς ο χρόνος t αυξάνεται από 0 σε π. (Παράδειγμα 3)

Παράδειγμα 3 Διανύοντας ένα ημικύκλιο με δεξιόστροφη φορά

Σχεδιάστε την παραμετρική καμπύλη

$$x = \cos t, \qquad y = -\sin t, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Βρείτε μια καρτεσιανή εξίσωση καμπύλης που περιέχει την παραμετρική καμπύλη. Ποιο τμήμα του γραφήματος της καρτεσιανής εξίσωσης καλύπτεται από την παραμετρική καμπύλη; Περιγράψτε την κίνηση.

Λύση Το σημείο με συντεταγμένες θέσεως $(x, y) = (\cos t, -\sin t)$ κινείται επί του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$. Σε αντίθεση με το Παράδειγμα 2, η κίνηση τώρα είναι δεξιόστροφη (ωρολογιακής φοράς). Καθώς αυξάνεται ο χρόνος t από 0 σε π, το y παίρνει αρνητικές τιμές και το x ελαττώνεται. Το σημείο (x, y) κινείται επί του κάτω ημίσεως του κύκλου, αρχικά κατερχόμενο προς το $(0, -1)$ και κατόπιν ανερχόμενο προς το $(-1, 0)$. Η κίνηση σταματά στο $t = \pi$, καλύπτοντας έτσι μόνο το κάτω ήμισυ του κύκλου (Σχήμα 57).

Ευθείες και άλλες καμπύλες

Πολλές άλλες καμπύλες, συμπεριλαμβανομένων των ευθειών και των ευθύγραμμων τμημάτων, μπορούν να οριστούν παραμετρικά.

Παράδειγμα 4 Κίνηση σε ευθεία

Σχεδιάστε και αναγνωρίστε την παραμετρική καμπύλη

$$x = 3t, \qquad y = 2 - 2t, \qquad 0 \le t \le 1.$$

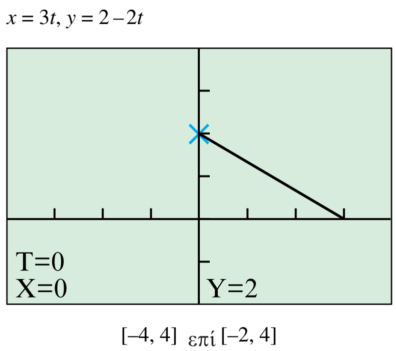
Τι θα συμβεί αν αρθεί ο περιορισμός των τιμών του t;

Λύση Για $t = 0$, οι εξισώσεις δίνουν $x = 0$ και $y = 2$. Για $t = 1$, είναι $x = 3$ και $y = 0$. Αν αντικαταστήσουμε $t = x/3$ στην εξίσωση για το y, παίρνουμε

$$y = 2 - 2\left(\frac{x}{3}\right) = -\frac{2}{3}x + 2.$$

Κατά συνέπεια, η παραμετρική καμπύλη διατρέχει το τμήμα της ευθείας $y = -(2/3)x + 2$ από το σημείο $(0, 2)$ στο $(3, 0)$ (Σχήμα 58).

Αν άρουμε τον περιορισμό στο t, αλλάζοντας έτσι το παραμετρικό διάστημα από $[0, 1]$ σε $(-\infty, \infty)$, η παραμετρικοποίηση θα καλύψει όλη την ευθεία $y = -(2/3)x + 2$.



Σχημα 58 Η γραφική παράσταση του ευθύγραμμου τμήματος $x = 3t$, $y = 2 - 2t$, $0 \le t \le 1$. Σημειώνεται το αρχικό σημείο $(0, 2)$. (Παράδειγμα 4)

Παράδειγμα 5 Παραμετρικοποίηση ευθύγραμμου τμήματος

Βρείτε μια παραμετρικοποίηση για το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(-2, 1)$ και $(3, 5)$.

Λύση Χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες του σημείου $(-2, 1)$ κατασκευάζουμε τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = -2 + at, \qquad y = 1 + bt.$$

Αυτές παριστάνουν μια ευθεία, όπως διαπιστώνουμε λύνοντας κάθε εξίσωση ως προς t και εξισώνοντας τα δεξιά μέλη, οπότε

$$\frac{x+2}{a} = \frac{y-1}{b}.$$

Η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο $(-2, 1)$ για $t = 0$. Προσδιορίζουμε τα a και b έτσι ώστε να διέρχεται και από το $(3, 5)$ για $t = 1$.

$$3 = -2 + a \Rightarrow a = 5 \qquad x = 3 \text{ για } t = 1.$$
$$5 = 1 + b \Rightarrow b = 4 \qquad y = 5 \text{ για } t = 1.$$

Συνεπώς, η

$$x = -2 + 5t, \qquad y = 1 + 4t, \qquad 0 \le t \le 1$$

είναι μια παραμετρικοποίηση του ευθύγραμμου τμήματος με αρχικό και τελικό σημείο το $(-2, 1)$ και $(3, 5)$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα 6 Κίνηση κατά μήκος της έλλειψης $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

Περιγράψτε την κίνηση σωματιδίου του οποίου η θέση $P(x, y)$ κατά τη χρονική στιγμή t δίδεται από τις εξισώσεις

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Λύση Βρίσκουμε πρώτα μια καρτεσιανή εξίσωση των συντεταγμένων του σωματιδίου, απαλείφοντας τον χρόνο t από τις εξισώσεις

$$\cos t = \frac{x}{a}, \qquad \sin t = \frac{y}{b}.$$

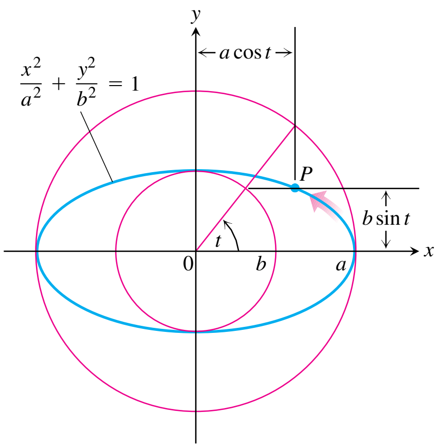
Η ταυτότητα $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, μας δίνει

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Οι συντεταγμένες θέσεως (x, y) του σωματιδίου ικανοποιούν τη σχέση $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, συνεπώς το σωματίδιο κινείται πάνω στην έλλειψη αυτή. Για $t = 0$, οι συντεταγμένες θέσεως είναι

$$x = a\cos(0) = a, \qquad y = b\sin(0) = 0,$$

δηλαδή αφετηρία της κίνησης είναι το σημείο $(a, 0)$. Καθώς ο χρόνος t περνά, το σωματίδιο ανέρχεται κινούμενο προς τα αριστερά, με αριστερόστροφη φορά. Διαγράφει μια πλήρη έλλειψη, και επιστρέφει, τέλος, στην αρχική του θέση $(a, 0)$ όταν $t = 2\pi$ (Σχήμα 59).

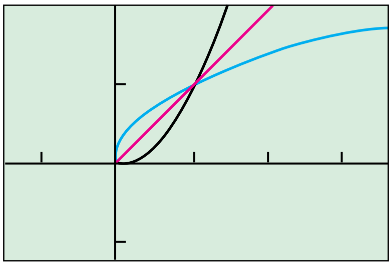


Σχημα 59 Η έλλειψη του Παραδείγματος 6, σχεδιασμένη για $a > b > 0$. Οι συντεταγμένες του σημείου P είναι $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Παραμετρικοποίηση αντίστροφων συναρτήσεων

Οποιαδήποτε συνάρτηση $y = f(x)$ μπορεί να παρασταθεί (άρα και να σχεδιαστεί) παραμετρικά ως εξής:

$$x = t \qquad \text{και} \qquad y = f(t).$$



[–1.5, 3] επί [–1, 2]

Σχημα 60 Παραμετρικές γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, της αντίστροφής της, και της ευθείας $y = x$.

Με εναλλαγή των t και $f(t)$ προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις της αντίστροφης συνάρτησης:

$$x = f(t) \qquad \text{και} \qquad y = t$$

(δείτε την Ενότητα 4).

Για παράδειγμα, προκειμένου να σχεδιάσουμε με υπολογιστή την αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, στο ίδιο σχήμα με την αντίστροφή της καθώς και με την ευθεία $y = x$, $x \geq 0$, θα χρησιμοποιήσουμε την επιλογή «παραμετρικής σχεδίασης» ("parametric") ως εξής:

$$\text{Γράφημα της } f : x_1 = t, \quad y_1 = t^2, \quad t \geq 0$$
$$\text{Γράφημα της } f^{-1} : x_2 = t^2, \quad y_2 = t$$
$$\text{Γράφημα της } y = x : x_3 = t, \quad y_3 = t$$

Το Σχήμα 60 δείχνει τα τρία αυτά γραφήματα.

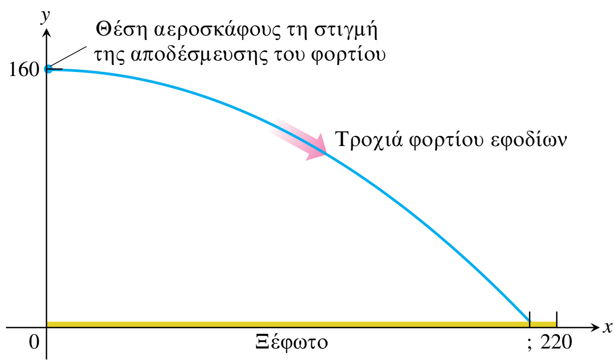
Μια εφαρμογή

Παράδειγμα 7 Ρίψη εφοδίων

Ένα αεροσκάφος του Ερυθρού Σταυρού ρίχνει τρόφιμα και φάρμακα σε μια περιοχή που υπέστη καταστροφές. Αν το αεροσκάφος αποδεσμεύσει τα εφόδια ακριβώς πάνω από το ακραίο σημείο ενός ξέφωτου που έχει μήκος 220 m, και αν το φορτίο διαγράφει πέφτοντας την τροχιά

$$x = 35t \qquad \text{και} \qquad y = -4{,}9t^2 + 160, \qquad t \geq 0$$

τότε θέλουμε να ξέρουμε αν τα εφόδια θα πέσουν μέσα στο ξέφωτο ή όχι. Οι συντεταγμένες x και y μετρώνται σε μέτρα, και η παράμετρος t (ο χρόνος μετά από την αποδέσμευση των εφοδίων) σε δευτερόλεπτα. Βρείτε μια καρτεσιανή εξίσωση για την τροχιά του φορτίου, καθώς αυτό πέφτει (Σχήμα 61).



Σχημα 61 Η τροχιά του φορτίου εφοδίων που έριξε το αεροσκάφος του Παραδείγματος 7.

Λύση Το φορτίο προσγειώνεται όταν $y = 0$, το οποίο αντιστοιχεί σε χρόνο t όπου

$$-4{,}9t^2 + 160 = 0 \qquad \text{Θέτουμε } y = 0.$$
$$t^2 = \frac{160}{4{,}9} \qquad \text{Λύνουμε ως προς } t.$$
$$t = \frac{40}{7} \text{ sec.} \qquad t \geq 0$$

Η συντεταγμένη x κατά την αποδέσμευση είναι $x = 0$. Κατά την προσγείωση, η συντεταγμένη x είναι

$$x = 35t = 35\frac{40}{7} = 200 \text{ m}.$$

Εφόσον $200 < 220$, το φορτίο όντως προσγειώνεται μέσα στο ξέφωτο.

Με απαλοιφή του χρόνου t από τις παραμετρικές εξισώσεις βρίσκουμε μια καρτεσιανή εξίσωση των συντεταγμένων θέσεως του φορτίου:

$$y = -4{,}9t^2 + 160 \qquad \text{Παραμετρική εξίσωση για το } y$$

$$= -4{,}9\left(\frac{x}{35}\right)^2 + 160 \qquad \text{Αντικαθιστούμε το } t \text{ από την εξίσωση } x = 35t.$$

$$= -\frac{4{,}9}{1225}x^2 + 160 \qquad \text{Απλοποιούμε.}$$

δηλαδή

$$y = -\frac{1}{250}x^2 + 160.$$

Συνεπώς, το φορτίο κινείται επί της παραβολής

$$y = -\frac{1}{250}x^2 + 160.$$

Συνήθεις παραμετρικοποιήσεις

ΚΥΚΛΟΣ $x^2 + y^2 = a^2$:

$x = a\cos t$

$y = a\sin t$

$0 \le t \le 2\pi$

ΕΛΛΕΙΨΗ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$x = a\cos t$

$y = b\sin t$

$0 \le t \le 2\pi$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = f(x)$:

$x = t$

$y = f(t)$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΤΗΣ $y = f(x)$:

$x = f(t)$

$y = t$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6

Εύρεση καρτεσιανών εξισώσεων από παραμετρικές εξισώσεις

Στις Ασκήσεις 1-18 δίδονται παραμετρικές εξισώσεις και παραμετρικά διαστήματα για την κίνηση σωματιδίου στο επίπεδο xy. Αναγνωρίστε το είδος της τροχιάς του σωματιδίου αφού βρείτε μια αντίστοιχη καρτεσιανή εξίσωση. Σχεδιάστε την καρτεσιανή εξίσωση. (Οι γραφικές παραστάσεις ποικίλλουν αναλόγως της εκάστοτε εξίσωσης.) Σημειώστε το τμήμα του γραφήματος που καλύπτεται από την κίνηση του σωματιδίου, καθώς και τη φορά κινήσεως.

1. $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$

2. $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$, $0 \le t \le \pi$

3. $x = \sin(2\pi t)$, $y = \cos(2\pi t)$, $0 \le t \le 1$

4. $x = \cos(\pi - t)$, $y = \sin(\pi - t)$, $0 \le t \le \pi$

5. $x = 4\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$

6. $x = 4\sin t$, $y = 5\cos t$, $0 \le t \le 2\pi$

7. $x = 3t$, $y = 9t^2$, $-\infty < t < \infty$

8. $x = -\sqrt{t}$, $y = t$, $t \ge 0$

9. $x = t$, $y = \sqrt{t}$, $t \ge 0$

10. $x = \sec^2 t - 1$, $y = \tan t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$

11. $x = -\sec t$, $y = \tan t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$

12. $x = 2t - 5$, $y = 4t - 7$, $-\infty < t < \infty$

13. $x = 1 - t$, $y = 1 + t$, $-\infty < t < \infty$

14. $x = 3 - 3t$, $y = 2t$, $0 \le t \le 1$

15. $x = t, \quad y = \sqrt{1 - t^2}, \quad -1 \le t \le 0$

16. $x = \sqrt{t + 1}, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \ge 0$

17. $x = et + e^{-}t, \quad y = et - e^{-}t, \quad -\infty < t < \infty$

18. $x = \cos(et), \quad y = 2\sin(et), \quad -\infty < t < \infty$

Εύρεση παραμετρικών εξισώσεων

19. Βρείτε παραμετρικές εξισώσεις, καθώς και ένα παραμετρικό διάστημα, για την κίνηση σωματιδίου που εκκινεί από το σημείο $(a, 0)$ και διαγράφει τον κύκλο $x^2 + y^2 = a^2$ ως εξής:

(α) Μία φορά δεξιόστροφα.

(β) Μία φορά αριστερόστροφα.

(γ) Δύο φορές δεξιόστροφα.

(δ) Δύο φορές αριστερόστροφα.

(Υπάρχουν πολλοί τρόποι παραμετρικοποίησης, κι έτσι οι απαντήσεις σας δεν είναι ανάγκη να συμπίπτουν με αυτές του βιβλίου.)

20. Βρείτε παραμετρικές εξισώσεις καθώς και ένα παραμετρικό διάστημα για την κίνηση σωματιδίου που εκκινεί από το σημείο $(a, 0)$ και διαγράφει την έλλειψη $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ ως εξής:

(α) Μία φορά δεξιόστροφα.

(β) Μία φορά αριστερόστροφα.

(γ) Δύο φορές δεξιόστροφα.

(δ) Δύο φορές αριστερόστροφα.

(Όπως και στην Άσκηση 19, υπάρχουν πολλοί τρόποι παραμετρικοποίησης.)

Στις Ασκήσεις 21-26, βρείτε μία παραμετρικοποίηση για κάθε καμπύλη:

21. Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(-1, -3)$ και $(4, 1)$.

22. Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(-1, 3)$ και $(3, -2)$.

23. Το κάτω ήμισυ της παραβολής $x - 1 = y^2$.

24. Το αριστερό ήμισυ της παραβολής $y = x^2 + 2x$.

25. Η ημιευθεία με αρχικό σημείο το $(2, 3)$ που διέρχεται από το σημείο $(-1, -1)$.

26. Η ημιευθεία με αρχικό σημείο το $(-1, 2)$ που διέρχεται από το σημείο $(0, 0)$.

Παραμετρική σχεδίαση

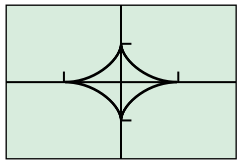
T Στις Ασκήσεις 27-30, αντιστοιχίστε τις παραμετρικές εξισώσεις με τα γραφήματά τους. Ποιες περίπου είναι οι διαστάσεις κάθε διαγράμματος; Βρείτε ένα παραμετρικό διάστημα για το οποίο η κάθε καμπύλη διατρέχεται ακριβώς μία φορά.

27. $x = 3\sin(2t), \quad y = 1{,}5\cos t$

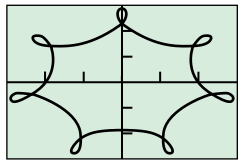
28. $x = \sin^3 t, \quad y = \cos^3 t$

29. $x = 7\sin t - \sin(7t), \quad y = 7\cos t - \cos(7t)$

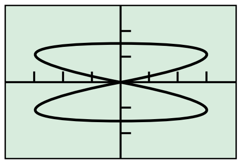
30. $x = 12\sin t - 3\sin(6t), \quad y = 12\cos t + 3\cos(6t)$



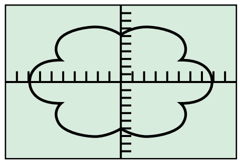
(α)



(β)



(γ)



(δ)

T Στις Ασκήσεις 31-38, χρησιμοποιήστε την επιλογή παραμετρικής σχεδίασης στον υπολογιστή σας για να παραγάγετε τα γραφήματα των f, f^{-1}, και $y = x$.

31. $f(x) = ex$

32. $f(x) = 3x$

33. $f(x) = 2^{-}x$

34. $f(x) = 3^{-}x$

35. $f(x) = \ln x$

36. $f(x) = \log x$

37. $f(x) = \sin^{-1} x$

38. $f(x) = \tan^{-1} x$

Στις Ασκήσεις 39-42, χρησιμοποιήστε τη γραφική παράσταση της καμπύλης

$$x = 3 - |t|, \quad y = t - 1, \quad -5 \le t \le 5,$$

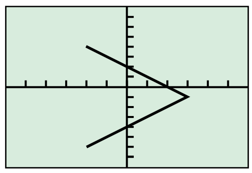
που φαίνεται στο σχήμα. *Εργαζόμενοι σε ομάδες των δύο-τριών ατόμων* βρείτε τις τιμές του t για τις οποίες το γράφημα εντοπίζεται στο εκάστοτε τεταρτημόριο.

39. Τεταρτημόριο I

40. Τεταρτημόριο II

41. Τεταρτημόριο III

42. Τεταρτημόριο IV



[–6, 6] επί [–8, 8]

T Στις Ασκήσεις 43-48, σχεδιάστε τις εξισώσεις στα διαστήματα που δίδονται.

43. *Έλλειψη* $x = 4\cos t$, $y = 2\sin t$, στο διάστημα

(α) $0 \le t \le 2\pi$ **(β)** $0 \le t \le \pi$

(γ) $-\pi/2 \le t \le \pi/2$.

44. *Κλάδος υπερβολής* $x = \sec t$ (γράψτε το ως $1/\cos(t)$), $y = \tan t$ (γράψτε το ως $\sin(t)/\cos(t)$), στο διάστημα

(α) $-1{,}5 \le t \le 1{,}5$ **(β)** $-0{,}5 \le t \le 0{,}5$

(γ) $-0{,}1 \le t \le 0{,}1$.

45. *Παραβολή* $x = 2t + 3$, $y = t^2 - 1$, $-2 \le t \le 2$

46. *Μια όμορφη καμπύλη (δελτοειδής)*

$$x = 2\cos t + \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t, \; 0 \le t \le 2\pi$$

Τι θα συμβεί αν στις εξισώσεις των x και y θέσετε όπου 2 το -2; Για να το μάθετε, σχεδιάστε τις εξισώσεις που προκύπτουν.

47. *Μια ακόμη πιο όμορφη καμπύλη*

$$x = 3\cos t + \cos 3t, \quad y = 3\sin t - \sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Τι θα συμβεί αν στις εξισώσεις των x και y θέσετε όπου 3 το -3; Για να το μάθετε, σχεδιάστε τις εξισώσεις που προκύπτουν.

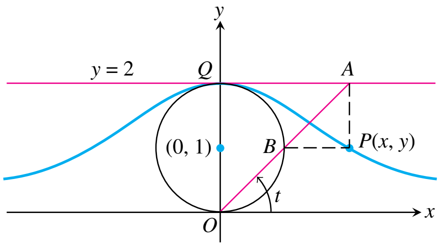
48. *Κυκλοειδής* $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, στο διάστημα

(α) $0 \le t \le 2\pi$ **(β)** $0 \le t \le 4\pi$

(γ) $\pi \le t \le 3\pi$.

Επεκτείνοντας τις έννοιες

49. *Η μάγισσα της Agnesi* Η επονομαζόμενη «μάγισσα της Agnesi» είναι μια καμπύλη σχήματος καμπάνας που μπορεί να κατασκευαστεί ως ακολούθως: Ξεκινάμε με τον μοναδιαίο κύκλο ακτίνας 1 και κέντρο το σημείο $(0, 1)$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Επιλέγουμε ένα σημείο A επί της ευθείας $y = 2$, και το ενώνουμε με την αρχή μέσω ενός ευθύγραμμου τμήματος. Καλούμε B το σημείο τομής του ευθύγραμμου τμήματος με τον κύκλο. Έστω P το σημείο όπου η κατακόρυφος από το A τέμνει την οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το B. Η «μάγισσα» θα είναι η καμπύλη που διατρέχει το P καθώς το A κινείται επί της ευθείας $y = 2$.

Βρείτε μια παραμετρικοποίηση της ευθείας εκφράζοντας τις συντεταγμένες της «μάγισσας» συναρτήσει του t, το οποίο είναι το ακτινιακό μέτρο της γωνίας που σχηματίζει το ευθύγραμμο τμήμα OA με τον θετικό ημιάξονα x. Οι ακόλουθες ισότητες (που μπορείτε να θεωρήσετε ως δεδομένες) θα σας φανούν χρήσιμες:

(i) $x = AQ$.

(ii) $y = 2 - AB \sin t$.

(iii) $AB \cdot AO = (AQ)^2$.

50. *Παραμετρικοποίηση ευθειών και ευθύγραμμων τμημάτων*

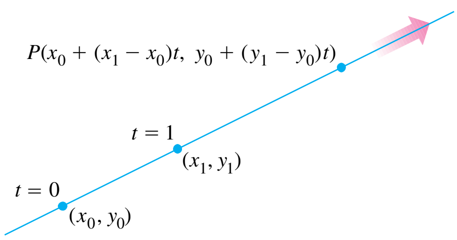
(α) Δείξτε ότι οι εξισώσεις και το παραμετρικό διάστημα

$$x = x_0 + (x_1 - x_0)t,\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t,\ -\infty < t < \infty,$$

περιγράφουν την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (x_0, y_0) και (x_1, y_1) (Σχήμα 62).

(β) Για το ίδιο παραμετρικό διάστημα, εκφράστε παραμετρικά την ευθεία που διέρχεται από το σημείο (x_1, y_1) και από την αρχή των αξόνων.

(γ) Για το ίδιο παραμετρικό διάστημα, εκφράστε παραμετρικά την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(-1, 0)$ και $(0, 1)$.

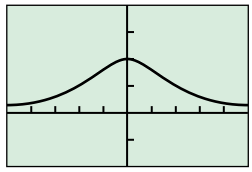


T 51. *Σχεδίαση της μάγισσας της Agnesi* Η μάγισσα της Agnesi είναι η καμπύλη

$$x = 2\cot t, \quad y = 2\sin^2 t, \quad 0 < t < \pi.$$

(α) Σχεδιάστε την καμπύλη στην περιοχή που ορίζεται από το παρακάτω σχήμα. Ποιο κλειστό παραμετρικό διάστημα επιλέξατε στον υπολογιστή σας; Ποια είναι η φορά διαγραφής της καμπύλης (από δεξιά προς τα αριστερά ή αντιστρόφως); Μέχρι ποια απόσταση εκατέρωθεν της αρχής των αξόνων πιστεύετε ότι εκτείνεται η καμπύλη;

$x = 2\cot t$, $y = 2\sin^2 t$



$[-5, 5]$ επί $[-2, 4]$

(β) Σχεδιάστε τις παραπάνω παραμετρικές εξισώσεις στα παραμετρικά διαστήματα $(-\pi/2, \pi/2)$, $(0, \pi/2)$, και $(\pi/2, \pi)$. Περιγράψτε την καμπύλη που προκύπτει σε κάθε περίπτωση, καθώς και τη φορά διαγραφής της όπως τη βλέπετε στην οθόνη του υπολογιστή σας.

(γ) Τι θα συμβεί αν στην αρχική παραμετρικοποίηση αντικαταστήσετε το $x = 2\cot t$ με το $x = -2\cot t$; Τι θα συμβεί αν αντ' αυτού χρησιμοποιήσετε το $x = 2\cot(\pi - t)$;

T 52. *Υπερβολοειδή* Έστω $x = a\sec t$ και $y = b\tan t$.

(α) *Μάθετε γράφοντας* Θέστε διαδοχικά $a = 1, 2,$ ή 3, και $b = 1, 2,$ ή 3, και σχεδιάστε τις καμπύλες στο παραμετρικό διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$. Εξηγήστε τι βλέπετε και περιγράψτε τον ρόλο των a και b στις παραπάνω παραμετρικές εξισώσεις. (Προσοχή: Αν αυτό που βλέπετε μοιάζει με ασύμπτωτες, δοκιμάστε την προσεγγιστική έκφραση $[-1{,}57,\ 1{,}57]$ για το παραμετρικό διάστημα.)

(β) Θέστε $a = 2$ και $b = 3$, και σχεδιάστε την καμπύλη στο παραμετρικό διάστημα $(\pi/2, 3\pi/2)$. Εξηγήστε τι βλέπετε.

(γ) *Μάθετε γράφοντας* Θέστε $a = 2$ και $b = 3$, και σχεδιάστε την καμπύλη στο παραμετρικό διάστημα $(-\pi/2, 3\pi/2)$. Εξηγήστε γιατί πρέπει να είστε προσεκτικοί όταν σχεδιάζετε στο διάστημα αυτό ή σε οποιοδήποτε άλλο διάστημα που περιέχει το $\pm\pi/2$.

(δ) Αποδείξτε αλγεβρικά ότι

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

(ε) Έστω $x = a\tan t$ και $y = b\sec t$. Επαναλάβετε τα (α), (β), και (δ), τροποποιώντας κατάλληλα το ερώτημα (δ).

7 Μοντέλα μεταβολών

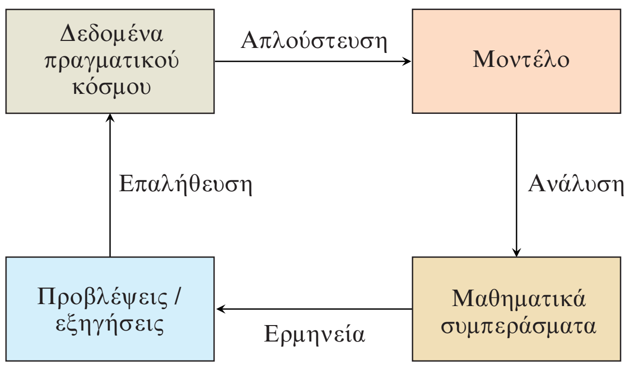
Μαθηματικά μοντέλα • Απλούστευση • Επαλήθευση μοντέλου • Μια διαδικασία κατασκευής μοντέλου • Εμπειρική κατασκευή μοντέλων: κατανόηση της χαρακτηριστικής συμπεριφοράς των πειραματικών δεδομένων • Χρήση απειροστικού λογισμού στην κατασκευή μοντέλων

CD-ROM Δικτυότοπος

Για να αποκτήσουμε πληρέστερη κατανόηση του κόσμου που μας περιβάλλει, περιγράφουμε (όπου αυτό είναι δυνατόν) τα φαινόμενα που μας ενδιαφέρουν με μαθηματικό τρόπο (δηλαδή μέσω μίας συνάρτησης ή μιας εξίσωσης). Ένα τέτοιο **μαθηματικό μοντέλο** δεν είναι μια απόλυτα ακριβής περιγραφή, αλλά μια εξιδανίκευση (απλούστευση) του πραγματικού φαινομένου. Παρόλο που κάθε μοντέλο έχει τους περιορισμούς του, ένα καλό μοντέλο μπορεί να μας προσφέρει χρήσιμα αποτελέσματα και συμπεράσματα. Στην παρούσα ενότητα, θα παρουσιάσουμε τη διαδικασία μοντελοποίησης (κατασκευής μοντέλων) και θα δώσουμε μερικά διαφωτιστικά παραδείγματα.

Μαθηματικά μοντέλα

Όταν κατασκευάζουμε μοντέλα για τον κόσμο που μας περιβάλλει, μας ενδιαφέρει συχνά η πρόβλεψη της τιμής μιας μεταβλητής σε κάποια μελλοντική χρονική στιγμή. Η μεταβλητή αυτή μπορεί να είναι ένας πληθυσμός, η αξία ενός ακινήτου, ή ο αριθμός των ασθενών με συγκεκριμένη μεταδοτική νόσο. Συχνά ένα μαθηματικό μοντέλο μάς βοηθά να καταλάβουμε καλύτερα μια δεδομένη συμπεριφορά, ή να προγραμματίσουμε καλύτερα το μέλλον. Θα θεωρούμε λοιπόν κάθε μαθηματικό μοντέλο ως μια μαθηματική κατασκευή σχεδιασμένη με σκοπό τη μελέτη ενός συγκεκριμένου πραγματικού συστήματος ή μιας συμπεριφοράς που μας ενδιαφέρει. Το μοντέλο μάς επιτρέπει να εξαγάγουμε μαθηματικά συμπεράσματα σχετικά με τη συμπεριφορά αυτή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 63. Η ανάλυση και η ερμηνεία τέτοιων συμπερασμάτων μπορεί να βοηθήσει στη λήψη αποφάσεων και στον σχεδιασμό μελλοντικών ενεργειών.



Σχημα 63 Η διαδικασία κατασκευής ενός μοντέλου ξεκινά με την προσεκτική εξέταση δεδομένων του πραγματικού κόσμου.

Απλούστευση

Τα περισσότερα μοντέλα απλουστεύουν την πραγματικότητα. Εν γένει, τα μοντέλα μπορούν να αποδώσουν μονάχα *κατά προσέγγιση* τη συμπεριφορά του πραγματικού κόσμου. Μια πολύ ισχυρή σχέση απλουστεύσεως είναι η **αναλογία**.

Ορισμός **Αναλογία**

Δύο μεταβλητές y και x είναι **ανάλογες** (η μία της άλλης) εάν η μία είναι πάντα σταθερό πολλαπλάσιο της άλλης· δηλαδή εάν

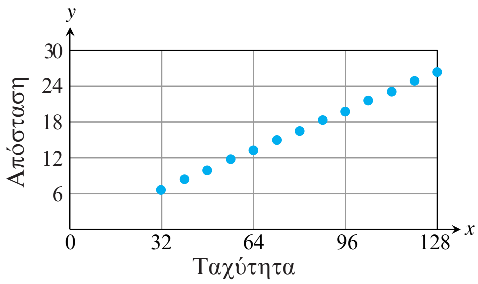
$$y = kx,$$

όπου k μια μη μηδενική σταθερά.

Ο ορισμός αυτός συνεπάγεται ότι η γραφική παράσταση του y έναντι του x είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η παρατήρηση αυτή χρησιμεύει στον έλεγχο του κατά πόσο ένα σύνολο από αριθμητικά δεδομένα υπακούει σε μια σχέση αναλογίας. Αν η υπόθεση της αναλογίας είναι βάσιμη και τοποθετήσουμε σε διάγραμμα τα σημεία με συντεταγμένες τις τιμές των δύο μεταβλητών, θα πάρουμε μια γραφική παράσταση που θα μοιάζει με ευθεία διερχόμενη από την αρχή. Ιδού ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 1 Έλεγχος για σχέση αναλογίας στην απόσταση αντίδρασης οδηγού

Κατά τη διάρκεια ενός απότομου φρεναρίσματος, ο οδηγός του αυτοκινήτου καλείται να αντιδράσει άμεσα σε μια κατάσταση επείγουσας ανάγκης, πατώντας φρένο και ακινητοποιώντας το όχημα. Ποια είναι μια *ασφαλής απόσταση από προπορευόμενο όχημα* για τους οδηγούς τροχοφόρων; Προκειμένου να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, καλό θα ήταν να γνωρίζουμε πόση απόσταση (από τη στιγμή που η επιτακτική ανάγκη τροχοπεδήσεως γίνεται αντιληπτή) διανύει ένα όχημα με δεδομένη ταχύτητα προτού ο οδηγός πατήσει φρένο (*απόσταση αντίδρασης οδηγού*). Η Υπηρεσία Δημοσίων Οδών των Η.Π.Α. (U.S. Bureau of Public Roads) έχει συγκεντρώσει στατιστικά στοιχεία για την απόσταση αντίδρασης και την απόσταση τροχοπέδησης για μεγάλο αριθμό οδηγών. (Η *απόσταση τροχοπέδησης* είναι αυτή που διανύει το όχημα από τη στιγμή που πατιέται φρένο μέχρι να ακινητοποιηθεί.) Στον Πίνακα 23, x είναι η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου σε χιλιόμετρα ανά ώρα (km/h) και y η απόσταση σε μέτρα (m) που διανύει προτού πατηθεί φρένο.



ΣΧΗΜΑ 64 Απόσταση αντίδρασης οδηγού έναντι της ταχύτητας.

Υποθέτουμε ότι ο χρόνος που χρειάζεται ένας μέσος οδηγός μέχρι να αντιδράσει πατώντας φρένο είναι περίπου σταθερός (ανεξάρτητος της ταχύτητας). Συνεπώς, η διανυθείσα απόσταση μέχρι να αντιδράσει ο οδηγός θα είναι ανάλογη της ταχύτητας. Ας ελέγξουμε την υποτιθέμενη αυτή αναλογία απεικονίζοντας σε διάγραμμα τη διανυθείσα απόσταση έναντι του χρόνου. Βάσει του Σχήματος 64 μπορούμε εύλογα να ισχυριστούμε ότι τα σημεία του διαγράμματος διατάσσονται κατά μήκος μιας ευθείας που διέρχεται από την αρχή. Συνεπώς, η υπόθεση περί αναλογίας είναι αξιόπιστη.

Πίνακας 23 Απόσταση αντίδρασης οδηγού

x (km/h)	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128
y (m)	6,4	8,2	9,6	11,4	12,8	14,6	16	17,8	19,2	21	22,4	24,2	25,6

Από το διάγραμμα μπορούμε ακόμη να εκτιμήσουμε τη σταθερά αναλογίας. Από το πρώτο και τελευταίο σημείο βρίσκουμε ότι η ευθεία που προσεγγίζει τα δεδομένα των μετρήσεων έχει κλίση που δίδεται από το *πηλίκο μεταβολών* $= (25{,}6 - 6{,}4)/(128 - 32) = 0{,}2$. Το μοντέλο αναλογίας προβλέπει ότι η απόσταση αντίδρασης του οδηγού είναι

$$y = 0{,}2x. \tag{1}$$

Επαλήθευση μοντέλου

Μπορούμε να εξακριβώσουμε το κατά πόσο ταιριάζει η Εξίσωση (1) στα δεδομένα υπερθέτοντας το γράφημά της στο διάγραμμα διασποράς των δεδομένων. Μια εναλλακτική διαδικασία είναι να εξετάσουμε τα επιμέρους σφάλματα, δηλαδή τα *υπόλοιπα* (Πίνακας 24):

$$\text{Υπόλοιπα} = \text{παρατηρήσεις} - \text{προβλέψεις}.$$

Πίνακας 24 Υπολογισμός υπολοίπων

Ταχύτητα (km/h) x	**Παρατήρηση (m)**	**Πρόβλεψη (m)** $y = 0{,}2x$	**Υπόλοιπα (m)**
32	6,4	6,4	0,0
40	8,2	8	0,2
48	9,6	9,6	0,0
56	11,4	11,2	0,2
64	12,8	12,8	0,0
72	14,6	14,4	0,2
80	16	16	0,0
88	17,8	17,6	0,2
96	19,2	19,2	0,0
104	21	20,8	0,2
112	22,4	22,4	0,0
120	24,2	24	0,2
128	25,6	25,6	0,0

Τα υπόλοιπα του Πίνακα 24 είναι σχετικά μικρά (το μεγαλύτερο είναι 0,2 m) συγκρινόμενα με την απόσταση, η οποία κυμαίνεται από 6,4 έως 25,6 m, και δεν εμφανίζουν κάποια χαρακτηριστική συμπεριφορά που να εμπνέει ανησυχία. Σημειώστε ότι στην ταχύτητα των 96 km/h, δηλ. 26 m/sec, ο μέσος οδηγός διανύει 20 m προτού πατήσει φρένο. Ένας συνήθης οδηγός χρειάζεται λοιπόν (20 m)/(26 m/sec) = 0,76 sec για να αντιδράσει. Αυτός ο χρόνος αντίδρασης φαίνεται να ισχύει για ένα μεγάλο και ετερόκλητο πλήθος οδηγών. Δεδομένης της ασαφούς φύσης του προβλήματος που εξετάζουμε, δεχόμαστε το απλό αυτό μοντέλο ως κατάλληλο για την πρόβλεψη της αποστάσεως αντίδρασης. Στις ασκήσεις, σας ζητείται να αναλύσετε την *απόσταση τροχοπεδήσεως* προκειμένου να προτείνετε μια *ασφαλή απόσταση από προπορευόμενο όχημα* και να επινοήσετε έναν απλό κανόνα που θα μπορούν να χρησιμοποιούν οι αυτοκινητιστές για να υπολογίζουν κατ' εκτίμηση μια απόσταση ασφαλείας.

Μια γόνιμη τεχνική που μας επιτρέπει να κρίνουμε την επάρκεια ενός μοντέλου, καθώς και να διερευνούμε τρόπους βελτίωσής του, είναι να απεικονίσουμε σε διάγραμμα τα υπόλοιπα έναντι της ανεξάρτητης μεταβλητής. Κατόπιν παρατηρούμε το σχετικό μέγεθος των σφαλμάτων. Αν το διάγραμμα εμφανίζει μια χαρακτηριστική συμπεριφορά, αυτό σημαίνει ότι το μοντέλο θα μπορούσε να βελτιωθεί αν συλλάβουμε στο μυαλό μας και ενσωματώσουμε στο μοντέλο την εν λόγω συμπεριφορά.

Μια διαδικασία κατασκευής μοντέλου

Η ακόλουθη διαδικασία έχει αποδειχθεί εκπαιδευτικά χρήσιμη για το πώς κατασκευάζουμε μοντέλα. Κατά την κατασκευή της Εξισώσεως (1), ακολουθήσαμε σε γενικές γραμμές τα εξής βήματα:

Τα βήματα κατασκευής ενός μοντέλου

Βήμα 1. *Εντοπίζουμε το πρόβλημα.* Για να προβούμε σε εκτίμηση της απόστασης ασφαλείας από προπορευόμενο όχημα, θα πρέπει πρώτα να έχουμε μια εκτίμηση της απόστασης αντίδρασης του μέσου οδηγού.

Βήμα 2. *Κάνουμε υποθέσεις για το ποιες μεταβλητές χρειαζόμαστε, και ποιες οι σχέσεις μεταξύ τους.* Η απόσταση αντίδρασης εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως την ταχύτητα, την ορατότητα, τον καιρό, καθώς και την ηλικία του οδηγού. Χάριν απλότητας, υποθέτουμε ότι η απόσταση αντίδρασης εξαρτάται μόνον από την ταχύτητα, και συγκεκριμένα ότι είναι ανάλογη προς αυτήν.

Βήμα 3. *Βρίσκουμε μια συνάρτηση ή μια γραφική παράσταση που ικανοποιεί τις σχέσεις αυτές.* Ελέγχουμε την ορθότητα της υπόθεσής μας περί αναλογίας, προσδιορίζοντας κατά πόσο η γραφική παράσταση της απόστασης αντίδρασης έναντι της ταχύτητας είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή. Εφόσον είναι ευθεία, μπορούμε να υπολογίσουμε την κλίση, που είναι και η σταθερά αναλογίας.

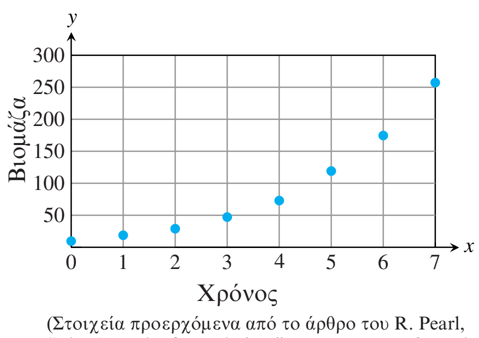
Βήμα 4. *Επαληθεύουμε το μοντέλο.* Μελετούμε το μέγεθος και την όποια χαρακτηριστική συμπεριφορά των υπολοίπων.

Εμπειρική κατασκευή μοντέλων: κατανόηση της χαρακτηριστικής συμπεριφοράς των πειραματικών δεδομένων

Στο Παράδειγμα 1, υποθέσαμε την ύπαρξη μιας μαθηματικής σχέσης μεταξύ της εξαρτημένης και της ανεξάρτητης μεταβλητής. Μια άλλη μέθοδος κατασκευής μοντέλων είναι η συλλογή πειραματικών δεδομένων και η εύρεση ενός μοντέλου που αποδίδει τη χαρακτηριστική συμπεριφορά των δεδομένων. Η εμπειρική αυτή μέθοδος παρουσιάζει τόσο πλεονεκτήματα όσο και μειονεκτήματα.

Παράδειγμα 2 Εύρεση καμπύλης για την πρόβλεψη πληθυσμών

Μερικές φορές θέλουμε να προβλέψουμε τον μελλοντικό πληθυσμό ενός συνόλου ατόμων, π.χ. το πλήθος των ψαριών μιας ιχθυοκαλλιέργειας. Το Σχήμα 65 δείχνει ένα διάγραμμα διασποράς για δεδομένα που συνέλεξε ο R. Pearl για μια αποικία κυττάρων μαγιάς (αναφέρονται ως **βιομάζα** στο διάγραμμα) τα οποία σε θρεπτικό περιβάλλον αυξάνονται με τον χρόνο (που μετριέται σε ώρες) .



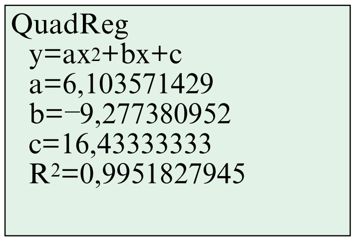
(Στοιχεία προερχόμενα από το άρθρο του R. Pearl, "The Growth of Population," *Quart. Rev. Biol.*, Vol. 2 (1927), pp. 532–548.

Χρόνος (h) x	Βιομάζα y
0	9,6
1	18,3
2	29,0
3	47,2
4	71,1
5	119,1
6	174,6
7	257,3

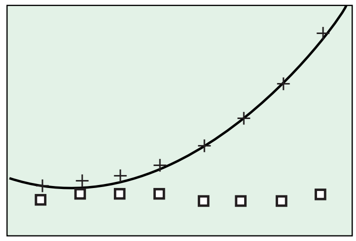
Σχημα 65 Βιομάζα καλλιέργειας μικροοργανισμών μαγιάς, έναντι του χρόνου.

Η καμπύλη που ορίζουν τα σημεία του διαγράμματος φαίνεται αρκετά ομαλή, με τάση καμπύλωσης προς τα πάνω. Θα προσπαθήσουμε να αποδώσουμε τη συμπεριφορά αυτή προσαρμόζοντας στα δεδομένα ένα πολυώνυμο (π.χ., το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $y = ax^2 + bx + c$), μια καμπύλη δύναμης ($y = axb$), ή μια εκθετική καμπύλη ($y = aebx$). Στο Σχήμα 66 χρησιμοποιήσαμε υπολογιστή για να προσαρμόσουμε στα δεδομένα ένα δευτεροβάθμιο μοντέλο.

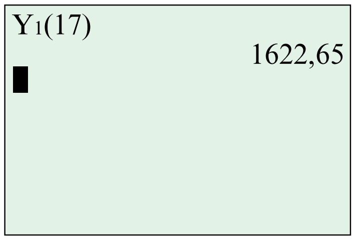
Το δευτεροβάθμιο μοντέλο $y = 6{,}10x^2 - 9{,}28x + 16{,}43$ φαίνεται να ταιριάζει αρκετά καλά στα πειραματικά δεδομένα (Σχήμα 66β). Χρησιμοποιώντας το μοντέλο αυτό μπορούμε να προβλέψουμε τον πληθυσμό μετά από 17 ώρες, οπότε βρίσκουμε $y(17) = 1622{,}65$. Ας εξετάσουμε λεπτομερέστερα τα δεδομένα του Pearl προκειμένου να δούμε αν το δευτεροβάθμιο μοντέλο παραμένει αξιόπιστο.



(α)



(β)

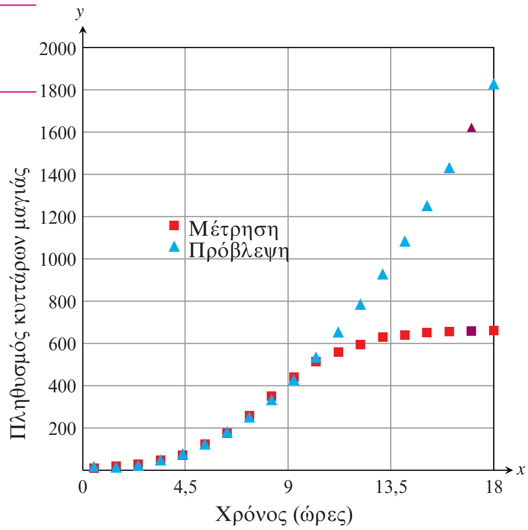


(γ)

Σχημα 66 Χρήση υπολογιστή για (α) προσαρμογή μιας δευτεροβάθμιας παλινδρομικής εξίσωσης στα δεδομένα· (β) απεικόνιση στο ίδιο διάγραμμα των αριθμητικών δεδομένων, του μοντέλου και των υπολοίπων· και (γ) πρόβλεψη της τιμής $y(17)$.

Στο Σχήμα 67 εμφανίζονται όλα τα πειραματικά δεδομένα του Pearl. Βλέπετε λοιπόν ότι η πρόβλεψη $y(17) = 1622{,}65$ υπερεκτιμά κατά πολύ τον μετρούμενο πληθυσμό, που ισούται με 659,6. Γιατί λοιπόν αποτυγχάνει το δευτεροβάθμιο μοντέλο;

Χρόνος (h) x	Μέτρηση y	Πρόβλεψη y
0	9,6	16,4
1	18,3	13,3
2	29,0	22,3
3	47,2	43,5
4	71,1	77,0
5	119,1	22,6
6	174,6	180,5
7	257,3	250,6
8	350,7	332,8
9	441,0	427,3
10	513,3	534,0
11	559,7	652,9
12	594,8	784,0
13	629,4	927,3
14	640,8	1082,9
15	651,1	1250,6
16	655,9	1430,5
17	659,6	1622,7
18	661,8	1827,0



Σχημα 67 Το πλήρες σύνολο των αριθμητικών δεδομένων του Pearl.

Το πρόβλημα έγκειται στον κίνδυνο που εγκυμονεί η πρόβλεψη πέραν του εύρους των δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του εμπειρικού μοντέλου. (Το εύρος δεδομένων από τα οποία δομήθηκε το μοντέλο μας ήταν $0 \leq x \leq 7$.) Τέτοιου είδους *συ-*

μπερασμοί μπορούν να αποβούν άκρως επισφαλείς, ιδίως όταν το μοντέλο μας δεν υποστηρίζεται από μια βαθύτερη κατανόηση της δυναμικής του προβλήματος που μελετούμε. Στο παράδειγμα με τη μαγιά, για ποιον λόγο θα έπρεπε να αναμένουμε ότι η πληθυσμιακή αύξηση διέπεται από μια δευτεροβάθμια πολυωνυμική συνάρτηση; Γιατί όχι από μια εκθετική συνάρτηση; Έχοντας κατά νου αυτές τις διαπιστώσεις, πώς λοιπόν θα μπορούμε να προβλέπουμε μελλοντικές τιμές; Στο σημείο αυτό ο απειροστικός λογισμός μπορεί πολλές φορές να μας βοηθήσει.

Χρήση απειροστικού λογισμού στην κατασκευή μοντέλων

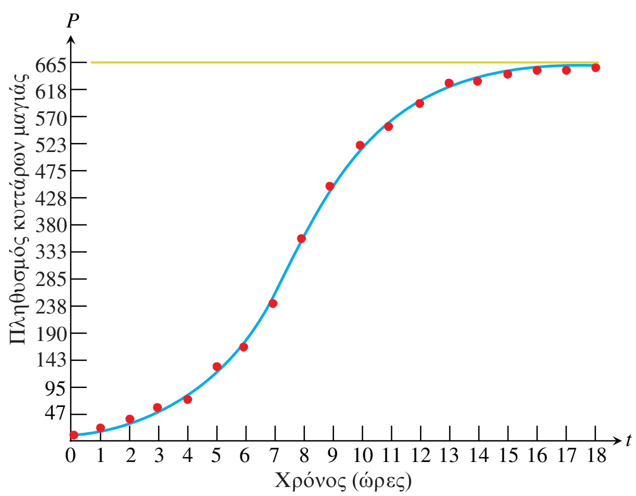
CD-ROM
Δικτυότοπος
Ιστορικά στοιχεία

Στο CD-ROM παρατίθεται μια λεπτομερής παρουσίαση της εξέλιξης των ιδεών του Απειροστικού Λογισμού.

Η εφαρμογή του απειροστικού λογισμού εμπεριέχει τη μελέτη *μεταβολών*. Ο λογισμός έχει τις απαρχές του στην περιέργειά μας σχετικά με την κίνηση, και στην ανάγκη μας να αναπτύξουμε μια βαθύτερη κατανόησή της. Η αναζήτηση των νόμων που διέπουν τις κινήσεις των πλανητών, η μελέτη του εκκρεμούς και η εφαρμογή της σχετικής θεωρίας στην ωρολογοποιία, καθώς και οι νόμοι που καθορίζουν την κίνηση της μπάλας του κανονιού, αποτελούσαν τα είδη των προβλημάτων που ερέθιζαν τη δημιουργική φαντασία των μαθηματικών και των άλλων επιστημόνων κατά τον δέκατο έκτο και δέκατο έβδομο αιώνα. Σε πολλές περιπτώσεις, παρατηρούμε με ποιον τρόπο συμβαίνει η μεταβολή και διατυπώνουμε υποθέσεις για τις διάφορες σχέσεις εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών, με τρόπο παρόμοιο όπως και στο Παράδειγμα 1. Στο Κεφάλαιο 6, θα κατασκευάσουμε μοντέλα πληθυσμιακής αύξησης εφαρμόζοντας μεθόδους του απειροστικού λογισμού. Στην περίπτωση της καλλιέργειας μαγιάς, θα δείτε ότι η πηγή της τροφής που παρέχεται στους μικροοργανισμούς περιορίζει την ανάπτυξή τους. Με άλλα λόγια, το περιβάλλον μπορεί να υποστηρίξει (να θρέψει) μόνον έναν περιορισμένο πληθυσμό. Καθώς ο πληθυσμός πλησιάζει αυτήν την οριακή του τιμή (που καλείται *φέρουσα ικανότητα*), επιβραδύνεται η περαιτέρω αύξηση. Θα αποδειχθεί ότι το μοντέλο που εκφράζει την πληθυσμιακή αύξηση σε μια καλλιέργεια μαγιάς είναι η *λογιστική* εξίσωση

$$P = \frac{665}{1 + 73{,}8e^{-0{,}55t}}. \qquad (2)$$

Η γραφική παράσταση της Εξίσωσης (2), σχεδιασμένη στο ίδιο σχήμα με το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων του Pearl, φαίνεται στο Σχήμα 68. Στο Κεφάλαιο 6 θα δείτε πώς προκύπτει η Εξίσωση (2).



Σχημα 68 Η λογιστική καμπύλη της Εξίσωσης (2) απεικονίζεται στο ίδιο σχήμα με το διάγραμμα διασποράς των πειραματικών δεδομένων του Pearl, που δίδονται στο Σχήμα 67.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7

1. *Σταθερές αναλογίας* Προσδιορίστε αν τα παρακάτω αριθμητικά δεδομένα υποστηρίζουν την εκάστοτε υποτιθέμενη σχέση αναλογίας. Αν η υπόθεση αναλογίας είναι βάσιμη, εκτιμήστε τη σταθερά αναλογίας.

(α) y ανάλογο του x

y	1	2	3	4	5	6	7	8
x	5,9	12,1	17,9	23,9	29,9	36,2	41,8	48,2

(β) y ανάλογο του $x^{1/2}$

y	3,5	5	6	7	8
x	3	6	9	12	15

(γ) y ανάλογο του 3^x

y	5	15	45	135	405	1215	3645	10.935
x	0	1	2	3	4	5	6	7

(δ) y ανάλογο του $\ln x$

y	2	4,8	5,3	6,5	8,0	10,5	14,4	15,0
x	2,0	5,0	6,0	9,0	14,0	35,0	120,0	150,0

Κατασκευή μοντέλων

CD-ROM Δικτυότοπος

2. *Επιμήκυνση ελατηρίου* Προκειμένου να σχεδιαστούν οχήματα διαφόρων τύπων (π.χ. τανκ, ανατρεπόμενο φορτηγό, όχημα γενικής χρήσεως, πολυτελές αυτοκίνητο) που να παρουσιάζουν επιθυμητή συμπεριφορά στις εκάστοτε οδικές συνθήκες, θα πρέπει να βρεθούν μοντέλα της απόκρισης ελατηρίου σε διάφορα φορτία. Εκτελέσαμε ένα πείραμα προκειμένου να μετρήσουμε την επιμήκυνση y ενός ελατηρίου, μετρούμενης σε cm, συναρτήσει του αριθμού x των μονάδων της μάζας που εξαρτώνται από το ελατήριο.

x (αριθμός μονάδων μάζας)	0	1	2	3	4	5
y (επιμήκυνση σε cm)	0	0,875	1,721	2,641	3,531	4,391

x (αριθμός μονάδων μάζας)	6	7	8	9	10
y (επιμήκυνση σε cm)	5,241	6,120	6,992	7,869	8,741

(α) Κατασκευάστε ένα μοντέλο που να συσχετίζει την επιμήκυνση του ελατηρίου με τον αριθμό των εξαρτώμενων από αυτό μονάδων μάζας.

(β) Πόσο καλά ταιριάζει το μοντέλο σας στα πειραματικά δεδομένα;

(γ) Κάντε μια πρόβλεψη για την επιμήκυνση του ελατηρίου όταν εξαρτώνται από αυτό 13 μονάδες μάζας. Πόση εμπιστοσύνη έχετε στην πρόβλεψή σας αυτή;

3. *Απόσταση τροχοπεδήσεως* Πόση απόσταση διανύει ένα όχημα από τη στιγμή που πατιέται το φρένο του; Μελετήστε τα παρακάτω πειραματικά δεδομένα, όπου x είναι η ταχύτητα του αυτοκινήτου σε km ανά ώρα, και y είναι η απόσταση σε m που απαιτείται για να ακινητοποιηθεί το όχημα από τη στιγμή που φρενάρει ο οδηγός.

x (km/h)	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120
y (m)	9,7	14,3	19,8	26,5	34,1	42,6	52,1	62,1	73,4	85,9	99	114,6

Κατασκευάστε και ελέγξτε ένα μοντέλο που να συσχετίζει την απόσταση τροχοπεδήσεως με την ταχύτητα του οχήματος.

CD-ROM Δικτυότοπος

4. *Απόσταση ασφαλείας από προπορευόμενο όχημα* Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση (1) για την απόσταση αντίδρασης, σε συνδυασμό με το μοντέλο που κατασκευάσατε στην Άσκηση 3 για την απόσταση τροχοπεδήσεως, προκειμένου να φτιάξετε ένα μοντέλο για τη συνολική απόσταση ακινητοποίησης (απόσταση αντίδρασης συν τροχοπεδήσεως). Ένας κανόνας που δίδεται συχνά για την απόσταση ασφαλείας είναι να αφήνετε χρόνο αντίδρασης 2 sec μεταξύ του αυτοκινήτου σας και του προπορευόμενου οχήματος. Συμφωνεί ο κανόνας αυτός με το μοντέλο σας για τη συνολική απόσταση ακινητοποίησης; Αν όχι, προτείνετε έναν καλύτερο κανόνα.

5. *Καρδιοπάθεια* Η φαρμακευτική ουσία διγοξίνη χορηγείται σε καρδιοπαθείς. Οι γιατροί πρέπει να χορηγούν σε κάθε ασθενή ποσότητα τέτοια ώστε η συγκέντρωση της ουσίας στο αίμα να διατηρείται πάνω από ένα *αποτελεσματικό επίπεδο,* χωρίς όμως να υπερβαίνει κάποιο *επίπεδο ασφαλείας*. Μελετήστε αρχικά τον ρυθμό μείωσης της διγοξίνης στο αίμα. Έστω ότι σε κάποιον ασθενή χορηγείται ενδοφλεβίως μια αρχική ποσότητα 0,5 mg. Στον πίνακα που ακολουθεί, το x παριστάνει τον αριθμό των ημερών μετά τη χορήγηση της αρχικής δόσης, ενώ το y παριστάνει την ποσότητα της διγοξίνης που παραμένει στο αίμα του ασθενή.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0,5000	0,345	0,238	0,164	0,113	0,078	0,054	0,037	0,026

(α) Κατασκευάστε ένα μοντέλο που να συσχετίζει την ποσότητα της διγοξίνης στο αίμα με τον αριθμό των ημερών που παρήλθαν από τη χορήγησή της.

(β) Πόσο καλά ταιριάζει το μοντέλο σας στα πειραματικά δεδομένα;

(γ) Κάντε μια πρόβλεψη για την ποσότητα διγοξίνης στο αίμα μετά από 12 ημέρες.

CD-ROM Δικτυότοπος

6. *Ραδιενέργεια* Μια ραδιενεργός χρωστική ουσία χορηγείται ενδοφλεβίως σε ασθενή λίγο πριν την ακτινογράφησή του. Οι ποσότητες ραδιενέργειας στο αίμα του ασθενούς μετρήθηκαν σε «συμβάντα» ανά λεπτό (cpm) κατά τη χρονική διάρκεια μετά την ένεση, αποδίδοντας τον ακόλουθο πίνακα τιμών.

x χρόνος (min)	0	1	2	3	4	5
y ραδιενέργεια (cpm)	10.023	8174	6693	5500	4489	3683

x χρόνος (min)	6	7	8	9	10
y ραδιενέργεια (cpm)	3061	2479	2045	1645	1326

(α) Κατασκευάστε ένα μοντέλο που να συσχετίζει τα επίπεδα της ραδιενέργειας με τον χρόνο.

(β) Συγκρίνετε τις μετρήσεις με τις προβλέψεις σας.

(γ) Στηριζόμενοι στο μοντέλο σας, κάντε μια πρόβλεψη του πότε θα έχει ελαττωθεί η ποσότητα ραδιενέργειας στα 500 cpm.

7. *Ποσότητα φαρμακευτικής ουσίας* Καθώς ο χρόνος περνά, η συγκέντρωση στο αίμα μιας φαρμακευτικής ουσίας που χορηγήθηκε σε πειραματόζωα μειώνεται. Οι συγκεντρώσεις σε μέρη ανά εκατομμύριο (ppm) φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

Συγκέντρωση (ppm)	853	587	390	274	189	130
Χρόνος (ημέρες)	0	1	2	3	4	5

Συγκέντρωση (ppm)	97	67	50	40	31
Χρόνος (ημέρες)	6	7	8	9	10

(α) Κατασκευάστε ένα μοντέλο που να συσχετίζει την ποσότητα της φαρμακευτικής ουσίας με τον χρόνο.

(β) Συγκρίνετε τις μετρήσεις με τις προβλέψεις σας.

(γ) Στηριζόμενοι στο μοντέλο σας, κάντε μια πρόβλεψη του πότε θα έχει ελαττωθεί η ποσότητα του φαρμάκου σε 10 μέρη ανά εκατομμύριο (ppm).

CD-ROM Δικτυότοπος

8. *Πεύκα* Στον παρακάτω πίνακα, το x παριστάνει την περιφέρεια του κορμού ενός πεύκου σε cm, στο ύψος του ώμου· το y παριστάνει το συνολικό μήκος δοκών (m) ξυλείας που προκύπτουν.

x (cm)	43,2	48,3	50,8	58,4	63,5	71,1	81,3	96,5	99,1	104,1
y (m)	5,8	7,6	9,8	17,4	21,6	34,4	37,5	76,8	78,9	89,6

Κατασκευάστε και ελέγξτε τα ακόλουθα δύο μοντέλα: ότι το εκμεταλλεύσιμο συνολικό μήκος δοκών ξυλείας είναι ανάλογο **(α)** του τετραγώνου της περιφέρειας και **(β)** του κύβου της περιφέρειας. Ποιο μοντέλο είναι καλύτερο; Κάποιο από τα δύο μοντέλα «ερμηνεύει» καλύτερα τα δεδομένα από ό,τι το άλλο;

CD-ROM Ιστοτόπος

9. *Μαύρη πέρκα* Τα αριθμητικά δεδομένα που ακολουθούν παριστάνουν το βάρος w (σε gr) της μαύρης πέρκας της Νέας Υόρκης για διάφορα μήκη l (σε cm).

l (cm)	31,75	32,08	32,08	35,89	36,83	36,83	43,82	45,09
w (gr)	498,95	469,6	498,95	675,05	763,1	792,45	1203,35	1438,15

Κατασκευάστε και ελέγξτε ένα μοντέλο που θεωρεί ότι το βάρος είναι ανάλογο του l^3. Πόσο καλά ταιριάζει στα δεδομένα;

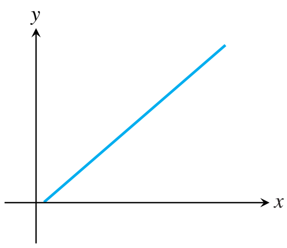
CD-ROM Δικτυότοπος

10. *Σφυγμοί θηλαστικών* Τα αριθμητικά δεδομένα που ακολουθούν συσχετίζουν το βάρος σε γραμμάρια (g) μερικών θηλαστικών, με τον αριθμό των σφυγμών τους ανά λεπτό (bpm). Απεικονίστε τα δεδομένα σε ένα διάγραμμα διασποράς. Μήπως προκύπτει κάποια χαρακτηριστική συμπεριφορά; Αν ναι, βρείτε μια συνάρτηση που να αποδίδει ικανοποιητικά τη συμπεριφορά αυτή. (*Υπόδειξη:* Δοκιμάστε μοντέλα του τύπου $y = x^{-(1/n)}$, όπου n ακέραιος.)

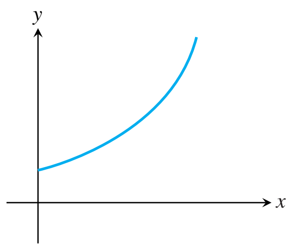
Θηλαστικό	**Σωματικό βάρος x (g)**	**Παλμοί y (bpm)**
Vesperugo pipistrellus (πολύ μικρή νυχτερίδα)	4	660
Ποντίκι	25	670
Αρουραίος	200	420
Ινδικό χοιρίδιο	300	300
Κουνέλι	2.000	205
Μικρόσωμο σκυλί	5.000	120
Μεγαλόσωμο σκυλί	30.000	85
Πρόβατο	50.000	70
Άνθρωπος	70.000	72
Άλογο	450.000	38
Βόδι	500.000	40
Ελέφαντας	3.000.000	48

Συσχέτιση γραφικών παραστάσεων και συμπεριφορών

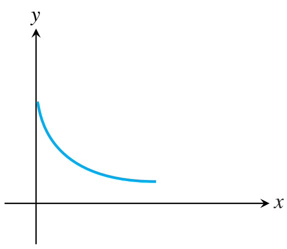
Στις Ασκήσεις 11-14, επιλέξτε τον τύπο γραφικής παράστασης (ή προτείνετε έναν δικό σας) που περιγράφει ποιοτικά την εκάστοτε συμπεριφορά κατά τον καλύτερο τρόπο. Εξηγήστε τις επιλογές σας. Πιθανές απαντήσεις είναι: (α) ευθεία (β) κοίλα άνω, αύξουσα (γ) κοίλα άνω, φθίνουσα (δ) κοίλα κάτω, αύξουσα (ε) κοίλα κάτω, φθίνουσα (στ) λογιστική.



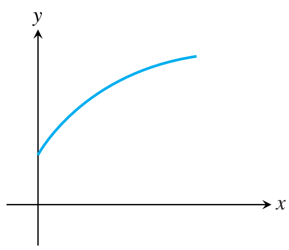
(α)



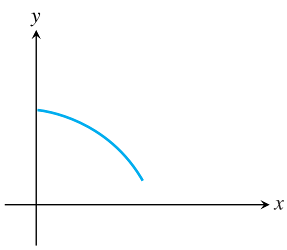
(β)



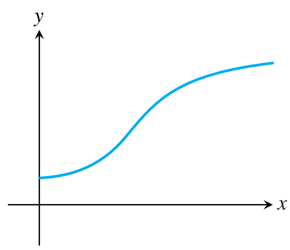
(γ)



(δ)



(ε)



(στ)

11. Η συγκέντρωση χορηγούμενου φαρμάκου στο αίμα, συναρτήσει του χρόνου.

12. Η ικανότητά σας σε ένα μαθησιακό αντικείμενο, συναρτήσει του χρόνου που αφιερώσατε στη μελέτη του.

13. Η ποσότητα του άνθρακα-14 που απομένει σε ένα έργο τέχνης, συναρτήσει του χρόνου.

14. Από τον πόρο εκροής μιας δεξαμενής χύνεται νερό. Συσχετίστε:

(α) Την ταχύτητα εκχύσεως του νερού, με τον χρόνο που παρήλθε.

(β) Το βάθος του νερού στη δεξαμενή, με τον χρόνο που παρήλθε.

15. (Αντίστροφη διαδικασία των Ασκήσεων 11-14.) Προτείνετε μια συμπεριφορά που αποδίδεται ποιοτικά από τα παραπάνω διαγράμματα.

16. Για να μειωθεί η ένταση του φωτός χρησιμοποιούνται επιστρώσεις πλαστικών αποχρώσεων. Συσχετίστε την ένταση του διερχόμενου φωτός με τον αριθμό των επιστρώσεων.

Στις Ασκήσεις 17-20, σχεδιάστε ένα γράφημα που να περιγράφει ποιοτικά την κάθε συμπεριφορά.

17. Ένα μπαλάκι του γκολφ αφήνεται να πέσει σε τσιμεντένιο δάπεδο από ύψος 6 μέτρων. Σχεδιάστε σε ποιοτικό διάγραμμα το ύψος του συναρτήσει του χρόνου πτώσεως.

18. Μία γυάλινη μπίλια αφήνεται να πέσει σε έναν κουβά με λάδι. Σχεδιάστε:

(α) Την ταχύτητα της μπίλιας έναντι του χρόνου.

(β) Την απόσταση που διένυσε έναντι του χρόνου.

19. Ένας αλεξιπτωτιστής πηδά από αεροσκάφος. Μετά από 4 δευτερόλεπτα ελεύθερης πτώσης, ανοίγει το αλεξίπτωτο. Κάντε ένα ποιοτικό διάγραμμα:

(α) Της ταχύτητας του αλεξιπτωτιστή έναντι του χρόνου.

(β) Της απόστασης που διένυσε έναντι του χρόνου.

20. Μια περιοχή απαγόρευσης θήρευσης μπορεί να θρέψει έναν πληθυσμό 500 ελαφιών. Σχεδιάστε τον πληθυσμό των ελαφιών έναντι του χρόνου, αν στην περιοχή τοποθετηθούν αρχικά:

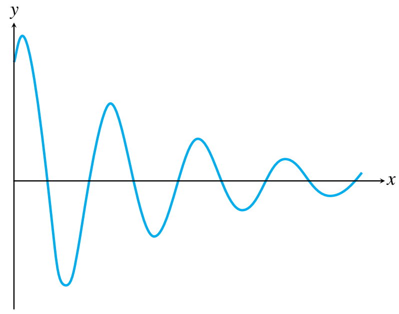
(α) 300 ελάφια.

(β) 500 ελάφια.

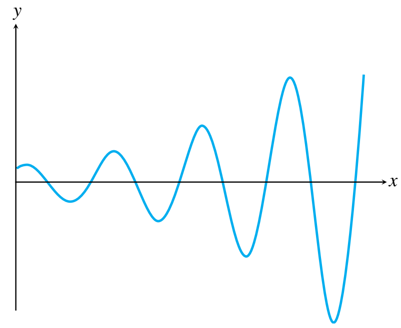
(γ) 600 ελάφια.

21. Περιγράψτε μια συμπεριφορά που παριστάνεται ποιοτικά από καθεμία από τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις.

(α)



(β)



22. *Εντοπισμός προβλήματος* Για καθένα από τα ακόλουθα σενάρια που περιγράφονται με γενικόλογο τρόπο, καλείστε να διακρίνετε ένα μαθηματικό πρόβλημα που θα είχε νόημα να μελετήσετε. Ποιες μεταβλητές επηρεάζουν το πρόβλημα αυτό; Από αυτές, ποιες είναι οι σπουδαιότερες;

(α) Η πληθυσμιακή αύξηση ενός είδους.

(β) Ένα αντικείμενο αφήνεται να πέσει από μεγάλο ύψος. Πότε και με ποια ταχύτητα θα συγκρουστεί με το έδαφος;

(γ) Πόσο μεγάλη ταχύτητα μπορεί να αναπτύξει ένας σκιέρ σε μια χιονισμένη βουνοπλαγιά;

(δ) Ένας φυσικός επιστήμονας μελετά το φως και τις ιδιότητές του. Θέλει να κατανοήσει τη διαδρομή μιας ακτίνας φωτός που προσπίπτει, διαμέσου του αέρα, στην ήρεμη επιφάνεια μιας λίμνης. Τον ενδιαφέρει ιδιαίτερα το τι συμβαίνει στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων (νερού και αέρα).

(ε) Ο Οργανισμός Τροφίμων και Φαρμάκων των Η.Π.Α. (U.S. Food and Drug Administration) ενδιαφέρεται να μάθει πόσο αποτελεσματικό είναι ένα καινούριο φάρμακο στον περιορισμό των κρουσμάτων μίας νόσου.

(στ) Οι ιδιοκτήτες ενός καταστήματος λιανικής πώλησης προτίθενται να φτιάξουν έναν χώρο στάθμευσης πελατών. Πώς πρέπει να φωτίζεται ο χώρος αυτός;

Επαναληπτικές ερωτήσεις

1. Πώς προκύπτει η εξίσωση μιας ευθείας όταν δίδονται οι συντεταγμένες δύο σημείων της; Όταν δίδονται η κλίση της και οι συντεταγμένες ενός σημείου της; Όταν δίδονται η κλίση της και η τεταγμένη της από την αρχή; Δώστε παραδείγματα.

2. Ποιες είναι οι συνήθεις εξισώσεις ευθειών κάθετων στους άξονες συντεταγμένων;

3. Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των κλίσεων δύο *αμοιβαία* κάθετων ευθειών; Ποια η αντίστοιχη σχέση για παράλληλες ευθείες; Δώστε παραδείγματα.

4. Τι είναι συνάρτηση; Δώστε παραδείγματα. Πώς σχεδιάζουμε μια συνάρτηση της οποίας τα πεδία ορισμού και τιμών περιέχουν πραγματικούς αριθμούς; Τι είναι αύξουσα και τι φθίνουσα συνάρτηση;

5. Τι είναι άρτια και τι περιττή συνάρτηση; Ποιες συμμετρίες παρουσιάζουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών και πώς μπορούμε να τις εκμεταλλευτούμε; Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης που δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

6. Τι είναι μια κατά τμήματα οριζόμενη συνάρτηση; Δώστε παραδείγματα. Δώστε τον ορισμό της συνάρτησης απόλυτης τιμής και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.
7. Πότε είναι δυνατή η σύνθεση δύο συναρτήσεων; Δώστε παραδείγματα σύνθετων συναρτήσεων υπολογίζοντας τις τιμές τους σε διάφορα σημεία. Έχει σημασία η σειρά με την οποία συντίθενται οι συναρτήσεις;
8. Πώς αλλάζουμε την εξίσωση $y = f(x)$ προκειμένου να μετατοπίσουμε το γράφημά της πάνω-κάτω, ή δεξιά-αριστερά; Δώστε παραδείγματα.
9. Τι είναι η εκθετική συνάρτηση; Δώστε παραδείγματα. Ποιες είναι οι ιδιότητες εκθετικών; Σε τι διαφέρει η εκθετική συνάρτηση από την απλή συνάρτηση δύναμης του τύπου $f(x) = xn$; Για ποια είδη φαινομένων του πραγματικού κόσμου χρησιμεύουν ως μοντέλα οι εκθετικές συναρτήσεις;
10. Ποιος είναι ο αριθμός e, και πώς ορίζεται; Ποια τα πεδία ορισμού και τιμών της $f(x) = ex$; Πώς είναι η γραφική της παράσταση; Πώς σχετίζονται οι τιμές της συνάρτησης ex με αυτές των x^2, x^3, κ.ο.κ.;
11. Ποιες συναρτήσεις διαθέτουν αντίστροφες; Πώς ξέρουμε αν δυο συναρτήσεις f και g είναι αντίστροφες η μία της άλλης; Δώστε παραδείγματα συναρτήσεων που είναι (ή δεν είναι) μεταξύ τους αντίστροφες.
12. Πώς σχετίζονται τα πεδία ορισμού και τιμών καθώς και οι γραφικές παραστάσεις μιας συνάρτησης και της αντίστροφής της; Δώστε ένα παράδειγμα.
13. Με ποια διαδικασία μπορούμε μερικές φορές να εκφράσουμε την αντίστροφη μιας συναρτήσεως του x ως συνάρτηση του x; Με ποιον τρόπο μπορούμε να σχεδιάσουμε παραμετρικά μια συνάρτηση $y = f(x)$ μαζί με την αντίστροφή της $y = f^{-1}(x)$ στην οθόνη ενός υπολογιστή;
14. Τι είναι η συνάρτηση λογαρίθμου και ποιες οι ιδιότητές της; Τι είναι η συνάρτηση φυσικού λογαρίθμου; Ποια τα πεδία ορισμού και τιμών της $y = \ln x$; Πώς είναι η γραφική της παράσταση;
15. Πώς σχετίζεται το γράφημα της συνάρτησης $\log a\, x$ με αυτό της $\ln x$; Κατά πόσο είναι αληθής η δήλωση ότι κατά βάθος υπάρχει μόνο μία εκθετική συνάρτηση και μία λογαριθμική συνάρτηση;
16. Τι είναι το ακτινιακό μέτρο; Πώς μετατρέπουμε τα ακτίνια σε μοίρες και πώς τις μοίρες σε ακτίνια;
17. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των έξι βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Τι είδους συμμετρίες παρουσιάζουν αυτές;
18. Μερικές φορές είναι δυνατόν να βρούμε τις τιμές τριγωνομετρικών συναρτήσεων από τρίγωνα. Εξηγήστε πώς μπορεί αυτό να γίνει και δώστε παραδείγματα.
19. Τι είναι μια περιοδική συνάρτηση; Δώστε παραδείγματα. Ποιες είναι οι περίοδοι των έξι βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων;
20. Ποια η σχέση μεταξύ του τύπου της γενικής ημιτονοειδούς συναρτήσεως $f(x)=A\sin((2\pi/B)(x - C)) + D$ και των διαδικασιών μετατόπισης, επιμήκυνσης, συρρίκνωσης και κατοπτρισμού της γραφικής της παραστάσεως; Δώστε παραδείγματα. Σχεδιάστε τη γενική ημιτονοειδή καμπύλη και σημειώστε στο γράφημα τις σταθερές A, B, C, και D.
21. Με αφετηρία την ταυτότητα $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ και τους τύπους αθροίσματος γωνιών $\cos(A + B)$ και $\sin(A + B)$, δείξτε πώς μπορούν να προκύψουν και διάφορες άλλες τριγωνομετρικές ταυτότητες.
22. Πώς ορίζονται οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις; Πώς μπορούμε με χρήση ορθογώνιων τριγώνων να βρούμε τις τιμές των συναρτήσεων αυτών; Δώστε παραδείγματα.
23. Ο υπολογιστής μας έχει δυνατότητα υπολογισμού τιμών των συναρτήσεων $\cos^{-1} x$, $\sin^{-1} x$, και $\tan^{-1} x$. Εξηγήστε πώς μπορούμε να βρούμε τις τιμές των συναρτήσεων $\sec^{-1} x$, $\csc^{-1} x$, και $\cot^{-1} x$.
24. Τι είναι μια παραμετρικοποιημένη καμπύλη στο επίπεδο xy; Τι ονομάζουμε αρχικό σημείο της και τι τελικό; Αν για την τροχιά σωματιδίου στο επίπεδο σας προκύψει μια καρτεσιανή εξίσωση που ορίζεται παραμετρικά, ποια σχέση αναμένετε να υπάρχει μεταξύ του γραφήματος της καρτεσιανής εξίσωσης και της τροχιάς του σωματιδίου; Δώστε παραδείγματα.
25. Ποια είναι η συνήθης παραμετρικοποίηση του κύκλου $x^2 + y^2 = a^2$; Ποια της έλλειψης $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$; Του γραφήματος μιας συναρτήσεως $y = f(x)$; Της αντίστροφης μιας συναρτήσεως $y = f(x)$;

Ασκήσεις κεφαλαίου

Ευθείες

Στις Ασκήσεις 1-12, γράψτε μια εξίσωση για την ευθεία που ορίζεται ως εξής:

1. Διέρχεται από το σημείο $(1, -6)$ με κλίση 3.
2. Διέρχεται από το σημείο $(-1, 2)$ με κλίση $-1/2$.
3. Είναι κατακόρυφη και διέρχεται από το σημείο $(0, -3)$.
4. Διέρχεται από τα σημεία $(-3, 6)$ και $(1, -2)$.
5. Είναι οριζόντια και διέρχεται από το σημείο $(0, 2)$.
6. Διέρχεται από τα σημεία $(3, 3)$ και $(-2, 5)$.
7. Έχει κλίση -3 και τεταγμένη 3.
8. Διέρχεται από το σημείο $(3, 1)$ και είναι παράλληλη στην $2x - y = -2$.
9. Διέρχεται από το σημείο $(4, -12)$ και είναι παράλληλη στην $4x + 3y = 12$.
10. Διέρχεται από το σημείο $(-2, -3)$ και είναι κάθετη στην $3x - 5y = 1$.
11. Διέρχεται από το σημείο $(-1, 2)$ και είναι κάθετη στην $(1/2)x + (1/3)y = 1$.
12. Έχει τετμημένη 3 και τεταγμένη -5.

Συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις

13. Βρείτε μια έκφραση για το εμβαδόν και την περίμετρο κύκλου, συναρτήσει της ακτίνας του κύκλου. Κατόπιν εκφράστε το εμβαδόν συναρτήσει της περιμέτρου.

14. Βρείτε μια έκφραση για την ακτίνα σφαίρας συναρτήσει του εμβαδού της επιφάνειάς της. Κατόπιν εκφράστε το εμβαδόν της επιφάνειας συναρτήσει του όγκου της σφαίρας.

15. Ένα σημείο P στο πρώτο τεταρτημόριο είναι σημείο της παραβολής $y = x^2$. Εκφράστε τις συντεταγμένες του P συναρτήσει της γωνίας που σχηματίζει ο άξονας x με την ευθεία που συνδέει το P με την αρχή.

16. Καθώς ένα αερόστατο απογειώνεται κινούμενο κατακόρυφα από επίπεδη περιοχή, εντοπίζεται από μια συσκευή ραδιοεντοπισμού η οποία απέχει 500 m από το σημείο απογείωσης. Βρείτε μια έκφραση για το ύψος του αερόστατου συναρτήσει της γωνίας που σχηματίζει το έδαφος με την ευθεία που συνδέει τη συσκευή με το αερόστατο.

Στις Ασκήσεις 17-20, προσδιορίστε αν η γραφική παράσταση της συναρτήσεως είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y, ως προς την αρχή, ή ως προς τίποτα από τα δύο.

17. $y = x^{1/5}$
18. $y = x^{2/5}$
19. $y = x^2 - 2x - 1$
20. $y = e^{-x^2}$

Στις Ασκήσεις 21-28, προσδιορίστε αν η συνάρτηση είναι άρτια, περιττή, ή τίποτα από τα δύο.

21. $y = x^2 + 1$
22. $y = x^5 - x^3 - x$
23. $y = 1 - \cos x$
24. $y = \sec x \tan x$
25. $y = \dfrac{x^4 + 1}{x^3 - 2x}$
26. $y = 1 - \sin x$
27. $y = x + \cos x$
28. $y = \sqrt{x^4 - 1}$

Στις Ασκήσεις 29-38, βρείτε τα πεδία **(α)** ορισμού και **(β)** τιμών.

29. $y = |x| - 2$
30. $y = -2 + \sqrt{1 - x}$
31. $y = \sqrt{16 - x^2}$
32. $y = 3^{2-}x + 1$
33. $y = 2e^{-}x - 3$
34. $y = \tan(2x - \pi)$
35. $y = 2\sin(3x + \pi) - 1$
36. $y = x^{2/5}$
37. $y = \ln(x - 3) + 1$
38. $y = -1 + \sqrt[3]{2 - x}$

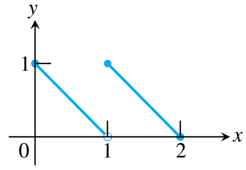
Τμηματικά οριζόμενες συναρτήσεις

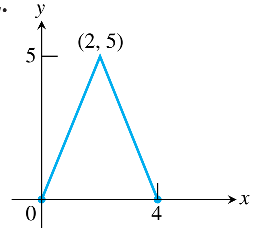
Στις Ασκήσεις 39 και 40, βρείτε τα πεδία **(α)** ορισμού και **(β)** τιμών.

39. $y = \begin{cases} \sqrt{-x}, & -4 \le x \le 0 \\ \sqrt{x}, & 0 < x \le 4 \end{cases}$

40. $y = \begin{cases} -x - 2, & -2 \le x \le -1 \\ x, & -1 < x \le 1 \\ -x + 2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

Στις Ασκήσεις 41 και 42, γράψτε έναν τύπο που να ορίζει κατά τμήματα τη σχεδιασθείσα συνάρτηση.

41.


42.


Σύνθεση συναρτήσεων

Στις Ασκήσεις 43 και 44, υπολογίστε τις ποσότητες:

(α) $(f \circ g)(-1)$ **(β)** $(g \circ f)(2)$

(γ) $(f \circ f)(x)$ **(δ)** $(g \circ g)(x)$

43. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$

44. $f(x) = 2 - x$, $g(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

Στις Ασκήσεις 45 και 46, **(α)** γράψτε έναν τύπο για τις $f \circ g$ και $g \circ f$ και βρείτε τα πεδία **(β)** ορισμού και **(γ)** τιμών της καθεμίας.

45. $f(x) = 2 - x^2$, $g(x) = \sqrt{x + 2}$

46. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{1 - x}$

Σύνθεση με απόλυτες τιμές Στις Ασκήσεις 47-52, σχεδιάστε τις f_1 και f_2 σε κοινό διάγραμμα, προκειμένου να συμπεράνετε και να περιγράψετε πώς επηρεάζεται η γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως f_1 αν πάρουμε απόλυτες τιμές προτού την εφαρμόσουμε.

	$f1(x)$	$f2(x) = f1(\lvert x \rvert)$
47.	x	$\lvert x \rvert$
48.	x^3	$\lvert x \rvert^3$
49.	x^2	$\lvert x \rvert^2$
50.	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\lvert x \rvert}$
51.	$\sqrt{x}$	$\sqrt{\lvert x \rvert}$
52.	$\sin x$	$\sin \lvert x \rvert$

Σύνθεση με απόλυτες τιμές Στις Ασκήσεις 53-56, σχεδιάστε τις g_1 και g_2 σε κοινό διάγραμμα, προκειμένου να συμπεράνετε και να περιγράψετε πώς επηρεάζεται η γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως g_1 αν πάρουμε απόλυτες τιτιμές αφού την εφαρμόσουμε.

	$g1(x)$ $\lvert g1(x) \rvert$	$g2(x)$	=
53.	x^3	$\lvert x^3 \rvert$	
54.	$\sqrt{x}$	$\lvert \sqrt{x} \rvert$	
55.	$4 - x^2$	$\lvert 4 - x^2 \rvert$	
56.	$x^2 + x$	$\lvert x^2 + x \rvert$	

Αντίστροφες συναρτήσεις

57. **(α)** Σχεδιάστε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, 0 \le x \le 1$. Τι είδους συμμετρία παρουσιάζει η γραφική παρά-

στηση;

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι η αντίστροφη του εαυτού της. (Θυμηθείτε ότι $\sqrt{x^2} = x$ για $x \geq 0$.)

58. (α) Σχεδιάστε τη συνάρτηση $f(x) = 1/x$. Τι είδους συμμετρία παρουσιάζει η γραφική παράσταση;

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι η αντίστροφη του εαυτού της.

Στις Ασκήσεις 59 και 60:

(α) Βρείτε την f^{-1} και δείξτε ότι
$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x.$$

(β) Σχεδιάστε τις f και f^{-1} σε κοινό διάγραμμα.

59. $f(x) = 2 - 3x$

60. $f(x) = (x + 2)^2, \quad x \geq -2$

61. (α) Δείξτε ότι οι $f(x) = x^3$ και $g(x) = \sqrt[3]{x}$ είναι αντίστροφες η μία της άλλης.

T **(β)** Σχεδιάστε τις f και g σε κατάλληλα μεγάλο διάστημα τιμών του x ώστε να φαίνεται ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται στα σημεία (1, 1) και $(-1, -1)$. Βεβαιωθείτε ότι η εικόνα που βλέπετε εμφανίζει την απαιτούμενη συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$.

62. (α) Δείξτε ότι οι $h(x) = x^3/4$ και $k(x) = (4x)^{1/3}$ είναι αντίστροφες η μία της άλλης.

T **(β)** Σχεδιάστε τις h και k σε κατάλληλα μεγάλο διάστημα τιμών του x ώστε να φαίνεται ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται στα σημεία (2, 2) και $(-2, -2)$. Βεβαιωθείτε ότι η εικόνα που βλέπετε εμφανίζει την απαιτούμενη συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$.

63. (α) Βρείτε την αντίστροφη της $f(x) = x + 1$. Σχεδιάστε την f και την αντίστροφή της σε κοινό διάγραμμα. Επίσης σχεδιάστε με διακεκομμένες γραμμές την ευθεία $y = x$.

(β) Βρείτε την αντίστροφη της $f(x) = x + b$ (όπου b σταθερά). Ποια σχέση έχει το γράφημα της f^{-1} με αυτό της f;

(γ) Τι συμπεραίνετε για τις αντίστροφες συναρτήσεων των οποίων οι γραφικές παραστάσεις είναι ευθείες παράλληλες στην ευθεία $y = x$;

64. (α) Βρείτε την αντίστροφη της $f(x) = -x + 1$. Σχεδιάστε την ευθεία $y = -x + 1$ σε κοινό διάγραμμα με την $y = x$. Τι γωνία ορίζουν τεμνόμενες οι δύο ευθείες;

(β) Βρείτε την αντίστροφη της $f(x) = -x + b$ (b σταθερά). Τι γωνία σχηματίζει η ευθεία $y = -x + b$ με την ευθεία $y = x$;

(γ) Τι συμπεραίνετε για τις αντίστροφες συναρτήσεων των οποίων οι γραφικές παραστάσεις είναι ευθείες κάθετες στην ευθεία $y = x$;

T **65.** *Δεκαδικό ανάπτυγμα του e* Υπολογίστε τον αριθμό e σε όσα περισσότερα δεκαδικά ψηφία σάς επιτρέπει ο υπολογιστής σας, λύνοντας την εξίσωση $\ln x = 1$.

T **66.** *Η σχέση αντιστροφής μεταξύ του e^x και του ln x* Βρείτε πόσο αξιόπιστα υπολογίζει ο υπολογιστής σας τις σύνθετες συναρτήσεις
$$e^{\ln x} \text{ και } \ln(e\,x).$$

Αλγεβρικοί υπολογισμοί με εκθετικά και λογαρίθμους

Απλοποιήστε τις ποσότητες που δίδονται στις Ασκήσεις 67-70.

67. (α) $e^{\ln 7{,}2}$ **(β)** $e^{-\ln x^2}$ **(γ)** $e^{\ln x - \ln y}$

68. (α) $e^{\ln(x^2+y^2)}$ **(β)** $e^{-\ln 0{,}3}$ **(γ)** $e^{\ln \pi x - \ln 2}$

69. (α) $2\ln\sqrt{e}$ **(β)** $\ln(\ln ee)$ **(γ)** $\ln(e^{-x^2-y^2})$

70. (α) $\ln(e^{\sec\theta})$ **(β)** $\ln(e^{e^x})$ **(γ)** $\ln(e^{2\ln x})$

Τριγωνομετρία

Στις Ασκήσεις 71 και 72, βρείτε το μέτρο της γωνίας σε ακτίνια και μοίρες.

71. $\sin^{-1}(0{,}6)$ **72.** $\tan^{-1}(-2{,}3)$

73. Υπολογίστε τις τιμές των έξι βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων της γωνίας $\theta = \cos^{-1}(3/7)$. Δώστε ακριβείς απαντήσεις.

74. Λύστε την εξίσωση $\sin x = -0{,}2$ στα παρακάτω διαστήματα.

(α) $0 \leq x < 2\pi$ **(β)** $-\infty < x < \infty$

Στις Ασκήσεις 75 και 76, σχεδιάστε τη γραφική παράσταση και συνακόλουθα βρείτε την περίοδο της συναρτήσεως που δίδεται.

75. $y = \sin\dfrac{x}{2}$

76. $y = \cos\dfrac{\pi x}{2}$

77. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

78. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 1 + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Στις Ασκήσεις 79-82, το ABC είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο με ορθή γωνία στην κορυφή C. Οι απέναντι πλευρές των γωνιών A, B, και C έχουν μήκη a, b, και c, αντίστοιχα.

79. (α) Υπολογίστε τα a και b αν $c = 2$, $B = \pi/3$.

(β) Υπολογίστε τα a και c αν $b = 2$, $B = \pi/3$.

80. (α) Εκφράστε το a συναρτήσει των A και c.

(β) Εκφράστε το a συναρτήσει των A και b.

81. (α) Εκφράστε το a συναρτήσει των B και b.

(β) Εκφράστε το c συναρτήσει των A και a.

82. (α) Εκφράστε το $\sin A$ συναρτήσει των a και c.

(β) Εκφράστε το $\sin A$ συναρτήσει των b και c.

Στις Ασκήσεις 83 και 84, δείξτε ότι οι συναρτήσεις είναι περιοδικές και βρείτε την περίοδό τους.

83. $y = \sin^3 x$ **84.** $y = |\tan x|$

Χρησιμοποιήστε τους τύπους του αθροίσματος γωνιών για να παραγάγετε τις ταυτότητες των Ασκήσεων 85 και 86.

85. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$

86. $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$

87. Υπολογίστε το $\sin\frac{7\pi}{12}$ γράφοντάς το ως $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$.

88. Υπολογίστε το $\cos\frac{11\pi}{12}$ γράφοντάς το ως $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)$.

Χρησιμοποιήστε τρίγωνα αναφοράς για να βρείτε τις γωνίες στις Ασκήσεις 89-92.

89. **(α)** $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **(β)** $\sin^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ **(γ)** $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

90. **(α)** $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ **(β)** $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **(γ)** $\cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

91. **(α)** $\sec^{-1}\sqrt{2}$ **(β)** $\sec^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$ **(γ)** $\sec^{-1} 2$

92. **(α)** $\cot^{-1} 1$ **(β)** $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ **(γ)** $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Υπολογισμός τριγωνομετρικών και αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Στις Ασκήσεις 93-96 υπολογίστε τις τιμές των συναρτήσεων.

93. $\sec\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$

94. $\cot\left(\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

95. $\tan(\sec^{-1} 1)+\sin(\csc^{-1}(-2))$

96. $\sec(\tan^{-1} 1+\csc^{-1} 1)$

Υπολογισμός τριγωνομετρικών εκφράσεων

Στις Ασκήσεις 97-100 απλοποιήστε τις ποσότητες που δίδονται.

97. $\sec(\tan^{-1} 2x)$

98. $\tan\left(\sec^{-1}\frac{y}{5}\right)$

99. $\tan(\cos^{-1} x)$

100. $\sin\left(\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

Ποιες από τις εκφράσεις που δίδονται στις Ασκήσεις 101-104 ορίζονται και ποιες όχι; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

101. **(α)** $\tan^{-1} 2$ **(β)** $\cos^{-1} 2$

102. **(α)** $\csc^{-1}\frac{1}{2}$ **(β)** $\csc^{-1} 2$

103. **(α)** $\sec^{-1} 0$ **(β)** $\sin^{-1}\sqrt{2}$

104. **(α)** $\cot^{-1}\left(\frac{1}{-2}\right)$ **(β)** $\cos^{-1}(-5)$

105. *Ύψος στύλου* Δύο νήματα εκτείνονται τεντωμένα από την κορυφή T κατακόρυφου στύλου μέχρι το έδαφος, στα σημεία B και C αντίστοιχα. Το σημείο C είναι 10 m εγγύτερα στη βάση του στύλου απ' ό,τι το σημείο B. Δεδομένου ότι το νήμα BT σχηματίζει γωνία 35° με το οριζόντιο επίπεδο και το CT σχηματίζει γωνία 50° με το οριζόντιο επίπεδο, υπολογίστε το ύψος του στύλου.

106. *Ύψος μετεωρολογικού αερόστατου* Δύο παρατηρητές στα σημεία A και B απέχουν 2 km ο ένας από τον άλλο και μετρούν ταυτόχρονα τη γωνία ανυψώσεως ενός αερόστατου της μετεωρολογικής υπηρεσίας βρίσκοντας 40° και 70°, αντίστοιχα. Αν το αερόστατο βρίσκεται ακριβώς πάνω από ένα σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB, να βρεθεί το ύψος του.

T **107.** **(α)** Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sin x+\cos(x/2)$.

(β) Βάσει της γραφικής παράστασης, εκτιμήστε την περίοδο της συναρτήσεως.

(γ) Επιβεβαιώστε αλγεβρικά την απάντηση που δώσατε στο (β).

T **108.** **(α)** Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sin(1/x)$.

(β) Ποια τα πεδία ορισμού και τιμών της f;

(γ) Είναι η f περιοδική; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Παραμετρικοποιήσεις

Στις Ασκήσεις 109-112 δίδονται οι παραμετρικοποιήσεις μερικών καμπυλών.

(α) Βρείτε μια καρτεσιανή εξίσωση για την καμπύλη που περιέχει την παραμετρικοποιημένη καμπύλη. Ποιο τμήμα του γραφήματος της καρτεσιανής εξίσωσης καλύπτεται από την παραμετρικοποιημένη καμπύλη;

(β) Σχεδιάστε την καμπύλη. Σημειώστε τα αρχικά και τελικά της σημεία, όπου αυτό είναι δυνατόν. Σημειώστε επίσης τη φορά διαγραφής της καμπύλης.

109. $x=5\cos t,\quad y=2\sin t,\quad 0\le t\le 2\pi$

110. $x=4\cos t,\quad y=4\sin t,\quad \pi/2\le t<3\pi/2$

111. $x=2-t,\quad y=11-2t,\quad -2\le t\le 4$

112. $x=1+t,\quad y=(t-1)^2,\quad t\le 1$

Στις Ασκήσεις 113-116, δώστε μια παραμετρικοποίηση της καμπύλης:

113. Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(-2, 5)$ και $(4, 3)$

114. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(-3, -2)$ και $(4, -1)$

115. Η ημιευθεία που αρχίζει από το σημείο $(2, 5)$ και διέρχεται από το $(-1, 0)$

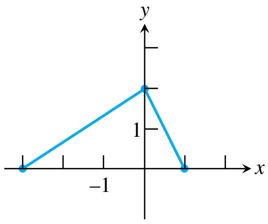
116. $y=x(x-4),\quad x\le 2$

Επιπρόσθετες ασκήσεις: θεωρία, παραδείγματα, εφαρμογές

1. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση καθεμίας από τις παρακάτω συναρτήσεις:

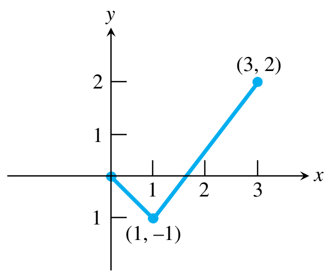
(α) $y = f(-x)$ **(β)** $y = -f(x)$

(γ) $y = -2f(x + 1) + 1$ **(δ)** $y = 3f(x - 2) - 2$



2. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως που ορίζεται στο διάστημα $[-3, 3]$. Συμπληρώστε το, υποθέτοντας ότι η συνάρτηση είναι

(α) άρτια. **(β)** περιττή.



3. *Υποτίμηση* Η εταιρεία Smith Hauling αγόρασε ένα φορτηγό 18 τροχών στο ποσό των \$100.000. Για τα πρώτα 10 χρόνια, η αξία του φορτηγού ελαττώνεται με τον σταθερό ρυθμό των \$10.000 κατ' έτος.

(α) Γράψτε μια έκφραση για την αξία y μετά από x χρόνια.

(β) Πότε θα έχει φθάσει η αξία του φορτηγού στα \$55.000;

4. *Απορρόφηση φαρμάκου* Ένα παυσίπονο χορηγείται ενδοφλεβίως. Η συνάρτηση

$$f(t) = 90 - 52 \ln (1 + t), \qquad 0 \le t \le 4$$

παριστάνει τις μονάδες φαρμακευτικής ουσίας που έχουν παραμείνει στο σώμα μετά από t ώρες.

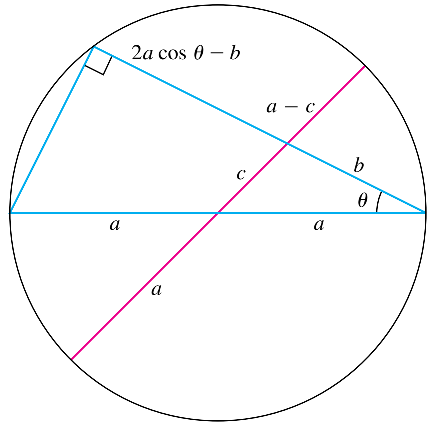
(α) Πόσες μονάδες της ουσίας χορηγήθηκαν αρχικά στο σώμα;

(β) Πόσες μονάδες έχουν παραμείνει μετά από 2 ώρες;

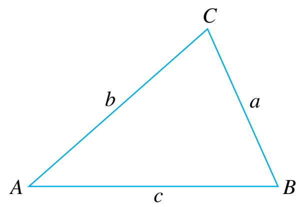
(γ) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f.

5. *Υπολογισμός χρόνου* Η Μαρία καταθέτει αρχικό κεφάλαιο 1500 € σε τραπεζικό λογαριασμό με επιτόκιο 8% και ετήσιο ανατοκισμό. Σε πόσο διάστημα θα έχουν φθάσει οι καταθέσεις της στο ύψος των 5000 €;

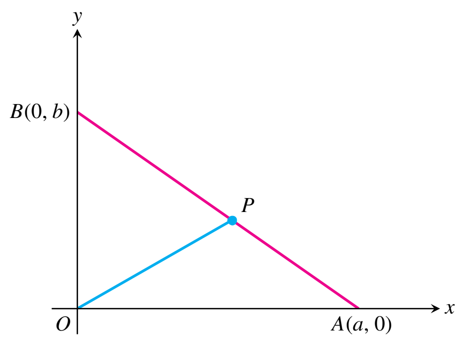
6. Στο σχήμα δίδεται μια «απόδειξη χωρίς λόγια» του νόμου των συνημιτόνων. Εξηγήστε την. (Πηγή: Sidney H. Kung, "Proof without Words: The Law of Cosines," *Mathematics Magazine*, Vol. 63, No. 5, Dec. 1990, p. 342.)



7. Δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ABC δίδεται από τη σχέση $(1/2)ab \sin C = (1/2)bc \sin A = (1/2)ca \sin B$.



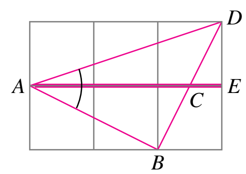
8. **(α)** Βρείτε την κλίση της ευθείας που ενώνει την αρχή με το μέσον P της πλευράς AB στο τρίγωνο του παρατιθέμενου σχήματος $(a, b > 0)$.



(β) Πότε είναι κάθετα τα OP και AB;

9. Το παρακάτω σχήμα παρέχει μια άτυπη απόδειξη του ότι

$$\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$



Τεκμηριώστε την απόδειξη, εξηγώντας τι συμβαίνει. (Πηγή: Edward M. Harris, "Behold! Sums of Arctan," *College Mathematics Journal*, Vol. 18, No. 2, March 1987, p. 141.)

10. *Μάθετε γράφοντας* Για ποιες τιμές του $x > 0$ ισχύει η ισότητα $x^{(x^x)} = (xx)x$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

11. *Σύνθεση συναρτήσεων*

(α) Έστω ότι $h = g \circ f$, όπου g είναι άρτια συνάρτηση. Η συνάρτηση h θα είναι πάντα άρτια; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(β) Έστω ότι $h = g \circ f$, όπου g είναι περιττή συνάρτηση. Η συνάρτηση h θα είναι πάντα περιττή; Τι συμβαίνει αν η f είναι περιττή; Τι αν είναι άρτια; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

12. *Ο κανόνας του 70* Κάνοντας την προσέγγιση $\ln 2 \approx 0{,}70$ (αντί του ακριβούς αποτελέσματος 0,69314 . . .), μπορείτε να εξαγάγετε τον ακόλουθο εύχρηστο κανόνα: «Για να υπολογίσουμε κατ' εκτίμηση πόσα χρόνια θα χρειαστούν για να διπλασιαστεί ένα ποσό που επενδύεται με επιτόκιο r και συνεχή ανατοκισμό, διαιρούμε το 70 με το r». Για παράδειγμα, ένα κεφάλαιο που τοκίζεται με 5% θα διπλασιαστεί σε περίπου $70/5 = 14$ έτη. Αν όμως επιθυμείται διπλασιασμός σε 10 έτη, θα πρέπει το επιτόκιο να είναι $70/10 = 7\%$. Αποδείξτε τον κανόνα του 70. (Ένας παραπλήσιος «κανόνας του 72» χρησιμοποιεί το 72 αντί του 70, μια και ο αριθμός 72 έχει περιοσσότερους ακέραιους παράγοντες.)

Συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις

13. Μπορείτε να βρείτε δύο συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε $f \circ g = g \circ f$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

14. Μπορείτε να βρείτε δύο συναρτήσεις f και g με την ιδιότητα τα γραφήματά τους να μην είναι ευθείες, αλλά το γράφημα της $f \circ g$ να είναι; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

15. Εάν η $f(x)$ είναι περιττή, τι συμπεραίνετε για την $g(x) = f(x) - 2$; Ποια θα ήταν η απάντησή σας αν η f ήταν άρτια; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

16. Αν η $g(x)$ είναι μια περιττή συνάρτηση που ορίζεται για κάθε x, τι συμπεραίνετε για την τιμή $g(0)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

17. Σχεδιάστε την εξίσωση $|x| + |y| = 1 + x$.

18. Σχεδιάστε την εξίσωση $y + |y| = x + |x|$.

19. Δείξτε ότι αν η f είναι ταυτόχρονα άρτια και περιττή, τότε $f(x) = 0$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

20. **(α)** *Άρτιο και περιττό τμήμα συνάρτησης* Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού συμμετρικό ως προς την αρχή· δηλαδή, το $-x$ ανήκει στο πεδίο ορισμού εφόσον ανήκει και το x. Δείξτε ότι η f θα είναι το άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συναρτήσεως:

$$f(x) = E(x) + O(x),$$

όπου E, O η άρτια και η περιττή συνάρτηση αντίστοιχα. (*Υπόδειξη:* Έστω $E(x) = [f(x) + f(-x)]/2$. Δείξτε ότι $E(-x) = E(x)$, δηλαδή ότι η E είναι άρτια. Κατόπιν δείξτε ότι η $O(x) = f(x) - E(x)$ είναι περιττή.)

(β) *Μοναδικότητα* Δείξτε ότι υπάρχει μόνον ένας τρόπος να γραφεί η f ως άθροισμα άρτιας και περιττής συναρτήσεως. (*Υπόδειξη:* Ένας τέτοιος τρόπος δίδεται στο ερώτημα (α). Δείξτε ότι αν υπήρχε και δεύτερος τρόπος, δηλαδή αν $f(x) = E_1(x) + O_1(x)$, όπου η E_1 είναι άρτια και η O_1 περιττή, θα ισχύει $E - E_1 = O_1 - O$. Κατόπιν, κάντε χρήση της Ασκήσεως 19 για να δείξετε ότι $E = E_1$ και $O = O_1$.)

21. *Αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις* Αν η f είναι συνάρτηση αμφιμονοσήμαντη, δείξτε ότι και η $g(x) = -f(x)$ είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη.

22. *Αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις* Αν η f είναι συνάρτηση αμφιμονοσήμαντη και οι τιμές $f(x)$ είναι πάντα διάφορες του μηδενός, δείξτε ότι και η $g(x) = 1/f(x)$ είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη.

23. *Πεδία ορισμού και τιμών* Έστω $a \neq 0$, $b \neq 1$, και $b > 0$. Προσδιορίστε τα πεδία ορισμού και τιμών των συναρτήσεων:

(α) $y = a(bc^{-}x) + d$ **(β)** $y = a \log b\,(x - c) + d$

24. *Αντίστροφες συναρτήσεις* Έστω

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad c \neq 0, \qquad ad - bc \neq 0.$$

(α) *Μάθετε γράφοντας* Επιχειρηματολογήστε πειστικά για το αμφιμονοσήμαντον της f.

(β) Βρείτε έναν τύπο για την αντίστροφη της f.

(γ) Βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της f.

(δ) Βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της f^{-1}. Πώς σχετίζονται αυτές με τις ασύμπτωτες της f;

Μοντέλα

25. *Σταθερές αναλογίας* Προσδιορίστε κατά πόσο τα παρακάτω αριθμητικά δεδομένα υποστηρίζουν την αναφερόμενη σχέση αναλογίας. Αν ναι, εκτιμήστε τη σταθερά αναλογίας.

(α) y ανάλογο του x^2

y	6	13	24	39	58	81	108	139
x	0	1	2	3	4	5	6	7

(β) y ανάλογο του $4x$

y	0,6	2,4	9,6	38,4	153,6	614,4	2457,6	9830,4
x	0	1	2	3	4	5	6	7

26. *Πληθυσμός κυττάρων* Μια μελέτη βακτηριακής εξάπλωσης δίνει τα παρακάτω αποτελέσματα.

x χρόνος (hr)	0	2	4	6	8	10
y πληθυσμός κυττάρων	597	893	1339	1995	2976	4433

x χρόνος (hr)	12	14	16	18	20
y πληθυσμός κυττάρων	6612	9865	14.719	21.956	32.763

(α) Κατασκευάστε ένα μαθηματικό μοντέλο που να συσχετίζει τον πληθυσμό των κυττάρων με τον χρόνο.

(β) Συγκρίνετε τις προβλέψεις του μοντέλου σας με τις εργαστηριακές μετρήσεις.

(γ) Χρησιμοποιήστε το μοντέλο σας για να προβλέψετε πότε θα ανέλθει ο πληθυσμός των κυττάρων σε 50.000.

27. *Επιμήκυνση ελατηρίου* Ο πίνακας που ακολουθεί δίνει τιμές της επιμήκυνσης e σε εκατοστόμετρα ανά εκατοστόμετρο (cm/cm), που προκύπτουν όταν σε χαλύβδινο σύρμα ασκείται τάση S που μετριέται σε Newton ανά τετραγωνικό εκατοστόμετρο (N/cm^2). Απεικονίστε τα δεδομένα σε διάγραμμα προκειμένου να ελέγξετε το μοντέλο $e = c_1 S$. Από το γράφημα που κάνατε εκτιμήστε τη σταθερά c_1.

$S \times 10^{-3}$	5	10	20	30	40	50
$e \times 10^5$	0	19	57	94	134	173

$S \times 10^{-3}$	60	70	80	90	100
$e \times 10^5$	216	256	297	343	390

(α) Κατασκευάστε ένα μοντέλο που να συνδέει την επιμήκυνση του ελατηρίου με την εξαρτώμενη από αυτό μάζα.

(β) Πόσο καλά ταιριάζει στα δεδομένα το μοντέλο σας;

(γ) Κάντε μια πρόβλεψη της επιμήκυνσης του ελατηρίου για τάση S ίση με 200×10^{-3} N/cm^2. Πόσο εμπιστεύεστε την πρόβλεψή σας;

28. *Αντλία κενού* Μια μηχανική αντλία κενού χρησιμοποιείται για να εκκενώσει έναν θάλαμο από τον αέρα που αυτός αρχικά περιέχει. Ένας μετρητής πίεσης καταγράφει την πίεση σε ατμόσφαιρες (Pa). Ακολουθούν τα πειραματικά δεδομένα που απέδωσαν οι μετρήσεις.

Πίεση (Pa)	100.000	36.788	13.537	4986	1837	671
Χρόνος (min)	0	1	2	3	4	5

(α) Κατασκευάστε ένα μοντέλο που να συσχετίζει την πίεση με τον χρόνο.

(β) Πόσο καλά ταιριάζει στα δεδομένα το μοντέλο σας;

(γ) Κάντε μια πρόβλεψη για το πότε θα εξισωθεί η πίεση με 200 Pa.

Παλινδρομική ανάλυση

T **29.** *Διδακτορικές διατριβές* Ο Πίνακας 25 δείχνει τον αριθμό των διδακτορικών διατριβών που εκπονήθηκαν ανά έτος από ισπανόφωνους φοιτητές των Η.Π.Α. Έστω ότι η τιμή $x = 0$ αντιστοιχεί στο ακαδημαϊκό έτος 1970-71, η $x = 1$ στο 1971-72, κ.ο.κ.

Πίνακας 25 Διδακτορικές διατριβές ισπανόφωνων Αμερικανών

Έτος	Διατριβές
1976–77	520
1980–81	460
1984–85	680
1988–89	630
1990–91	730
1991–92	810
1992–93	830

Πηγή: Υπουργείο Παιδείας των Η.Π.Α., από άρθρο στο περιοδικό *Chronicle of Higher Education*, April 28, 1995.

(α) Βρείτε μια γραμμική εξίσωση παλινδρομήσεως για τα δεδομένα, και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση σε ενιαίο σχήμα με το διάγραμμα διασποράς.

(β) Χρησιμοποιώντας την παλινδρομική εξίσωση, κάντε μια πρόβλεψη για τον αριθμό των διδακτορικών τίτλων που θα αποκτηθούν από ισπανόφωνους φοιτητές κατά το ακαδημαϊκό έτος 2000-01.

(γ) *Μάθετε γράφοντας* Βρείτε την κλίση της ευθείας παλινδρομήσεως. Τι αντιπροσωπεύει αυτή;

T **30.** *Εκτίμηση της πληθυσμιακής αύξησης* Χρησιμοποιήστε τα δεδομένα του Πίνακα 26 που περιγράφουν τον πληθυσμό της Πολιτείας της Νέας Υόρκης. Έστω ότι η τιμή $x = 60$ αντιστοιχεί στο έτος 1960, η $x = 70$ στο 1970, κ.ο.κ.

Πίνακας 26 Πληθυσμός της Πολιτείας της Νέας Υόρκης

Έτος	Πληθυσμός (εκατομμύρια)
1960	16,78
1980	17,56
1990	17,99

Πηγή: The Statesman's Yearbook, 129th ed. (London: The Macmillan Press, Ltd., 1992).

(α) Βρείτε μια εκθετική εξίσωση παλινδρομήσεως για τα δεδομένα.

(β) Χρησιμοποιώντας την παλινδρομική εξίσωση, κάντε μια πρόβλεψη για το πότε θα έχει ανέλθει ο πληθυσμός στα 25 εκατομμύρια.

(γ) Ποιος ο ετήσιος ρυθμός αύξησης του πληθυσμού που προκύπτει από την εξίσωση παλινδρομήσεως;

T **31.** *Ημιτονοειδής παλινδρόμηση* Ο Πίνακας 27 δίνει τιμές της συνάρτησης

$$f(x) = a \sin (bx + c) + d$$

με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

(α) Βρείτε μια ημιτονοειδή εξίσωση παλινδρομήσεως για τα δεδομένα.

(β) Ξαναγράψτε την εξίσωση που βρήκατε, έχοντας στρογγυλοποιήσει τα a, b, c, και d στον πλησιέστερο ακέραιο.

Πίνακας 27 Τιμές συναρτήσεως

x	$f(x)$
1	5,82
2	2,08
3	5,98
4	2,00
5	5,98
6	2,08

32. *Πετρελαϊκή παραγωγή*

T **(α)** Βρείτε μια εξίσωση παλινδρομήσεως φυσικού λογαρίθμου για τα δεδομένα του Πίνακα 28.

(β) Υπολογίστε κατ' εκτίμηση την ποσότητα πετρελαίου (σε τόνους) που παρήγαγε ο Καναδάς το 1985.

(γ) Κάντε μια πρόβλεψη για το πότε θα φθάσει η καναδική παραγωγή πετρελαίου τους 120.000.000 τόνους.

Πίνακας 28 Πετρελαϊκή παραγωγή Καναδά

Έτος	Τόνοι (εκατομμύρια)
1960	27,48
1970	69,95
1990	92,24

Πηγή: The Statesman's Yearbook, 129th ed. (London: The Macmillan Press, Ltd., 1992).

33. Ο Πίνακας 29 παρέχει κάποια υποθετικά στοιχεία για
T την κατανάλωση ενέργειας.

(α) Έστω ότι η τιμή $x = 0$ αντιστοιχεί στο έτος 1900, η $x = 1$ στο 1910, κ.ο.κ. Βάσει των στοιχείων του πίνακα, βρείτε μια εκθετική εξίσωση παλινδρομήσεως της μορφής $Q = aebx$ και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση στο ίδιο σχήμα με το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

(β) Κάνοντας χρήση της εκθετικής εξίσωσης παλινδρομήσεως, κάντε μια πρόβλεψη της κατανάλωσης ενέργειας το έτος 1996. Ποιος ο ετήσιος ρυθμός αύξησης της ενεργειακής κατανάλωσης στη διάρκεια του 20ού αιώνα;

Πίνακας 29 Κατανάλωση ενέργειας

Έτος	Κατανάλωση Q
1900	1,00
1910	2,01
1920	4,06
1930	8,17
1940	16,44
1950	33,12
1960	66,69
1970	134,29
1980	270,43
1990	544,57
2000	1096,63

1 Όρια και συνέχεια

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Το όριο συναρτήσεως είναι από εκείνες τις έννοιες που διαφοροποιούν τον απειροστικό λογισμό από την άλγεβρα και την τριγωνομετρία. Στο παρόν κεφάλαιο θα δείξουμε πώς ορίζονται και πώς υπολογίζονται όρια τιμών συναρτήσεων. Οι κανόνες υπολογισμού των ορίων είναι στρωτοί και ξεκάθαροι, και τα περισσότερα όρια που θα χρειαστούμε προκύπτουν με αντικατάσταση, γραφική επόπτευση, αριθμητική προσέγγιση, λίγη άλγεβρα — ή με κάποιον συνδυασμό όλων αυτών.

Οι τιμές μερικών συναρτήσεων μεταβάλλονται κατά συνεχή τρόπο με τις τιμές των μεταβλητών τους — όσο μικραίνει η διακύμανση της μεταβλητής, τόσο μικραίνει και η διακύμανση της συνάρτησης. Σε άλλες συναρτήσεις, πάλι, οι τιμές των συναρτήσεων παρουσιάζουν «άλματα» ή ακατάστατες διακυμάνσεις, ανεξάρτητα από το πόσο προσεκτικά ελέγχουμε τις τιμές της μεταβλητής. Η έννοια του ορίου παρέχει έναν ακριβή τρόπο διαχωρισμού μεταξύ αυτών των δύο τύπων συμπεριφοράς. Επίσης, τα όρια μας χρησιμεύουν στο να ορίζουμε εφαπτόμενες ευθείες σε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Η γεωμετρική αυτή εφαρμογή οδηγεί κατευθείαν στην πολύ σπουδαία έννοια της παραγώγου μιας συναρτήσεως. Η παράγωγος, την οποία θα μελετήσουμε διεξοδικά στο Κεφάλαιο 2, μας επιτρέπει να μετράμε ανά πάσα στιγμή τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλονται οι τιμές μιας συναρτήσεως.

1.1 Ρυθμοί μεταβολής και όρια

Μέση και στιγμιαία ταχύτητα • Μέσοι ρυθμοί μεταβολής και τέμνουσες ευθείες • Όρια συναρτήσεων • Άτυπος ορισμός του ορίου • Ακριβής ορισμός του ορίου

CD-ROM
Δικτυότοπος

Εδώ θα ορίσουμε τον μέσο και τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής. Θα οδηγηθούμε, έτσι, στην κυριότερη έννοια της ενότητας: την έννοια του ορίου.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Ζήνων
(490 π.Χ.- 430 π.Χ.)

Μέση και στιγμιαία ταχύτητα

Η **μέση ταχύτητα** ενός κινούμενου σώματος σε κάποιο χρονικό διάστημα ισούται με το πηλίκο της διανυθείσας απόστασης διά τον αντίστοιχο χρόνο. Το πηλίκο αυτό μετριέται σε μονάδες μήκους ανά μονάδα χρόνου: π.χ. χιλιόμετρα ανά ώρα, μέτρα ανά δευτερόλεπτο, κ.λπ., ανάλογα με το εκάστοτε πρόβλημα προς επίλυση.

Παράδειγμα 1 Εύρεση μέσης ταχύτητας

Ένας βράχος αποκόπτεται από την κορυφή μιας απότομης βουνοπλαγιάς και πέφτει κατακόρυφα. Πόση είναι η μέση ταχύτητά του κατά τα δύο πρώτα δευτερόλεπτα της πτώσης του;

Ελεύθερη πτώση

Κοντά στην επιφάνεια της Γης, όλα τα σώματα πέφτουν με την ίδια σταθερή επιτάχυνση. Αν ένα σώμα που αρχικά ηρεμούσε αφεθεί να πέσει, η απόσταση που διανύει είναι σταθερό πολλαπλάσιο του τετραγώνου του χρόνου πτώσεως. Έτσι, τουλάχιστον, συμβαίνει όταν η πτώση γίνεται στο κενό, όπου δεν υπάρχει η επιβραδυντική επίδραση του αέρα. Όμως ακόμη και στον αέρα, ο κανόνας του τετραγώνου του χρόνου εξακολουθεί να ισχύει για συμπαγή, βαριά αντικείμενα όπως βράχους, ρουλεμάν και ατσάλινα εργαλεία, κατά τα πρώτα δευτερόλεπτα της πτώσης τους (προτού η ταχύτητά τους πάρει τιμές όπου η αντίσταση του αέρα αρχίζει πάλι να παίζει ρόλο). Όταν η αντίσταση του αέρα δεν υπάρχει ή είναι αμελητέα, και η μόνη δύναμη που δρα σε σώμα που πέφτει είναι η βαρύτητα, τότε καλούμε την κίνηση του σώματος *ελεύθερη πτώση*.

Λύση Έχει δειχθεί πειραματικά ότι όταν ένα συμπαγές στερεό σώμα που αρχικά ηρεμεί σε θέση κοντά στην επιφάνεια της Γης, αφεθεί να πέσει ελεύθερα, θα διανύσει

$$y = 4{,}9t^2$$

μέτρα στα πρώτα t δευτερόλεπτα της πτώσης του. Η μέση ταχύτητα του βράχου κατά τη διάρκεια τυχόντος χρονικού διαστήματος ισούται με τη διανυθείσα απόσταση, Δy, διά το χρονικό διάστημα Δt. Έτσι, για τα πρώτα 2 sec της πτώσης, από $t = 0$ έως $t = 2$, θα έχουμε

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4{,}9(2)^2 - 4{,}9(0)^2}{2-0} = 9{,}8 \text{ m/sec}.$$

Παράδειγμα 2 Εύρεση στιγμαίας ταχύτητας

Βρείτε την ταχύτητα του βράχου του Παραδείγματος 1 τη χρονική στιγμή $t = 2$.

Λύση

Αριθμητική επίλυση

Η μέση ταχύτητα του βράχου κατά το χρονικό διάστημα από $t = 2$ έως $t = 2 + h$, $h > 0$, ισούται με

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4{,}9(2+h)^2 - 4{,}9(2)^2}{h}. \tag{1}$$

Ο τύπος αυτός δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της στιγμιαίας ταχύτητας ακριβώς για $t = 2$, αφού κάτι τέτοιο θα απαιτούσε να θέσουμε $h = 0$, και το πηλίκο 0/0 δεν ορίζεται. Μπορούμε, ωστόσο, να δούμε τι συμβαίνει τη στιγμή $t = 2$, αν υπολογίσουμε το πηλίκο για τιμές του h *κοντά* στο 0. Προκύπτει τότε μια σαφής συμπεριφορά (Πίνακας 1.1).

Καθώς το h τείνει στο 0, η μέση ταχύτητα προσεγγίζει την οριακή τιμή 19,6 m/sec.

Αλγεβρική επαλήθευση

Αναπτύσσοντας τον αριθμητή της Εξισώσεως (1) και εκτελώντας τις πράξεις, βρίσκουμε

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4{,}9(2+h)^2 - 4{,}9(2)^2}{h} = \frac{4{,}9(4+4h+h^2) - 19{,}6}{h}$$

$$= \frac{19{,}6h + 4{,}9h^2}{h} = 19{,}6 + 4{,}9h.$$

Για h διάφορο του μηδενός, η μέση ταχύτητα ισούται με $19{,}6 + 4{,}9h$ m/sec. Βλέπουμε λοιπόν τώρα γιατί η οριακή τιμή της μέσης ταχύτητας είναι $19{,}6 + 4{,}9(0) = 19{,}6$ m/sec καθώς το h τείνει στο 0.

Πίνακας 1.1 Μέσες ταχύτητες για μικρά χρονικά διαστήματα που αρχίζουν τη στιγμή $t = 2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4{,}9(2+h)^2 - 4{,}9(2)^2}{h}$$

Χρονικό διάστημα, h (sec)	**Μέση ταχύτητα στο διάστημα $\Delta y/\Delta t$ (m/sec)**
1	24,5
0,1	20,09
0,01	19,649
0,001	19,6049
0,0001	19,60049
0,00001	19,600049

Μέσοι ρυθμοί μεταβολής και τέμνουσες ευθείες

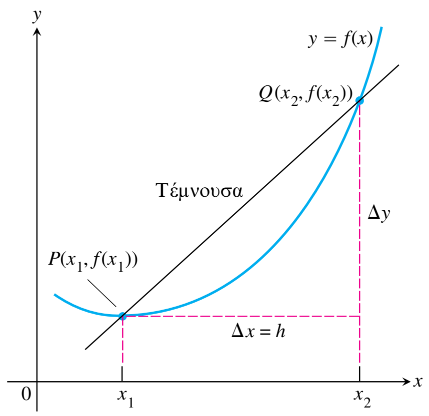
Για τυχούσα συνάρτηση $y = f(x)$, υπολογίζουμε τον μέσο ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο διάστημα $[x_1, x_2]$ ως εξής: διαιρούμε τη μεταβολή του y, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$, με το μήκος $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ του διαστήματος στο οποίο σημειώνεται η εν λόγω μεταβολή.

Ορισμός Μέσος ρυθμός μεταβολής

Ο **μέσος ρυθμός μεταβολής** του $y = f(x)$ ως προς x στο διάστημα $[x_1, x_2]$ ισούται με

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \qquad h \neq 0.$$

Από γεωμετρική άποψη, ο μέσος ρυθμός μεταβολής είναι η κλίση μιας τέμνουσας ευθείας.



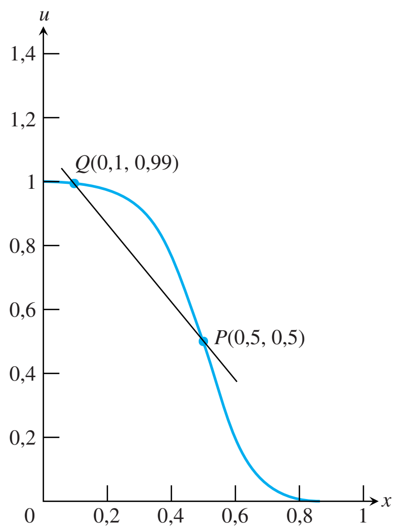
Σχημα 1.1 Μια τέμνουσα της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$. Η κλίση της είναι $\Delta y / \Delta x$, ίση με τον μέσο ρυθμό μεταβολής τής f στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Σημειώστε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f στο $[x_1, x_2]$ δεν είναι παρά η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $P(x_1, f(x_1))$ και $Q(x_2, f(x_2))$ (Σχήμα 1.1). Στη γεωμετρία, η ευθεία που ενώνει δύο σημεία μιας καμπύλης είναι μια **τέμνουσα** της καμπύλης. Έτσι, ο μέσος ρυθμός μεταβολής της f από το x_1 στο x_2 ταυτίζεται με την κλίση της τέμνουσας PQ.

Οι μηχανικοί υπολογίζουν συχνά ρυθμούς μεταβολής της θερμοκρασίας, για να προσδιορίσουν αν θα παρουσιαστούν ρωγμές ή άλλου είδους φθορές σε διάφορα υλικά που τους ενδιαφέρουν.

Παράδειγμα 3 Μεταβολή θερμοκρασίας θερμικής θωράκισης

Ένας μηχανολόγος μηχανικός σχεδιάζει μια θερμική θωράκιση πάχους 1 cm που προορίζεται για ένα διαστημικό λεωφορείο. Έχει ήδη προσδιορίσει πόση θα είναι η θερμοκρασία u σε κάθε εσωτερικό σημείο x της θωράκισης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2 (όπου οι θερμοκρασίες έχουν κανονικοποιηθεί ώστε να παίρνουν τις τιμές $0 \le u \le 1$). Απομένει να υπολογίσει τη μέγιστη θερμοκρασιακή μεταβολή ανά μονάδα πάχους που καλείται να αντέξει το συγκεκριμένο υλικό.



Σχημα 1.2 Η θερμοκρασία του στρώματος θερμικής θωράκισης έναντι του βάθους στο εσωτερικό του στρώματος, λίγο μετά την είσοδο στην ατμόσφαιρα της Γης.

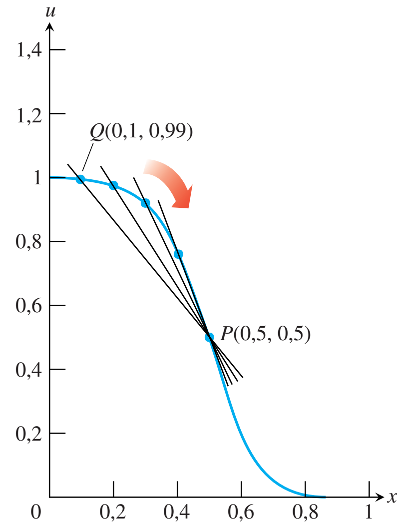
Λύση Από τη γραφική παράσταση της θερμοκρασίας (Σχήμα 1.2), ο μηχανικός διακρίνει ότι η κλίση της καμπύλης γίνεται μέγιστη (πιο απότομη) στο σημείο P βάθους 0,5 cm. Ο μέσος ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας, από το σημείο Q βάθους 0,1 cm μέχρι το σημείο P βάθους 0,5 cm, δίνεται από τη σχέση:

$$\text{Μέσος ρυθμός μεταβολής:}\quad \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{0{,}99 - 0{,}5}{0{,}1 - 0{,}5} \approx -1{,}23 \text{ deg/cm}.$$

Η μέση αυτή τιμή δεν είναι παρά η κλίση της τέμνουσας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία P και Q στο γράφημα του Σχήματος 1.2. Όμως ο μέσος ρυθμός μεταβολής δεν μας πληροφορεί για το πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η θερμοκρασία στο ίδιο το σημείο P. Για να το μάθουμε αυτό θα πρέπει να μελετήσουμε τους μέσους ρυθμούς μεταβολής για ολοένα και βραχύτερα διαστήματα που αρχίζουν ή τελειώνουν στο σημείο $x = 0{,}5$ cm. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπολογίζουμε τις κλίσεις των τεμνουσών που διέρχονται από τα P και Q, για μια ακολουθία σημείων Q της καμπύλης που πλησιάζουν στο P (Σχήμα 1.3).

Όπως φαίνεται από τον πίνακα τιμών του Σχήματος 1.3, οι κλίσεις των τεμνουσών κυμαίνονται από $-1{,}23$ έως $-2{,}6$, καθώς η συντεταγμένη x του Q μεταβάλλεται από 0,1 σε 0,4. Από γεωμετρική

Q	Κλίση της $PQ = \Delta u/\Delta x$
(0,1, 0,99)	$\frac{0{,}99 - 0{,}5}{0{,}1 - 0{,}5} \approx -1{,}23$
(0,2, 0,98)	$\frac{0{,}98 - 0{,}5}{0{,}2 - 0{,}5} \approx -1{,}60$
(0,3, 0,92)	$\frac{0{,}92 - 0{,}5}{0{,}3 - 0{,}5} \approx -2{,}10$
(0,4, 0,76)	$\frac{0{,}76 - 0{,}5}{0{,}4 - 0{,}5} \approx -2{,}60$

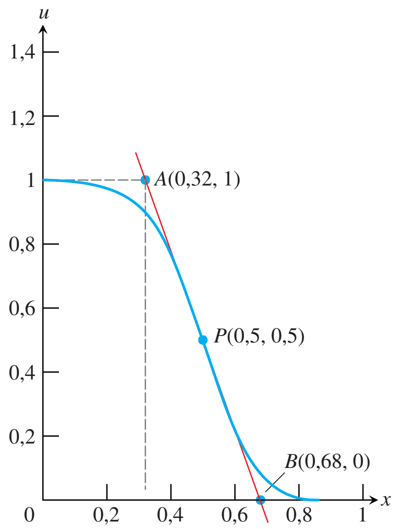


ΣΧΗΜΑ 1.3 Οι θέσεις και οι κλίσεις τεσσάρων τεμνουσών που διέρχονται από το σημείο P του γραφήματος του Σχήματος 1.2.

σκοπιά, αυτό σημαίνει ότι οι διαδοχικές τέμνουσες ευθείες περιστρέφονται δεξιόστροφα ως προς το P, προσεγγίζοντας μια ευθεία που διέρχεται από το P με την ίδια κλίση (το ίδιο απότομα) με την καμπύλη στο P. Όπως θα δούμε, η ευθεία αυτή καλείται *εφαπτομένη* της καμπύλης στο σημείο P (Σχήμα 1.4). Και αφού η ευθεία αυτή δείχνει να περνά από τα σημεία $A(0{,}32,\ 1)$ και $B(0{,}68,\ 0)$, η κλίση της θα ισούται με

$$\frac{1 - 0}{0{,}32 - 0{,}68} \approx -2{,}78 \text{ deg/cm}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι στο σημείο P, όπου το πάχος της θερμικής θωράκισης ισούται με 0,5 cm, η θερμοκρασία μεταβάλλεται με ρυθμό περίπου $-2{,}78$ deg/cm.



ΣΧΗΜΑ 1.4 Η εφαπτομένη στο σημείο P είναι το ίδιο απότομη (ίσης κλίσεως) με την καμπύλη στο P.

Ο ρυθμός πτώσεως του βράχου (Παράδειγμα 2) κατά τη χρονική στιγμή $t = 2$, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας (Παράδειγμα 3) στο σημείο βάθους 0,5 cm, καλούνται *στιγμιαίοι ρυθμοί μεταβολής*. Όπως φαίνεται από τα παραδείγματα, οι στιγμιαίοι ρυθμοί προκύπτουν ως οριακές τιμές των μέσων ρυθμών. Στο Παράδειγμα 3, εξάλλου, παρουσιάσαμε την εφαπτόμενη ευθεία της θερμοκρασιακής καμπύλης στο σημείο 0,5 ως την οριακή θέση μιας ακολουθίας τεμνουσών. Οι στιγμιαίοι ρυθμοί και οι εφαπτόμενες ευθείες είναι δυο στενά συνδεδεμένες έννοιες, που απαντούν σε ευρύ φάσμα εφαρμογών. Για να τις κατανοήσουμε βαθύτερα, θα πρέπει να διερευνήσουμε τη διαδικασία προσδιορισμού οριακών τιμών, δηλαδή των *ορίων,* όπως οι τελευταίες ονομάζονται.

Όρια συναρτήσεων

Προτού ορίσουμε την έννοια του ορίου, ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα.

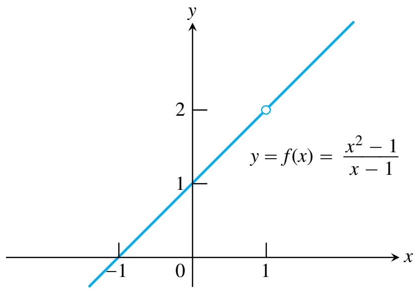
CD-ROM
Δικτυότοπος

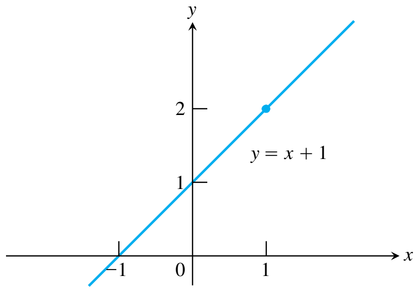
Παράδειγμα 4 Συμπεριφορά συναρτήσεως κοντά σε σημείο

Πώς συμπεριφέρεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

κοντά στο σημείο $x = 1$;





Σχημα 1.5 Η γραφική παράσταση της f ταυτίζεται με την ευθεία $y = x + 1$ με εξαίρεση το σημείο $x = 1$, όπου η f δεν ορίζεται.

Λύση Ο παραπάνω τύπος ορίζει την f για κάθε πραγματικό x εκτός του $x = 1$ (δεν μπορούμε να διαιρέσουμε με το μηδέν). Για $x \neq 1$, απλοποιούμε τον τύπο παραγοντοποιώντας τον αριθμητή και απαλείφοντας κοινούς παράγοντες:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1 \text{ για } x \neq 1.$$

Συνεπώς, η γραφική παράσταση της f θα είναι η ευθεία $y = x + 1$ *χωρίς* το σημείο (1, 2). Το αφαιρεθέν αυτό σημείο φαίνεται ως «οπή» στο Σχήμα 1.5. Παρόλο που η $f(1)$ δεν ορίζεται, είναι εμφανές ότι η $f(x)$ προσεγγίζει *όσο εγγύτερα θέλουμε* την τιμή 2 για τιμές του x *αρκετά κοντά* στη μονάδα (Πίνακας 1.2).

Πίνακας 1.2 Καθώς το x τείνει στη μονάδα, η $f(x) = (x^2-1)/(x-1)$ δείχνει να προσεγγίζει την τιμή 2

Τιμές x μικρότερες και μεγαλύτερες του 1	$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = x + 1, \quad x \neq 1$
0,9	1,9
1,1	2,1
0,99	1,99
1,01	2,01
0,999	1,999
1,001	2,001
0,999999	1,999999
1,000001	2,000001

Λέμε λοιπόν ότι η $f(x)$ πλησιάζει αυθαίρετα κοντά στην τιμή 2 καθώς το x πλησιάζει στη μονάδα, ή απλούστερα, ότι η $f(x)$ τείνει στο *όριο* 2 καθώς το x τείνει στη μονάδα. Και γράφουμε

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2, \qquad \text{δηλαδή} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

Άτυπος ορισμός του ορίου

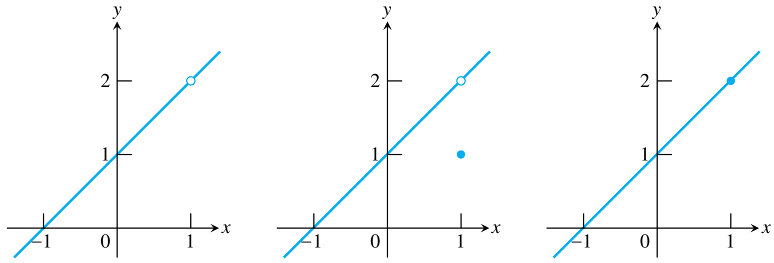
Έστω ότι η $f(x)$ ορίζεται σε ανοιχτό διάστημα εκατέρωθεν του x_0, *εκτός, ίσως από το ίδιο το* x_0. Αν η $f(x)$ πλησιάζει αυθαίρετα κοντά στην τιμή L για κάθε x που είναι αρκετά κοντά στο x_0, θα λέμε ότι η f τείνει στο **όριο** L καθώς το x τείνει στο x_0, και γράφουμε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L.$$

Πρόκειται για «άτυπο» ορισμό, διότι εκφράσεις του είδους *αυθαίρετα κοντά* και *ικανά κοντά δεν* είναι απόλυτα ακριβείς· η σημασία τους εξαρτάται από τα συμφραζόμενα. Για κάποιον τεχνικό που κατασκευάζει ένα πιστόνι, *κοντά* μπορεί να σημαίνει *σε απόσταση μερικών χιλιοστών του μέτρου.* Για έναν αστρονόμο που παρατηρεί τους μακρινούς γαλαξίες, *κοντά* μπορεί να σημαίνει *μια απόσταση μερικών χιλιάδων ετών φωτός.* Παρόλα αυτά, ο ανωτέρω ορισμός εμπεριέχει αρκετή σαφήνεια ώστε να χρησιμεύει στην εύρεση ορίων αρκετών συναρτήσεων.

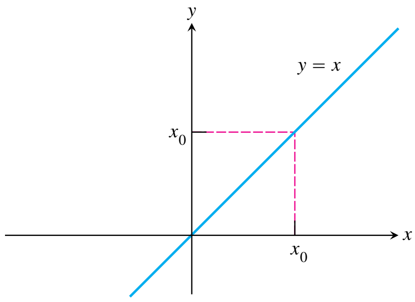
Παράδειγμα 5 Η τιμή του ορίου δεν εξαρτάται από το πώς ορίζεται η συνάρτηση στο x_0

Η συνάρτηση f στο Σχήμα 1.6 έχει όριο 2, καθώς $x \to 1$, παρά το ότι η f δεν ορίζεται στο $x = 1$. Η συνάρτηση g έχει όριο 2 καθώς $x \to 1$ παρά το ότι $2 \neq g(1)$. Η συνάρτηση h είναι η μόνη της οποίας το όριο καθώς $x \to 1$ ισούται με την τιμή της στο $x = 1$. Για την h, έχουμε $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1)$. Η ισότητα αυτή του ορίου και της τιμής μιας συναρτήσεως αποτελεί ειδική περίπτωση, με την οποία θα ασχοληθούμε στην Ενότητα 1.4.

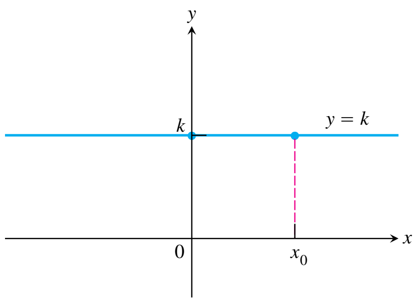


(α) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ (β) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ (γ) $h(x) = x + 1$

Σχημα 1.6 $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} h(x) = 2$.



(α) Ταυτοτική συνάρτηση



(β) Σταθερή συνάρτηση

Σχημα 1.7 Οι συναρτήσεις του Παραδείγματος 6.

Παράδειγμα 6 Δυο συναρτήσεις που διαθέτουν όρια σε κάθε τους σημείο

(α) Αν f είναι η **ταυτοτική συνάρτηση** $f(x) = x$, τότε για κάθε x_0 (Σχήμα 1.7α),

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0 .$$

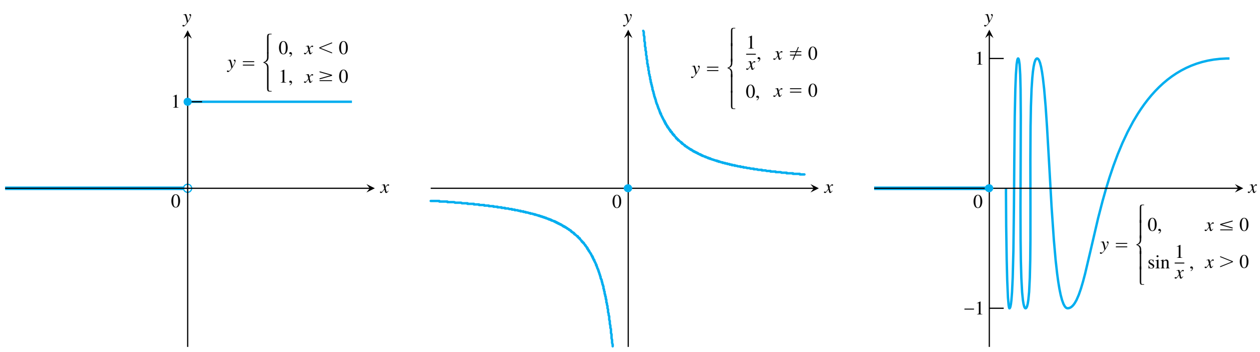
(β) Αν f είναι η **σταθερή συνάρτηση** $f(x) = k$ (συνάρτηση με σταθερή τιμή k), τότε για κάθε x_0 (Σχήμα 1.7β),

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} k = k .$$

Παραδείγματος χάριν,

$$\lim_{x\to 3} x = 3 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to -7} (4) = \lim_{x\to 2} (4) = 4.$$

Στο Σχήμα 1.8 φαίνονται μερικές περιπτώσεις συναρτήσεων που δεν έχουν όρια για κάποιες τιμές του x. Η συμπεριφορά των συναρτήσεων αυτών αναλύεται στο επόμενο παράδειγμα.



(α) Συνάρτηση μοναδιαίας βαθμίδας $U(x)$ (β) $g(x)$ (γ) $f(x)$

Σχημα 1.8 Οι συναρτήσεις του Παραδείγματος 7.

Παράδειγμα 7 Όρια μπορεί να μην υπάρχουν

Μελετήστε τη συμπεριφορά των συναρτήσεων που ακολουθούν, καθώς $x \to 0$.

(α) $U(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0 \\ 1\,, & x \geq 0 \end{cases}$

(β) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$

(γ) $f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \leq 0 \\ \sin \dfrac{1}{x}\,, & x > 0 \end{cases}$

Λύση

(α) Η συνάρτηση παρουσιάζει *άλμα*: Η **συνάρτηση μοναδιαίας βαθμίδας** $U(x)$ δεν έχει όριο καθώς $x \to 0$, αφού οι τιμές της παρουσιάζουν άλμα στο $x = 0$. Για x που τείνουν στο μηδέν από αρνητικές τιμές, έχουμε $U(x) = 0$. Για x που τείνουν στο μηδέν από θετικές τιμές, έχουμε $U(x) = 1$. Δεν υπάρχει λοιπόν *μοναδική* τιμή L που να προσεγγίζεται από τη συνάρτηση $U(x)$ καθώς $x \to 0$ (Σχήμα 1.8α).

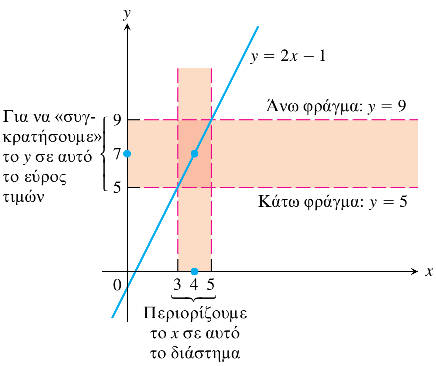
(β) Η συνάρτηση *παίρνει απεριόριστα μεγάλες τιμές:* η $g(x)$ δεν έχει όριο καθώς $x \to 0$, αφού οι τιμές τής g αυξάνονται απεριόριστα (κατ' απόλυτη τιμή) καθώς $x \to 0$, δηλαδή δεν προσεγγίζουν *κανέναν* πραγματικό αριθμό (Σχήμα 1.8β).

(γ) Η συνάρτηση *ταλαντώνεται*: η $f(x)$ δεν έχει όριο καθώς $x \to 0$, αφού οι τιμές της ταλαντώνονται μεταξύ του $+1$ και του -1 σε κάθε ανοιχτό διάστημα που περιέχει το 0. Οι τιμές της συναρτήσεως δεν προσεγγίζουν κανέναν αριθμό καθώς $x \to 0$ (Σχήμα 1.8γ).

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Αριστοτέλης
(384 π.Χ.-322 π.Χ.)

Ακριβής ορισμός του ορίου

Προκειμένου να δείξουμε ότι το όριο της $f(x)$ ισούται με L, καθώς $x \to x_0$, πρέπει να δείξουμε ότι η απόσταση μεταξύ των $f(x)$ και L μπορεί να γίνει «όσο μικρή θέλουμε» αν περιορίσουμε το x «αρκούντως κοντά» στο x_0. Ας δούμε τι συνεπάγεται αυτό, από τη στιγμή που έχουμε καθορίσει το μέγεθος της απόστασης μεταξύ των $f(x)$ και L.



Σχημα 1.9 Περιορίζοντας το x σε απόσταση το πολύ μίας μονάδας από το $x_0 = 4$, καταφέρνουμε να συγκρατήσουμε το y σε απόσταση μικρότερη των δύο μονάδων από το $y_0 = 7$.

Παράδειγμα 8 «Συγκρατώντας» τις τιμές μιας γραμμικής συνάρτησης

Πόσο κοντά στο $x_0 = 4$ πρέπει να «περιορίσουμε» την τιμή εισόδου x ούτως ώστε η τιμή εξόδου $y = 2x - 1$ να απέχει λιγότερο από 2 μονάδες από το $y_0 = 7$;

Λύση Τίθεται λοιπόν το ερώτημα: Για ποιες τιμές του x αληθεύει ότι $|y - 7| < 2$; Για να το απαντήσουμε, θα πρέπει πρώτα να εκφράσουμε το $|y - 7|$ συναρτήσει του x:

$$|y - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8|\,.$$

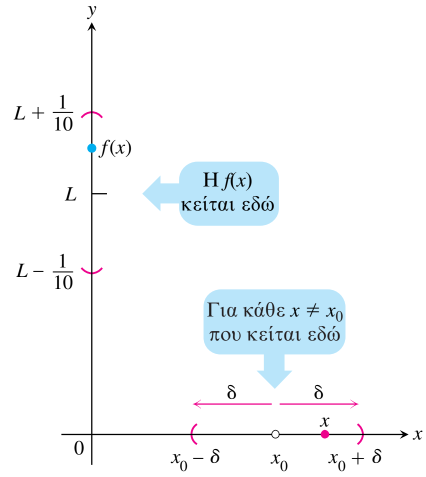
Το ερώτημα τώρα είναι το εξής: ποιες τιμές του x ικανοποιούν την ανισότητα $|2x - 8| < 2$; Λύνουμε την ανισότητα:

$$\begin{aligned} |2x - 8| &< 2 \\ -2 < 2x - 8 &< 2 \\ 6 < 2x &< 10 \\ 3 < x &< 5 \\ -1 < x - 4 &< 1\,. \end{aligned}$$

Έτσι, περιορίζοντας το x σε απόσταση το πολύ μίας μονάδας από το $x_0 = 4$, συγκρατούμε το y σε απόσταση δύο μονάδων από την τιμή $y_0 = 7$ (Σχήμα 1.9).

Στο Παράδειγμα 8, προσδιορίσαμε πόσο κοντά σε μια τιμή x_0 πρέπει να περιορίσουμε τη μεταβλητή x, προκειμένου να συγκρατηθούν οι τιμές της $f(x)$ εντός ενός προκαθορισμένου διαστήματος γύρω από το όριο L. Για να δείξουμε ότι το όριο της $f(x)$, καθώς $x \to x_0$, όντως ισούται με L, θα πρέπει να δείξουμε ότι η απόσταση μεταξύ της $f(x)$ και του L μπορεί να γίνει μικρότερη από *οποιοδήποτε προκαθορισμένο σφάλμα,* όσο μικρό κι αν είναι αυτό, αρκεί να συγκρατούμε το x αρκετά κοντά στο x_0.

Έστω ότι παρατηρούμε τις τιμές μιας συναρτήσεως $f(x)$ καθώς το x τείνει στο x_0 (χωρίς όμως να γίνεται ίσο με x_0). Θα πρέπει να μπορούμε με βεβαιότητα να αποφανθούμε ότι η $f(x)$ συγκρατείται σε απόσταση μικρότερη π.χ. του ενός δεκάτου της μονάδας από το L, εφόσον το x περιοριστεί σε μια απόσταση μικρότερη του δ από το x_0 (Σχήμα 1.10). Βέβαια από μόνο του αυτό δεν αρκεί, διότι καθώς το x συνεχίζει να πλησιάζει στο x_0, ποιος μας εγγυάται ότι η $f(x)$ δεν θα αυξομειώνεται αυθαίρετα εντός του διαστήματος από $L - 1/10$ έως $L + 1/10$, χωρίς ποτέ να τείνει στο L; Θα εξασφαλίσουμε λοιπόν ότι η $f(x)$ τείνει στο L αν δείξουμε ότι ανεξάρτητα του πόσο μειώσουμε την απόσταση «ανοχής» της $f(x)$ από το L, εφόσον εμείς περιορίζουμε το x αρκετά κοντά στο x_0, η $f(x)$ θα παραμένει εντός της απόστασης ανοχής από το L. Με άλλα λόγια, καθώς το x πλησιάζει ολοένα και εγγύτερα στο x_0, η συνάρτηση $y = f(x)$ προσεγγίζει ολοένα και περισσότερο το L.



ΣΧΗΜΑ 1.10 Προκαταρκτικό στάδιο στην ανάπτυξη του ορισμού του ορίου.

Ορισμός **Αυστηρός ορισμός του ορίου**

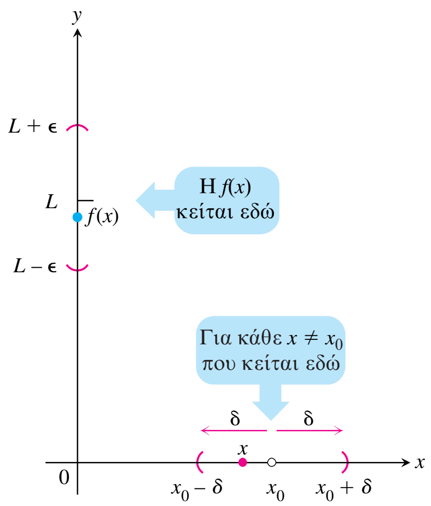
Έστω ότι η $f(x)$ ορίζεται σε κάθε σημείο ανοιχτού διαστήματος που περιέχει το x_0, εκτός ενδεχομένως στο ίδιο το x_0. Λέμε ότι η $f(x)$ τείνει στο **όριο** L καθώς το x τείνει στο x_0, και γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα αντίστοιχο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon .$$

Ο ορισμός του ορίου αποδίδεται γραφικά στο Σχήμα 1.11.



ΣΧΗΜΑ 1.11 Η σχέση μεταξύ του δ και του ϵ στον ορισμό του ορίου.

Παράδειγμα 9 Έλεγχος του ορισμού

Δείξτε ότι $\lim_{x\to 1} (5x - 3) = 2$.

Λύση Στις σχέσεις του ορισμού θέτουμε $x_0 = 1$, $f(x) = 5x - 3$, και $L = 2$. Για κάθε $\epsilon > 0$, θα πρέπει να βρούμε ένα κατάλληλο $\delta > 0$ ούτως ώστε αν $x \neq 1$ και το x απέχει λιγότερο από δ από το $x_0 = 1$, δηλαδή αν

$$0 < |x - 1| < \delta,$$

η $f(x)$ να απέχει λιγότερο από ϵ από το $L = 2$, δηλαδή

$$|f(x) - 2| < \epsilon .$$

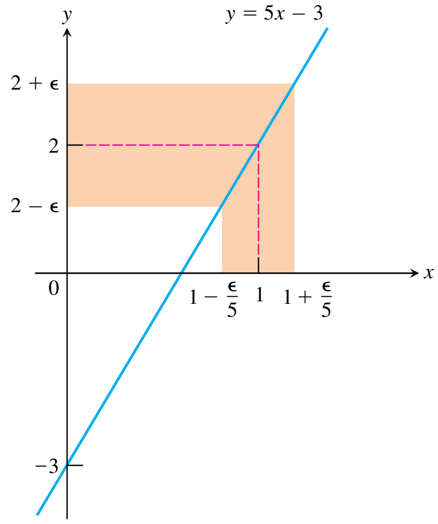
Βρίσκουμε το δ ξεκινώντας από την ανισότητα που ικανοποιεί το ϵ:

$$\begin{aligned} |(5x - 3) - 2| = |5x - 5| &< \epsilon \\ 5|x - 1| &< \epsilon \\ |x - 1| &< \epsilon/5 . \end{aligned}$$

Συνεπώς, μπορούμε να θέσουμε $\delta = \epsilon/5$ (Σχήμα 1.12).
Αν $0 < |x-1| < \delta = \epsilon/5$, τότε

$$|(5x-3)-2| = |5x-5| = 5|x-1| < 5(\epsilon/5) = \epsilon,$$

οπότε $\lim_{x\to 1}(5x-3) = 2$.



ΣΧΗΜΑ 1.12 Αν $f(x) = 5x-3$, τότε ο περιορισμός $0 < |x-1| < \epsilon/5$ εγγυάται ότι $|f(x)-2| < \epsilon$. (Παράδειγμα 9)

Η τιμή αυτή ($\delta = \epsilon/5$) δεν είναι η μόνη για την οποία η ανισότητα $0 < |x-1| < \delta$ μας εξασφαλίζει ότι $|5x-5| < \epsilon$. Κάθε θετική τιμή του δ μικρότερη από την παραπάνω είναι εξίσου ικανοποιητική. Όντως, ο ορισμός δεν απαιτεί να βρούμε ένα «βέλτιστο» θετικό δ, απλώς κάποιο δ που να ικανοποιεί τις ανισότητες.

Στο Παράδειγμα 9, το διάστημα γύρω από το x_0 όπου η ποσότητα $|f(x)-L|$ είναι μικρότερη του ϵ ήταν συμμετρικό ως προς το x_0, και έτσι το δ μπορούσε να τεθεί ίσο με το μισό μήκος του διαστήματος. Αν δεν υπάρχει τέτοιου είδους συμμετρία, όπως συμβαίνει συνήθως, μπορούμε να θέσουμε το δ ίσο με την απόσταση από το x_0 του πλησιέστερου άκρου του διαστήματος. Μια τέτοια περίπτωση φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 10 Αλγεβρική εύρεση του δ για δεδομένο ε

Για $\epsilon = 1$, βρείτε ένα $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\lim_{x\to 5}\sqrt{x-1} = 2$. Με άλλα λόγια, βρείτε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x

$$0 < |x-5| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x-1}-2| < 1.$$

Λύση Οργανώνουμε την εύρεση του δ σε δύο βήματα. Πρώτα θα επιλύσουμε την ανισότητα $|\sqrt{x-1}-2| < 1$ ώστε να βρούμε ένα διάστημα (a, b) γύρω από το $x_0 = 5$, σε κάθε σημείο $x \neq x_0$ του οποίου να ικανοποιείται η ανισότητα. Κατόπιν θα βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το διάστημα $5-\delta < x < 5+\delta$ (συμμετρικό ως προς το $x_0 = 5$) να κείται εντός του (a, b).

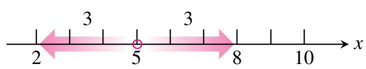
Βήμα 1: *Επιλύουμε την ανισότητα $|\sqrt{x-1}-2| < 1$ για να βρούμε ένα διάστημα γύρω από το $x_0 = 5$, όπου να ισχύει η ανισότητα για κάθε $x \neq x_0$.*

$$|\sqrt{x-1}-2|<1$$
$$-1<\sqrt{x-1}-2<1$$
$$1<\sqrt{x-1}<3$$
$$1<x-1<9$$
$$2<x<10$$

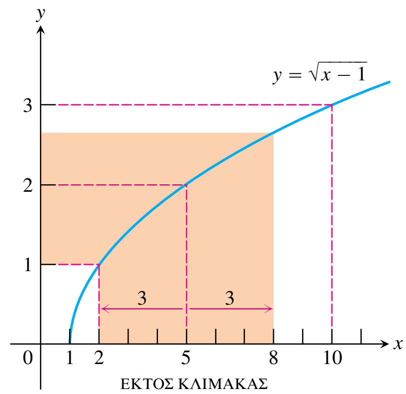
Η ανισότητα λοιπόν ισχύει για κάθε $x \neq 5$ στο ανοιχτό διάστημα (2, 10).

Βήμα 2: *Βρίσκουμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το διάστημα $5-\delta < x < 5+\delta$ να κείται εντός του* (2, 10). Η απόσταση του 5 από το πλησιέστερο άκρο του διαστήματος (2, 10) είναι 3 (Σχήμα 1.13). Θέτοντας $\delta = 3$ (ή μικρότερο), η ανισότητα $0 < |x-5| < \delta$ αυτομάτως τοποθετεί το x ανάμεσα στο 2 και στο 10, έτσι ώστε $|\sqrt{x-1}-2|<1$ (Σχήμα 1.14):

$$0<|x-5|<3 \Rightarrow |\sqrt{x-1}-2|<1\,.$$



ΣΧΗΜΑ 1.13 Το ανοιχτό διάστημα ακτίνας 3 γύρω από το σημείο $x_0 = 5$ κείται εντός του ανοιχτού διαστήματος (2, 10).



ΣΧΗΜΑ 1.14 Η συνάρτηση και τα διαστήματα του Παραδείγματος 10.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.1

Μέσοι ρυθμοί μεταβολής

Στις Ασκήσεις 1-4, βρείτε τον μέσο ρυθμό μεταβολής κάθε συναρτήσεως στα διαστήματα που δίδονται.

1. $f(x) = x^3 + 1$

   (α) $[2, 3]$ **(β)** $[-1, 1]$

2. $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1}$, $[0, 2]$

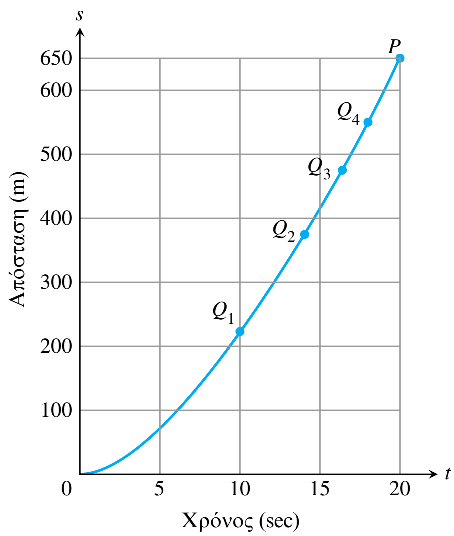
3. $h(t) = \cot t$

   (α) $[\pi/4, 3\pi/4]$ **(β)** $[\pi/6, \pi/2]$

4. $g(t) = 2 + \cos t$

   (α) $[0, \pi]$ **(β)** $[-\pi, \pi]$

5. *Ταχύτητα ενός Ford Mustang Cobra* Το σχήμα δείχνει τη διανυθείσα απόσταση έναντι του χρόνου για ένα μοντέλο Ford Mustang Cobra του 1994 που επιταχύνεται από τη θέση ηρεμίας.



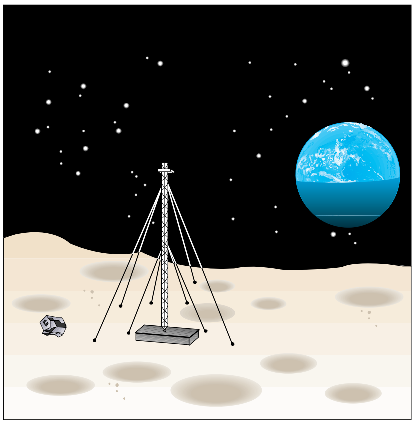
(α) Εκτιμήστε από το σχήμα τις κλίσεις των τεμνουσών PQ_1, PQ_2, PQ_3, και PQ_4, και καταχωρίστε τις σε πίνακα. Σε τι μονάδες μετρώνται οι κλίσεις αυτές;

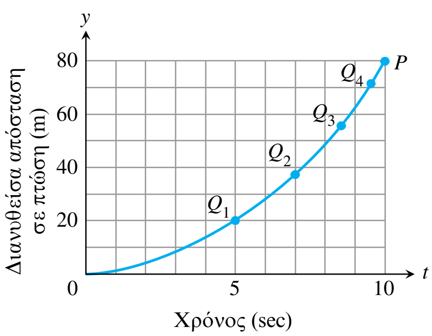
(β) Στη συνέχεια εκτιμήστε την ταχύτητα του αυτοκινήτου κατά τη χρονική στιγμή $t = 20$ sec.

6. *Ταχύτητα ρουλεμάν που πέφτει* Ακολουθεί ένα διάγραμμα της απόστασης που διανύει πέφτοντας, έναντι του χρόνου, ένα ρουλεμάν που αφήνεται να πέσει από την κορυφή μιας τηλεπικοινωνιακής κεραίας (ύψους 80 m) στην οροφή διαστημικού σταθμού στη Σελήνη.

(α) Εκτιμήστε από το σχήμα τις κλίσεις των τεμνουσών PQ_1, PQ_2, PQ_3, και PQ_4, και καταχωρίστε τις σε πίνακα παρόμοιο με αυτόν του Σχήματος 1.3.

(β) Με ποια ταχύτητα περίπου προσέκρουσε στην οροφή το ρουλεμάν;





7. *Ταχύτητα μπάλας* Τα δεδομένα του ακόλουθου πίνακα παριστάνουν την απόσταση που διανύει μια μπάλα κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου. Εκτιμήστε τη στιγμιαία ταχύτητα για $t = 1$ βρίσκοντας ένα άνω και ένα κάτω φράγμα της, και παίρνοντας τη μέση τιμή τους. Με άλλα λόγια, βρείτε τα a και b ώστε $a \le v(1) \le b$ και εκτιμήστε κατόπιν τη $v(1)$ ως $(a + b)/2$.

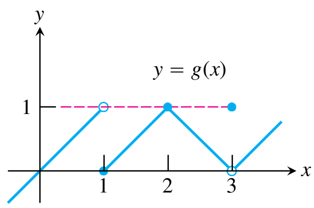
Χρόνος t (sec)	**Διανυθείσα απόσταση (m)**
0	0
0,2	0,16
0,4	0,64
0,6	1,44
0,8	2,56
1,0	3,99
1,2	5,75
1,4	7,83

8. *Απόσταση που διανύεται από τρένο* Ένα τρένο επιταχύνεται από την ηρεμία μέχρι τη μέγιστη ταχύτητά του, ενώ αργότερα επιβραδύνεται ώστε να διέλθει από μια πόλη με σταθερή ταχύτητα. Μόλις εξέρχεται από την πόλη επιταχύνεται και πάλι αποκτώντας μέγιστη ταχύτητα. Τελικά, επιβραδύνεται απαλά και σταματά φτάνοντας στον προορισμό του. Σχεδιάστε ένα πιθανό διάγραμμα της απόστασης που διένυσε το τρένο, έναντι του χρόνου.

Εύρεση ορίων από γραφικές παραστάσεις

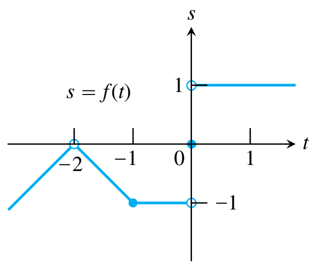
9. Για τη συνάρτηση $g(x)$ που φαίνεται στο σχήμα, βρείτε τα ακόλουθα όρια ή εξηγήστε γιατί δεν υπάρχουν.

(α) $\lim_{x\to 1} g(x)$ **(β)** $\lim_{x\to 2} g(x)$ **(γ)** $\lim_{x\to 3} g(x)$



10. Για τη συνάρτηση $f(t)$ που φαίνεται στο σχήμα, βρείτε τα ακόλουθα όρια ή εξηγήστε γιατί δεν υπάρχουν.

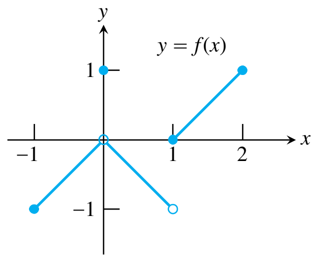
(α) $\lim_{t\to -2} f(t)$ **(β)** $\lim_{t\to -1} f(t)$ **(γ)** $\lim_{t\to 0} f(t)$



11. Για τη συνάρτηση $y = f(x)$ που φαίνεται στο σχήμα, ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

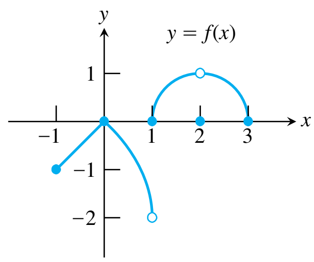
(α) Το $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει.

(β) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
(γ) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
(δ) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.
(ε) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.
(στ) Το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει για κάθε x_0 στο (–1, 1).



12. Για τη συνάρτηση $y = f(x)$ που φαίνεται στο σχήμα, ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

(α) Το $\lim_{x\to 2} f(x)$ δεν υπάρχει.
(β) $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$.
(γ) Το $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει.
(δ) Το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει για κάθε x_0 στο (–1, 1).
(ε) Το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει για κάθε x_0 στο (1, 3).



Ύπαρξη ορίων

Εξηγήστε γιατί δεν υπάρχουν τα όρια των Ασκήσεων 13 και 14.

13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$ **14.** $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$

15. *Μάθετε γράφοντας* Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται για κάθε πραγματικό x πλην του $x = x_0$. Τι συμπεραίνετε για την ύπαρξη του ορίου $\lim_{x\to x_0} f(x)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

16. *Μάθετε γράφοντας* Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται για κάθε x στο $[-1, 1]$. Τι συμπεραίνετε για την ύπαρξη του ορίου $\lim_{x\to 0} f(x)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

17. *Μάθετε γράφοντας* Αν $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$, είναι απαραίτητο να ορίζεται η f στο $x = 1$; Αν ορίζεται στο σημείο αυτό, είναι απαραίτητο να ισχύει $f(1) = 5$; Μπορούμε να συναγάγουμε *οποιαδήποτε πληροφορία* για την τιμή της f στο $x = 1$; Εξηγήστε.

18. *Μάθετε γράφοντας* Αν $f(1) = 5$, είναι απαραίτητο να υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$; Αν υπάρχει, είναι απαραίτητο να ισχύει $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$; Μπορούμε να συναγάγουμε *οποιαδήποτε πληροφορία* για το $\lim_{x\to 1} f(x)$; Εξηγήστε.

Εκτίμηση ορίων

T Για τις Ασκήσεις 19-26 χρησιμοποιήστε κομπιουτεράκι με δυνατότητα γραφικής σχεδίασης.

19. Έστω ότι $f(x) = (x^2 - 9)/(x + 3)$.

(α) Κατασκευάστε έναν πίνακα τιμών της f στα σημεία $x = -3{,}1$, $-3{,}01$, $-3{,}001$, κ.ο.κ., χρησιμοποιώντας όσα δεκαδικά ψηφία μπορεί να χειριστεί το κομπιουτεράκι σας. Κατόπιν εκτιμήστε το $\lim_{x\to -3} f(x)$. Ποια θα ήταν η απάντησή σας για το όριο, αν υπολογίζατε την f στα σημεία $x = -2{,}9$, $-2{,}99$, $-2{,}999$, . . . ;

(β) Επαληθεύστε τις απαντήσεις σας στο ερώτημα (α) σχεδιάζοντας την f κοντά στο σημείο $x_0 = -3$, και χρησιμοποιώντας τις επιλογές “Zoom” και “Trace” για να εκτιμήσετε τις τιμές y του γραφήματος καθώς $x \to -3$.

(γ) Υπολογίστε αλγεβρικά το $\lim_{x\to -3} f(x)$.

20. Έστω $g(x) = (x^2 - 2)/(x - \sqrt{2})$.

(α) Κατασκευάστε έναν πίνακα τιμών της g στα σημεία $x = 1{,}4$, $1{,}41$, $1{,}414$, κ.ο.κ., κάνοντας διαδοχικές δεκαδικές προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$. Εκτιμήστε το $\lim_{x\to \sqrt{2}} g(x)$.

(β) Επαληθεύστε την απάντησή σας στο ερώτημα (α) σχεδιάζοντας την g κοντά στο σημείο $x_0 = \sqrt{2}$, και χρησιμοποιώντας τις επιλογές “Zoom” και “Trace” για να εκτιμήσετε τις τιμές y του γραφήματος καθώς $x \to \sqrt{2}$.

(γ) Υπολογίστε αλγεβρικά το $\lim_{x\to \sqrt{2}} g(x)$.

21. Έστω $G(x) = (x + 6)/(x^2 + 4x - 12)$.

(α) Κατασκευάστε έναν πίνακα τιμών της G στα σημεία $x = -5{,}9$, $-5{,}99$, $-5{,}999$, κ.ο.κ. Εκτιμήστε το $\lim_{x\to -6} G(x)$. Ποια θα ήταν η απάντησή σας για το όριο, αν υπολογίζατε την G στα σημεία $x = -6{,}1$, $-6{,}01$, $-6{,}001$, ... ;

(β) Επαληθεύστε τις απαντήσεις σας στο ερώτημα (α) σχεδιάζοντας την G και χρησιμοποιώντας τις επιλογές “Zoom” και “Trace” για να εκτιμήσετε τις τιμές y του γραφήματος καθώς $x \to -6$.

(γ) Υπολογίστε αλγεβρικά το $\lim_{x\to -6} G(x)$.

22. Έστω $h(x) = (x^2 - 2x - 3)/(x^2 - 4x + 3)$.

(α) Κατασκευάστε έναν πίνακα τιμών της h στα σημεία $x = 2{,}9$, $2{,}99$, $2{,}999$, κ.ο.κ. Εκτιμήστε το $\lim_{x\to 3} h(x)$. Ποια θα ήταν η απάντησή σας για το όριο, αν υπολογίζατε την h στα σημεία $x = 3{,}1$, $3{,}01$, $3{,}001$, ... ;

(β) Επαληθεύστε τις απαντήσεις σας στο ερώτημα (α) σχεδιάζοντας την h κοντά στο σημείο $x_0 = 3$ και χρησιμοποιώντας τις επιλογές “Zoom” και “Trace” για να εκτιμήσετε τις τιμές y του γραφήματος καθώς $x \to 3$.

(γ) Υπολογίστε αλγεβρικά το $\lim_{x\to 3} h(x)$.

23. Έστω $g(\theta) = (\sin\theta)/\theta$.

(α) Κατασκευάστε πίνακες τιμών της g καθώς το θ τείνει στο $\theta_0 = 0$ από άνω και από κάτω. Εκτιμήστε το $\lim_{\theta\to 0} g(\theta)$.

(β) Επαληθεύστε την απάντησή σας στο ερώτημα (α) σχεδιάζοντας την g κοντά στο σημείο $\theta_0 = 0$.

24. Έστω $G(t) = (1 - \cos t)/t^2$.

(α) Κατασκευάστε πίνακες τιμών της G καθώς το t τείνει στο $t_0 = 0$ από άνω και από κάτω. Εκτιμήστε το $\lim_{t \to 0} G(t)$.

(β) Επαληθεύστε την απάντησή σας στο ερώτημα (α) σχεδιάζοντας την G κοντά στο σημείο $t_0 = 0$.

25. Έστω $f(x) = x^{1/(1-x)}$.

(α) Κατασκευάστε πίνακες τιμών της f καθώς το x τείνει στο $x_0 = 1$ από άνω και από κάτω. Δείχνει να έχει όριο η f καθώς $x \to 1$; Αν ναι, ποιο είναι αυτό; Αν όχι, γιατί όχι;

(β) Επαληθεύστε τις απαντήσεις σας στο ερώτημα (α) σχεδιάζοντας την f κοντά στο σημείο $x_0 = 1$.

26. Έστω $f(x) = (3^x - 1)/x$.

(α) Κατασκευάστε πίνακες τιμών της f καθώς το x τείνει στο $x_0 = 0$ από άνω και από κάτω. Δείχνει να έχει όριο η f καθώς $x \to 0$; Αν ναι, ποιο είναι αυτό; Αν όχι, γιατί όχι;

(β) Επαληθεύστε τις απαντήσεις σας στο ερώτημα (α) σχεδιάζοντας την f κοντά στο σημείο $x_0 = 0$.

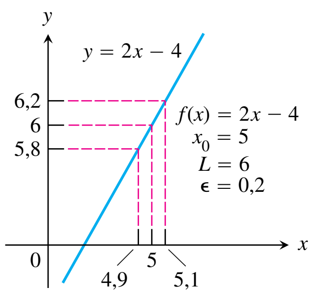
Γραφική εύρεση του δ

CD-ROM
Δικτυότοπος

Στις Ασκήσεις 27-30, κάντε χρήση των γραφικών παραστάσεων για να βρείτε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x,

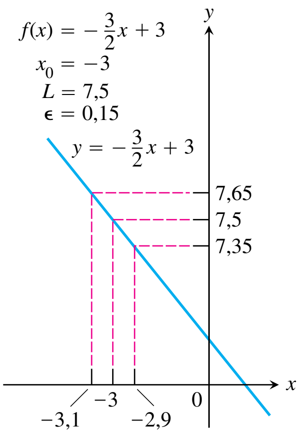
$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

26.



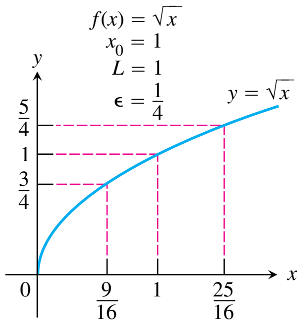
ΕΚΤΟΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

27.

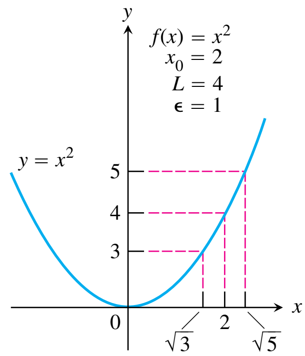


ΕΚΤΟΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

28.



29.



ΕΚΤΟΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

Αλγεβρική εύρεση του δ

Σε καθεμία από τις Ασκήσεις 31-36 δίδεται μια συνάρτηση $f(x)$ και οι αριθμοί L, x_0, και $\epsilon > 0$. Βρείτε ένα ανοιχτό διάστημα γύρω από το x_0 στο οποίο να ισχύει η ανισότητα $|f(x) - L| < \epsilon$. Κατόπιν, δώστε μια τιμή του $\delta > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει και η ανισότητα $|f(x) - L| < \epsilon$.

31. $f(x) = x + 1, \quad L = 5, \quad x_0 = 4, \quad \epsilon = 0{,}01$

32. $f(x) = 2x - 2, \quad L = -6, \quad x_0 = -2, \quad \epsilon = 0{,}02$

33. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad L = 1, \quad x_0 = 0, \quad \epsilon = 0{,}1$

34. $f(x) = \sqrt{19 - x}, \quad L = 3, \quad x_0 = 10, \quad \epsilon = 1$

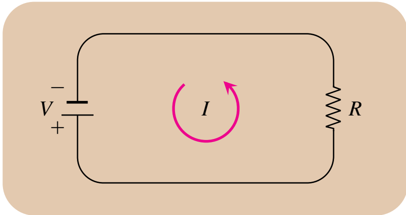
35. $f(x) = 1/x, \quad L = 1/4, \quad x_0 = 4, \quad \epsilon = 0{,}05$

36. $f(x) = x^2, \quad L = 3, \quad x_0 = \sqrt{3}, \quad \epsilon = 0{,}1$

Θεωρία και παραδείγματα

37. *Κατασκευή μηχανικών κυλίνδρων* Προκειμένου να κατασκευάσετε μηχανικούς κυλίνδρους εμβαδού διατομής 9 cm², χρειάζεται να γνωρίζετε πόση απόκλιση από την ιδανική διάμετρο του κυλίνδρου $x_0 = 3{,}385$ cm είναι επιτρεπτή, ώστε το εμβαδόν της διατομής να μην διαφέρει περισσότερο από 0,01 cm² από την απαιτούμενη τιμή 9 cm². Για να απαντήσετε στο ερώτημα αυτό, θέστε $A = \pi(x/2)^2$ και ερευνήστε σε ποιο διάστημα τιμών πρέπει να περιορίσετε το x έτσι ώστε $|A - 9| \leq 0{,}01$. Ποιο διάστημα βρήκατε;

38. *Κατασκευή ηλεκτρικών αντιστατών* Για ηλεκτρικά κυκλώματα όπως αυτό του σχήματος, ο νόμος του Ohm μάς λέει ότι $V = RI$. Εδώ V είναι μια σταθερή τάση, I είναι το ρεύμα μετρώμενο σε Ampère, και R η αντίσταση μετρώμενη σε Ohm. Η εταιρεία σας έχει αναλάβει μια παραγγελία κατασκευής αντιστατών για κύκλωμα όπου $V = 120$ Volt και το ρεύμα I πρέπει να ισούται με $5 \pm 0{,}1$ Amp. Ποιο είναι το επιτρεπτό εύρος τιμών της αντίστασης R ώστε το I να αποκλίνει το πολύ κατά 0,1 Amp από την ευκταία τιμή $I_0 = 5$;



T **39.** *Συγκράτηση τιμών συναρτήσεως* Έστω $f(x) = \sqrt{3x - 2}$.

(α) Δείξτε ότι $\lim_{x \to 2} f(x) = 2 = f(2)$.

(β) Κάνοντας χρήση του κατάλληλου γραφήματος, εκτιμήστε τα a και b, ούτως ώστε $1{,}8 < f(x) < 2{,}2$ όταν $a < x < b$.

(γ) Κάνοντας χρήση του κατάλληλου γραφήματος, εκτιμήστε τα a και b, ούτως ώστε $1{,}99 < f(x) < 2{,}01$ όταν $a < x < b$.

T **40.** *Συγκράτηση τιμών συναρτήσεως* Έστω $f(x) = \sin x$.

(α) Υπολογίστε την τιμή $f(\pi/6)$.

(β) Κάνοντας χρήση του κατάλληλου γραφήματος, βρείτε ένα διάστημα (a, b) γύρω από το σημείο $x = \pi/6$ ούτως ώστε $0{,}3 < f(x) < 0{,}7$ όταν $a < x < b$.

(γ) Κάνοντας χρήση του κατάλληλου γραφήματος, βρείτε ένα διάστημα (a, b) γύρω από το σημείο $x = \pi/6$ ούτως ώστε $0{,}49 < f(x) < 0{,}51$ όταν $a < x < b$.

41. *Ελεύθερη πτώση* Ένα μπαλόνι γεμάτο νερό αφήνεται από ένα παράθυρο πολυώροφου κτιρίου και διανύει πέφτοντας $y = 4{,}9t^2$ m σε t sec. Να υπολογίσετε

(α) τη μέση ταχύτητά του κατά τα πρώτα 3 sec της πτώσεως.

(β) την ταχύτητά του τη χρονική στιγμή $t = 3$.

42. *Ελεύθερη πτώση σε μικρό πλανήτη που δεν έχει ατμόσφαιρα* Βρισκόμαστε σε έναν μικρό πλανήτη που δεν έχει ατμόσφαιρα. Ένας βράχος που αρχικά ηρεμεί αφήνεται να πέσει σε χαράδρα βάθους 20 m. Αν πέφτοντας ο βράχος διανύει $y = gt^2$ m σε t sec, όπου g μια σταθερά, και προσκρούει στο έδαφος σε 4 sec, να υπολογίσετε:

(α) Την τιμή της σταθεράς g.

(β) Τη μέση ταχύτητα πτώσεως.

(γ) Την ταχύτητα του βράχου τη στιγμή που προσπίπτει στο έδαφος.

Αφού συμπληρώσετε τους πίνακες των Ασκήσεων 43-46, δηλώστε ποια πιστεύετε ότι είναι η τιμή του ορίου $\lim_{x \to 0} f(x)$.

(α)

x	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$ . . .
$f(x)$	;	;	;	;

(β)

x	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$	$0{,}0001$ . . .
$f(x)$	;	;	;	;

43. $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$

44. $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$

45. $f(x) = \dfrac{10^x - 1}{x}$

46. $f(x) = x \sin(\ln |x|)$

Γραφική εκτίμηση ορίων

Στις Ασκήσεις 47-50, χρησιμοποιήστε κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για να κάνετε τα εξής:

(α) Σχεδιάστε τη συνάρτηση κοντά στο σημείο x_0.

(β) Από τη γραφική παράσταση που κάνατε, προβλέψτε την τιμή του ορίου.

(γ) Βρείτε την ακριβή τιμή του ορίου με συμβολικό υπολογισμό. Πόσο καλή ήταν η πρόβλεψη που κάνατε;

47. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

48. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \sin x}$

49. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{(x + 1)^2}$

50. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 + 7} - 4}$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Γραφική εύρεση του δ

Στις Ασκήσεις 51-54, καλείστε να διερευνήσετε περαιτέρω τη διαδικασία γραφικής εύρεσης τιμών του δ. Χρησιμοποιήστε κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για να κάνετε τα εξής:

(α) Σχεδιάστε τη συνάρτηση $y = f(x)$ κοντά στο σημείο x_0.

(β) Προβλέψτε την τιμή του ορίου L. Κατόπιν, βρείτε επακριβώς το όριο με συμβολικό υπολογισμό, για να δείτε αν η πρόβλεψή σας ήταν σωστή.

(γ) Για $\epsilon = 0{,}2$, σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα τις ευθείες $y_1 = L - \epsilon$ και $y_2 = L + \epsilon$, καθώς και την f για x κοντά στο x_0.

(δ) Από το σχήμα που κάνατε, εκτιμήστε κάποιο $\delta > 0$ ούτως ώστε για κάθε x να ισχύει

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Ελέγξτε την τιμή του δ που επιλέξατε, σχεδιάζοντας τις f, y_1, και y_2 στο διάστημα $0 < |x - x_0| < \delta$. Δώστε στον υπολογιστή σας ως διαστάσεις της περιοχής σχεδίασης τις ακόλουθες

$$x_0 - 2\delta \le x \le x_0 + 2\delta \quad \text{και} \quad L - 2\epsilon \le y \le L + 2\epsilon.$$

Αν οποιαδήποτε τιμή της συναρτήσεως f κείται εκτός του διαστήματος $[L - \epsilon, L + \epsilon]$, σημαίνει ότι το δ που επιλέξατε ήταν υπερβολικά μεγάλο. Ξαναδοκιμάστε επιλέγοντας μικρότερο δ.

(ε) Επαναλάβετε τα (γ) και (δ) διαδοχικά για $\epsilon = 0{,}1$, $0{,}05$, και $0{,}001$.

51. $f(x) = \dfrac{x^4 - 81}{x - 3}, \quad x_0 = 3$

52. $f(x) = \dfrac{5x^3 + 9x^2}{2x^5 + 3x^2}, \quad x_0 = 0$

53. $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{3x}, \quad x_0 = 0$

CD-ROM Δικτυότοπος **54.** $f(x) = \dfrac{x(1 - \cos x)}{x - \sin x}, \quad x_0 = 0$

1.2 Εύρεση ορίων και πλευρικών ορίων

Ιδιότητες ορίων • Αλγεβρική απαλοιφή μηδενιζόμενων παρονομαστών • Το θεώρημα «σάντουιτς» • Πλευρικά όρια • Όρια που περιέχουν όρους $(\sin \theta)/\theta$

CD-ROM
Δικτυότοπος
Ιστορικά στοιχεία
Όρια

Στην προηγούμενη ενότητα, υπολογίζαμε όρια συναρτήσεων εποπτεύοντας τα γραφήματά τους και εξετάζοντας τη συμπεριφορά των τιμών τους. Εδώ, θα δούμε ότι πολλά όρια μπορούν να υπολογιστούν αλγεβρικά, χρησιμοποιώντας απλή αριθμητική και μερικούς στοιχειώδεις κανόνες.

Ιδιότητες ορίων

Το ακόλουθο θεώρημα μας επιτρέπει να υπολογίζουμε όρια αριθμητικών συνδυασμών συναρτήσεων των οποίων τα όρια μας είναι ήδη γνωστά. Η απόδειξη των ιδιοτήτων δίδεται στο Παράρτημα 2.

Θεώρημα 1 Ιδιότητες ορίων

Αν L, M, c, και k είναι πραγματικοί αριθμοί και

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{και} \quad \lim_{x\to c} g(x) = M, \text{ τότε}$$

1. *Όριο αθροίσματος:* $\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = L + M$

Το όριο του αθροίσματος δύο συναρτήσεων ισούται με το άθροισμα των ορίων τους.

2. *Όριο διαφοράς:* $\lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = L - M$

Το όριο της διαφοράς δύο συναρτήσεων ισούται με τη διαφορά των ορίων τους.

3. *Όριο γινομένου:* $\lim_{x\to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

Το όριο του γινομένου δύο συναρτήσεων ισούται με το γινόμενο των ορίων τους.

4. *Όριο σταθερού πολλαπλασίου:* $\lim_{x\to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

Το όριο του γινομένου σταθεράς επί συνάρτηση ισούται με το γινόμενο της σταθεράς επί το όριο της συναρτήσεως.

5. *Όριο πηλίκου:* $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$

Το όριο του πηλίκου δύο συναρτήσεων ισούται με το πηλίκο των ορίων τους, δεδομένου ότι το όριο του παρονομαστή δεν μηδενίζεται.

6. *Όριο δύναμης:* Αν r και s είναι ακέραιοι, και $s \neq 0$, τότε

$$\lim_{x\to c} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

εφόσον ο $L^{r/s}$ είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο ρητής δύναμης συναρτήσεως ισούται με το όριο της συνάρτησης υψωμένο στη δύναμη αυτή, εφόσον το όριο της συνάρτησης είναι πραγματικός αριθμός.

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα χρήσης του Θεωρήματος 1 στην εύρεση ορίων πολυωνυμικών και ρητών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 1 Χρήση των κανόνων ορίων

Κάνοντας χρήση των προφανών σχέσεων $\lim_{x\to c} k = k$ και $\lim_{x\to c} x = c$ καθώς και των ιδιοτήτων των ορίων, να βρείτε τα ακόλουθα όρια.

(α) $\lim_{x \to c} (x^3 + 4x^2 - 3)$ **(β)** $\lim_{x \to c} \dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$ **(γ)** $\lim_{x \to -2} \sqrt{4x^2 - 3}$

Λύση

(α) $\lim_{x \to c} (x^3 + 4x^2 - 3) = \lim_{x \to c} x^3 + \lim_{x \to c} 4x^2 - \lim_{x \to c} 3$ Όρια αθροίσματος και διαφοράς

$= c^3 + 4c^2 - 3$ Όρια γινομένου και πολλαπλασίου

(β) $\lim_{x \to c} \dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} = \dfrac{\lim_{x \to c} (x^4 + x^2 - 1)}{\lim_{x \to c} (x^2 + 5)}$ Όριο πηλίκου

$= \dfrac{\lim_{x \to c} x^4 + \lim_{x \to c} x^2 - \lim_{x \to c} 1}{\lim_{x \to c} x^2 + \lim_{x \to c} 5}$ Όρια αθροίσματος και διαφοράς

$= \dfrac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5}$ Όριο γινομένου

(γ) $\lim_{x \to -2} \sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{\lim_{x \to -2} (4x^2 - 3)}$ Όριο δύναμης $r/s = 2$

$= \sqrt{\lim_{x \to -2} 4x^2 - \lim_{x \to -2} 3}$ Όρια αθροίσματος και διαφοράς

$= \sqrt{4(-2)^2 - 3}$ Όρια γινομένου και πολλαπλασίου

$= \sqrt{16 - 3}$

$= \sqrt{13}$

Όπως φαίνεται από το Παράδειγμα 1, οι σχέσεις του Θεωρήματος 1 μας επιτρέπουν να βρίσκουμε τα όρια πολυωνυμικών συναρτήσεων με απλή αντικατάσταση. Το ίδιο ισχύει για ρητές συναρτήσεις των οποίων οι παρονομαστές δεν μηδενίζονται στο σημείο υπολογισμού.

Θεώρημα 2 **Τα όρια πολυωνύμων προκύπτουν με αντικατάσταση**

Αν $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, τότε

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_0 .$$

Θεώρημα 3 **Τα όρια ρητών συναρτήσεων προκύπτουν με αντικατάσταση αρκεί να μην μηδενίζεται το όριο του παρονομαστή**

Αν $P(x)$ και $Q(x)$ είναι πολυώνυμα, και $Q(c) \neq 0$, τότε

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)} .$$

Παράδειγμα 2 Όριο ρητής συναρτήσεως

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 5} = \frac{0}{6} = 0$$

Το όριο αυτό είναι παρόμοιο με το δεύτερο όριο του Παραδείγματος 1 για $c = -1$, όπου ο υπολογισμός γίνεται τώρα σε ένα μόνο βήμα.

Εντοπισμός κοινών παραγόντων

Μπορεί να δειχτεί ότι αν το $Q(x)$ είναι πολυώνυμο και $Q(c) = 0$, τότε το $Q(x)$ θα έχει ως παράγοντα το $(x - c)$. Συνεπώς, αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής μιας ρητής συνάρτησης του x μηδενίζονται αμφότεροι στο $x = c$, θα έχουν ως κοινό παράγοντα το $(x - c)$.

Αλγεβρική απαλοιφή μηδενιζόμενων παρονομαστών

Το Θεώρημα 3 ισχύει μονάχα αν ο παρονομαστής της ρητής συναρτήσεως δεν μηδενίζεται στο σημείο c. Αν ο παρονομαστής είναι μηδέν, ενδέχεται η απαλοιφή κοινών παραγόντων στον αριθμητή και στον παρονομαστή να οδηγήσει σε κλάσμα μη μηδενιζόμενου παρονομαστή στο c. Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να βρούμε το όριο με αντικατάσταση στο απλοποιημένο κλάσμα.

Παράδειγμα 3 Απαλοιφή κοινού παράγοντα

Υπολογίστε το

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}.$$

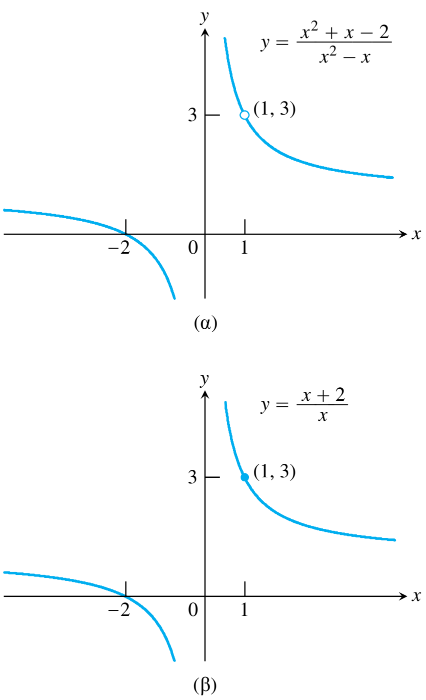
Λύση Δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε $x = 1$ αφού τότε μηδενίζεται ο παρονομαστής. Ελέγχουμε λοιπόν τον αριθμητή για ενδεχόμενο μηδενισμό στο $x = 1$. Όντως ο αριθμητής μηδενίζεται, άρα θα έχει έναν κοινό παράγοντα $(x - 1)$ με τον παρονομαστή. Απαλείφοντας τον παράγοντα $(x - 1)$ από αριθμητή και παρονομαστή, προκύπτει ένα απλούστερο κλάσμα που για $x \neq 1$ παίρνει τις ίδιες τιμές με το αρχικό:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x - 1)(x + 2)}{x(x - 1)} = \frac{x + 2}{x}, \qquad \text{αν } x \neq 1.$$

Από το απλούστερο κλάσμα, με αντικατάσταση, βρίσκουμε το ζητούμενο όριο για $x \to 1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1} \frac{x + 2}{x} = \frac{1 + 2}{1} = 3.$$

Δείτε το Σχήμα 1.15.



ΣΧΗΜΑ 1.15 Η γραφική παράσταση της $f(x) = (x^2 + x - 2)/(x^2 - x)$ στο (α) συμπίπτει με αυτήν της $g(x) = (x + 2)/x$ στο (β), με εξαίρεση το σημείο $x = 1$, όπου η f δεν ορίζεται. Οι δύο συναρτήσεις έχουν κοινό όριο καθώς $x \to 1$.

Παράδειγμα 4 Δημιουργία και απαλοιφή κοινού παράγοντα

Υπολογίστε το

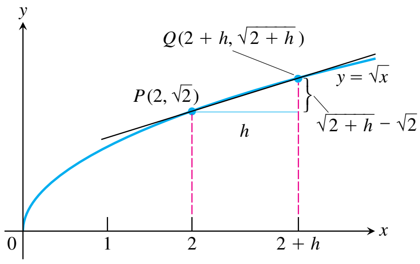
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2 + h} - \sqrt{2}}{h}.$$

Λύση Δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε $h = 0$, ενώ ο αριθμητής και ο παρονομαστής δεν έχουν κοινούς παράγοντες. Μπορούμε, όμως, να δημιουργήσουμε έναν κοινό παράγοντα, πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με τη *συζυγή έκφραση* $\sqrt{2 + h} + \sqrt{2}$, η οποία προκύπτει αλλάζοντας το πρόσημο μεταξύ των δύο ριζών:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2 + h} - \sqrt{2}}{h} &= \frac{\sqrt{2 + h} - \sqrt{2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2 + h} + \sqrt{2}}{\sqrt{2 + h} + \sqrt{2}} \\
&= \frac{2 + h - 2}{h(\sqrt{2 + h} + \sqrt{2})} \\
&= \frac{h}{h(\sqrt{2 + h} + \sqrt{2})} && \text{Κοινός παράγοντας } h \\
&= \frac{1}{\sqrt{2 + h} + \sqrt{2}}. && \text{Απαλοιφή του } h \text{ για } h \neq 0.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2 + h} - \sqrt{2}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2 + h} + \sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2 + 0} + \sqrt{2}} && \text{Παρονομαστής διάφορος του 0 για } h = 0 \text{· αντικατάσταση} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

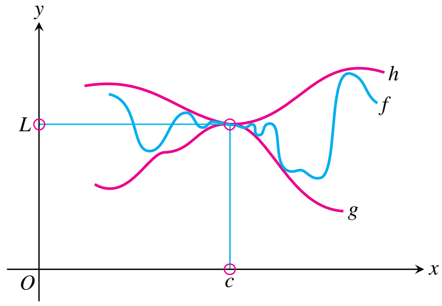


Σχημα 1.16 Το όριο της κλίσεως $(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})/h$ της τέμνουσας PQ, καθώς $Q \to P$ κατά μήκος της καμπύλης, ισούται με $1/(2\sqrt{2})$. (Παράδειγμα 4)

Σημειώστε ότι η ποσότητα $(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})/h$ είναι η κλίση της τέμνουσας που διέρχεται από τα σημεία $P(2, \sqrt{2})$ και $Q(2+h, \sqrt{2+h})$ της καμπύλης $y = \sqrt{x}$. Η τέμνουσα αυτή φαίνεται στο Σχήμα 1.16, για $h > 0$. Ο υπολογισμός μας φανερώνει ότι η κλίση της τέμνουσας παίρνει την οριακή τιμή $1/(2\sqrt{2})$, καθώς το σημείο Q τείνει στο P κινούμενο επί της καμπύλης από οποιαδήποτε κατεύθυνση.

Το θεώρημα «σάντουιτς»

Αν δεν μπορούμε να βρούμε κάποιο όριο άμεσα, υπάρχει και ο έμμεσος υπολογισμός, με χρήση του λεγόμενου θεωρήματος «σάντουιτς». Το θεώρημα ισχύει για μια συνάρτηση f με τιμές που φράζονται άνω και κάτω από τις τιμές δύο άλλων συναρτήσεων, g και h. Αν οι g και h έχουν το ίδιο όριο καθώς $x \to c$, τότε και η f θα έχει το όριο αυτό (Σχήμα 1.17).



Σχημα 1.17 Η γραφική παράσταση της f κείται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των g και h.

Θεώρημα 4 **Θεώρημα «σάντουιτς»**
Έστω ότι $g(x) \le f(x) \le h(x)$ για κάθε x το οποίο ανήκει σε ανοιχτό διάστημα που περιέχει το c, εκτός, ενδεχομένως, για το ίδιο το σημείο $x = c$. Αν επιπλέον ισχύει ότι

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L,$$

τότε $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4 δίδεται στο Παράρτημα 2.

Παράδειγμα 5 Εφαρμογή του θεωρήματος «σάντουιτς»

Δεδομένου ότι

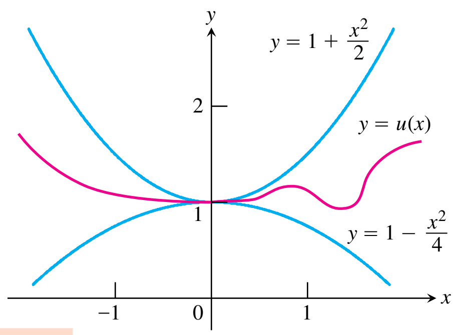
$$1 - \frac{x^2}{4} \le u(x) \le 1 + \frac{x^2}{2} \quad \text{για κάθε } x \neq 0,$$

να βρεθεί το $\lim_{x \to 0} u(x)$.

Λύση Εφόσον

$$\lim_{x \to 0} (1 - (x^2/4)) = 1 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to 0} (1 + (x^2/2)) = 1,$$

το θεώρημα «σάντουιτς» συνεπάγεται ότι $\lim_{x \to 0} u(x) = 1$ (Σχήμα 1.18).



Σχημα 1.18 Κάθε συνάρτηση $u(x)$ με γραφική παράσταση που κείται μεταξύ των $y = 1 + (x^2/2)$ και $y = 1 - (x^2/4)$, έχει όριο 1 καθώς $x \to 0$.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Ευκλείδης
(Περίπου 365 π.Χ.)

Παράδειγμα 6 Μία ακόμη εφαρμογή του θεωρήματος «σάντουιτς»

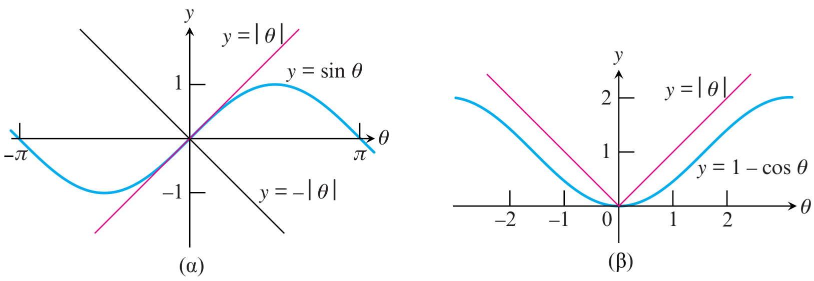
(α) (Σχήμα 1.19α) Εφόσον $-|\theta| \leq \sin\theta \leq |\theta|$ για κάθε θ και $\lim_{\theta\to 0}(-|\theta|) = \lim_{\theta\to 0}|\theta| = 0$, θα ισχύει ότι

$$\lim_{\theta\to 0}\sin\theta = 0.$$

(β) (Σχήμα 1.19β) Εφόσον $0 \leq 1-\cos\theta \leq |\theta|$ για κάθε θ, θα ισχύει ότι $\lim_{\theta\to 0}(1-\cos\theta) = 0$ ή ότι

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1.$$

(γ) Για τυχούσα συνάρτηση $f(x)$, αν $\lim_{x\to c}|f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x\to c} f(x) = 0$. Αυτό συμβαίνει διότι η $f(x)$ είναι άνω και κάτω φραγμένη, $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, ενώ τόσο η $-|f(x)|$ όσο και η $|f(x)|$ έχουν όριο το 0 καθώς $x \to c$.



Σχήμα 1.19 Το θεώρημα «σάντουιτς» επαληθεύει ότι (α) $\lim_{\theta\to 0}\sin\theta = 0$ και (β) $\lim_{\theta\to 0}(1-\cos\theta) = 0$.

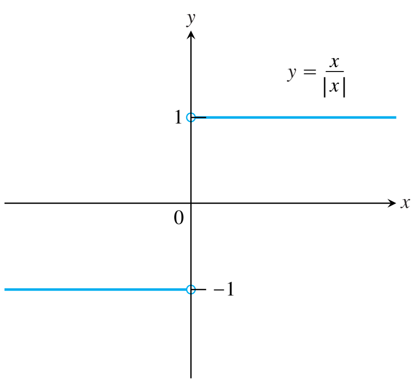
CD-ROM
Δικτυότοπος

Πλευρικά όρια

Για να έχει μια συνάρτηση f όριο το L καθώς $x \to a$, θα πρέπει να ορίζεται *εκατέρωθεν* του a και οι τιμές της $f(x)$ να τείνουν στο L καθώς το x τείνει στο a από οποιαδήποτε πλευρά. Έτσι, τα συνήθη όρια είναι **αμφίπλευρα.**

Αν η f δεν έχει αμφίπλευρο όριο στο a, μπορεί ωστόσο να έχει πλευρικό όριο εκεί, δηλαδή να έχει όριο αν το x τείνει στο a από τη μία πλευρά μονάχα. Αν πρόκειται για τη δεξιά πλευρά, το όριο είναι **δεξιό.** Αν πρόκειται για την αριστερή, μιλάμε για **αριστερό** όριο.

Η συνάρτηση $f(x) = x/|x|$ (Σχήμα 1.20) έχει όριο το 1 καθώς το x τείνει στο 0 από δεξιά, και το -1 καθώς το x τείνει στο 0 από αριστερά.



Σχήμα 1.20 Διαφορετικό δεξιό και αριστερό όριο στην αρχή.

Ορισμοί Δεξιά και αριστερά όρια

Έστω $f(x)$ ορισμένη σε διάστημα (a, b), όπου $a < b$. Αν η $f(x)$ τείνει στο L καθώς το x τείνει στο a, θα λέμε ότι η f έχει **δεξιό όριο** L στο a, και θα γράφουμε

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L.$$

Έστω $f(x)$ ορισμένη σε διάστημα (c, a), όπου $c < a$. Αν η $f(x)$ τείνει στο M καθώς το x τείνει στο a, θα λέμε ότι η f έχει **αριστερό όριο** M στο a, και θα γράφουμε

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = M.$$

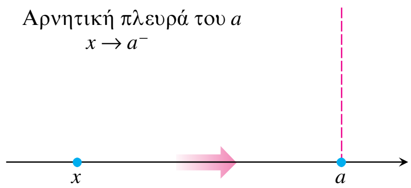
Για τη συνάρτηση $f(x) = x/|x|$ του Σχήματος 1.20, έχουμε

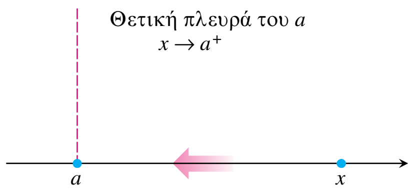
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$$

Τα «+» και «–»
Η σημασία των προσήμων στον συμβολισμό των πλευρικών ορίων είναι η εξής:

$x \to a^-$ σημαίνει ότι το x τείνει στο a από αριστερά (από την αρνητική πλευρά του a), δηλαδή από τιμές μικρότερες του a.

$x \to a^+$ σημαίνει ότι το x τείνει στο a από δεξιά (από τη θετική πλευρά του a), δηλαδή από τιμές μεγαλύτερες του a.





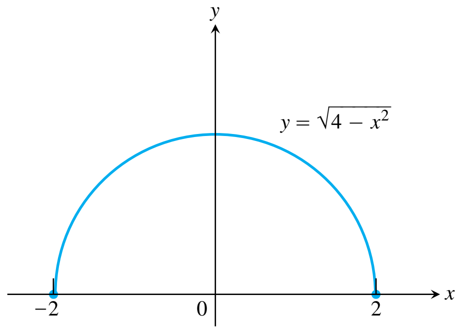
Το σύμβολο ⇔
Το σύμβολο ⇔ διαβάζεται «αν και μόνο αν». Αποτελεί συνδυασμό των συμβόλων ⇒ (συνεπάγεται ότι) και ⇐ (προκύπτει από το ότι).

Παράδειγμα 7 Πλευρικά όρια για συνάρτηση ημικυκλίου

Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ είναι το $[-2, 2]$· η γραφική παράσταση είναι το ημικύκλιο του Σχήματος 1.21. Έχουμε

$$\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0 .$$

Η συνάρτηση δεν έχει αριστερό όριο στο $x = -2$, ούτε δεξιό όριο στο $x = 2$. Δηλαδή δεν έχει συνήθη αμφίπλευρα όρια στα σημεία -2 και 2.



Σχήμα 1.21
$\lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$ και
$\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0$.

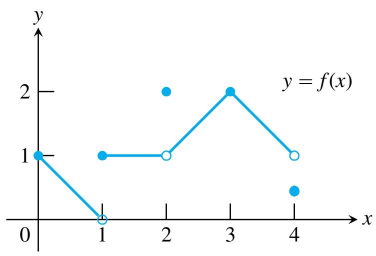
Τα πλευρικά όρια έχουν όλες τις ιδιότητες του Θεωρήματος 1. Το δεξιό όριο του αθροίσματος δύο συναρτήσεων είναι το άθροισμα των δεξιών ορίων τους, κ.ο.κ. Επίσης, τα θεωρήματα περί ορίων πολυωνύμων και ρητών συναρτήσεων ισχύουν για πλευρικά όρια, καθώς και το θεώρημα «σάντουιτς».

Η σχέση που υπάρχει μεταξύ των πλευρικών και των αμφίπλευρων ορίων είναι η εξής:

Θεώρημα 5 Σχέση μεταξύ πλευρικών και αμφίπλευρων ορίων
Μια συνάρτηση $f(x)$ έχει (αμφίπλευρο) όριο καθώς το x τείνει στο c αν και μόνο αν έχει αριστερό και δεξιό όριο στο c και τα πλευρικά αυτά όρια ταυτίζονται:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \lim_{x \to c^-} f(x) = L \quad \text{και} \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = L.$$

Παράδειγμα 8 Όρια της συνάρτησης του Σχήματος 1.22



Σχήμα 1.22 Γραφική παράσταση της συναρτήσεως του Παραδείγματος 8.

Στο $x = 0$: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$,

τα $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ και $\lim_{x \to 0} f(x)$ δεν υπάρχουν. Η συνάρτηση δεν ορίζεται αριστερά του σημείου $x = 0$.

Στο $x = 1$: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$, παρόλο που $f(1) = 1$,
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$,
το $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει. Το δεξιό και το αριστερό όριο είναι άνισα.

Στο $x = 2$: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$,
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$,
$\lim_{x\to 2} f(x) = 1$, παρόλο που $f(2) = 2$.

Στο $x = 3$: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 2$

Στο $x = 4$: $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$, παρόλο που $f(4) \neq 1$,
τα $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ και $\lim_{x\to 4} f(x)$ δεν υπάρχουν. Η συνάρτηση δεν ορίζεται δεξιά του σημείου $x = 4$.

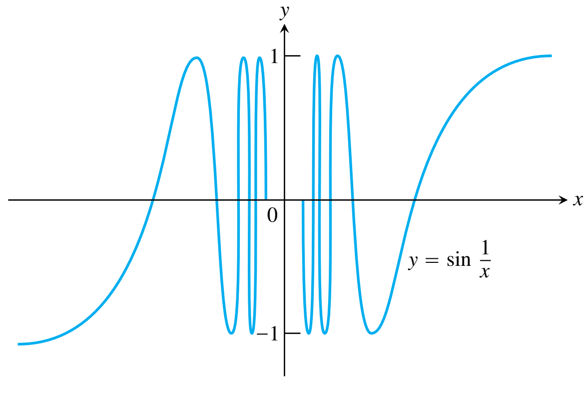
Σε κάθε άλλο σημείο a του διαστήματος $[0, 4]$, η $f(x)$ έχει όριο $f(a)$.

Μέχρι τώρα, οι συναρτήσεις που μελετήσαμε διέθεταν κάποιο είδος ορίου σε καθένα από τα σημεία που εξετάσαμε. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει πάντοτε.

Παράδειγμα 9 Μια συνάρτηση που ταλαντώνεται πάρα πολύ για να έχει όριο

Δείξτε ότι η $y = \sin(1/x)$ δεν έχει όριο καθώς το x τείνει στο μηδέν από οποιαδήποτε πλευρά (Σχήμα 1.23).

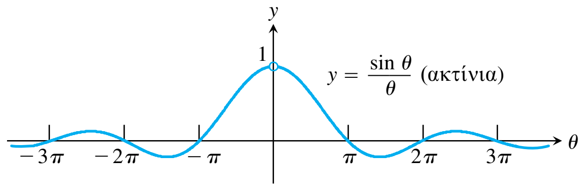
Λύση Καθώς το x τείνει στο μηδέν, ο αντίστροφός του, $1/x$, αυξάνεται απεριόριστα και οι τιμές τού $\sin(1/x)$ ταλαντώνονται ολοένα και πιο γρήγορα μεταξύ των τιμών -1 και 1. Δεν υπάρχει μοναδικός αριθμός L τον οποίο να προσεγγίζουν οι τιμές της συναρτήσεως καθώς το x τείνει στο μηδέν, ακόμα και αν περιορίσουμε το x σε θετικές ή αρνητικές μονάχα τιμές. Έτσι η συνάρτηση δεν έχει ούτε δεξιό ούτε αριστερό όριο στο $x = 0$.



Σχημα 1.23 Η συνάρτηση $y = \sin(1/x)$ δεν έχει ούτε δεξιό ούτε αριστερό όριο καθώς το x τείνει στο μηδέν. (Παράδειγμα 9)

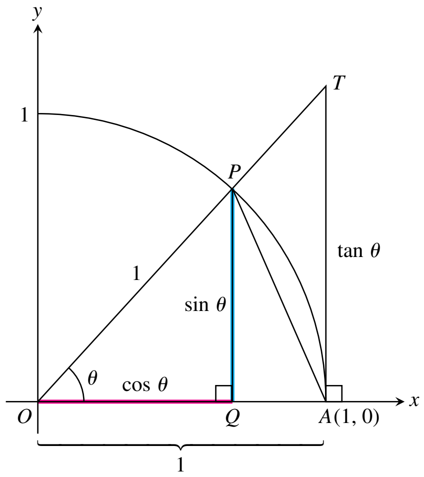
Όρια που περιέχουν όρους $(\sin\theta)/\theta$

Ένα γεγονός θεμελιώδους σημασίας για τη συνάρτηση $(\sin\theta)/\theta$ είναι ότι όταν η γωνία θ μετριέται σε ακτίνια και $\theta \to 0$, η συνάρτηση έχει όριο 1. Το γεγονός αυτό φαίνεται στο Σχήμα 1.24, αλλά το επαληθεύουμε και αλγεβρικά με το θεώρημα «σάντουιτς».



ΕΚΤΟΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

Σχημα 1.24 Γραφική παράσταση της $f(\theta) = (\sin\theta)/\theta$.



Σχημα 1.25 Το σχήμα χρησιμεύει στην απόδειξη του Θεωρήματος 6. $TA/OA = \tan\theta$, αλλά $OA = 1$, συνεπώς $TA = \tan\theta$.

Το ακτινιακό μέτρο υπεισέρχεται στην Εξίσωση (2): Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα OAP ισούται με $\theta/2$ μόνο αν η γωνία θ μετριέται σε ακτίνια.

Θεώρημα 6

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \qquad (\theta \text{ σε ακτίνια}) \tag{1}$$

Απόδειξη Ο στόχος είναι να δείξουμε ότι τα όρια από δεξιά και από αριστερά ισούνται με 1. Τότε και το αμφίπλευρο όριο θα ισούται με 1.

Για το δεξιό όριο, θεωρούμε θετικές γωνίες θ μικρότερες του $\pi/2$ (Σχήμα 1.25). Σημειώστε ότι

$$\text{Εμβαδόν } \Delta OAP < \text{εμβαδόν κυκλικού τομέα } OAP < \text{εμβαδόν } \Delta OAT.$$

Εκφράζουμε τα εμβαδά αυτά συναρτήσει του θ ως ακολούθως:

$$\text{Εμβαδόν } \Delta OAP = \frac{1}{2}\text{ βάση} \times \text{ύψος} = \frac{1}{2}(1)(\sin\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\text{Εμβαδόν κυκλικού τομέα } OAP = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(1)^2\theta = \frac{\theta}{2} \tag{2}$$

$$\text{Εμβαδόν } \Delta OAT = \frac{1}{2}\text{ βάση} \times \text{ύψος} = \frac{1}{2}(1)(\tan\theta) = \frac{1}{2}\tan\theta.$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta.$$

Η ανισότητα αυτή διατηρεί τη φορά της αν διαιρέσουμε κάθε μέλος με τον θετικό αριθμό $(1/2)\sin\theta$:

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}.$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο κάθε μέλους, η ανισότητα αλλάζει φορά:

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta.$$

Εφόσον $\lim_{\theta\to 0^+} \cos\theta = 1$, το θεώρημα «σάντουιτς» δίνει

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

Θυμηθείτε ότι οι $\sin\theta$ και θ είναι *περιττές συναρτήσεις* (Παράγραφος 0.3). Συνεπώς, η $f(\theta) = (\sin\theta)/\theta$ θα είναι *άρτια συνάρτηση,* με γραφική παράσταση συμμετρική ως προς τον άξονα y (Σχήμα 1.24). Η συμμετρία αυτή συνεπάγεται ότι υπάρχει το αριστερό όριο στο 0, και ισούται με το εκεί δεξιό όριο:

$$\lim_{\theta\to 0^-} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta},$$

άρα $\lim_{\theta\to 0} (\sin\theta)/\theta = 1$, βάσει του Θεωρήματος 4.

CD-ROM Δικτυότοπος

Παράδειγμα 10 Χρήση του ότι $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

Δείξτε ότι (α) $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ και (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$.

Λύση

(α) Χρησιμοποιώντας τον γνωστό μας τύπο των ημίσεων γωνιών $\cos h = 1 - 2\sin^2(h/2)$, έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} -\frac{2\sin^2(h/2)}{h}\\ &= -\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}\sin\theta \qquad \text{Έστω } \theta = h/2.\\ &= -(1)(0) = 0\,.\end{aligned}$$

(β) Η Εξίσωση (1) δεν μπορεί να εφαρμοστεί στο κλάσμα ως αυτό έχει. Τον όρο $2x$ που χρειαζόμαστε στον παρονομαστή (αντί του $5x$ που υπάρχει) τον κατασκευάζουμε, πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με $2/5$:

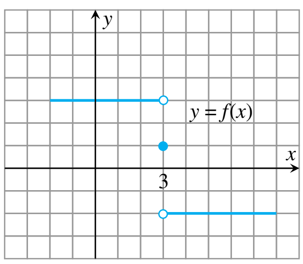
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(2/5)\cdot\sin 2x}{(2/5)\cdot 5x}\\ &= \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} \qquad \text{Εδώ εφαρμόζουμε την Εξ. (1) για } \theta = 2x.\\ &= \frac{2}{5}(1) = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.2

Γραφική εκτίμηση ορίων

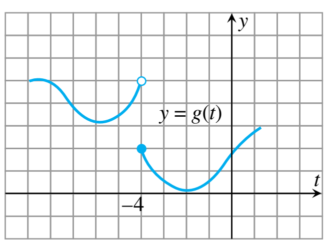
Στις Ασκήσεις 1-6, χρησιμοποιήστε τις γραφικές παραστάσεις για να εκτιμήσετε τα όρια και την τιμή της συνάρτησης που ζητούνται, ή εξηγήστε γιατί τα όρια δεν υπάρχουν.

1.



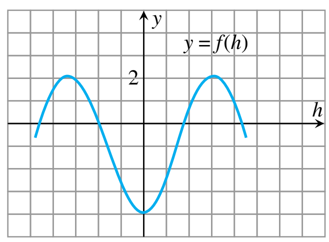
(α) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ **(β)** $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ **(γ)** $\lim_{x\to 3} f(x)$ **(δ)** $f(3)$

2.



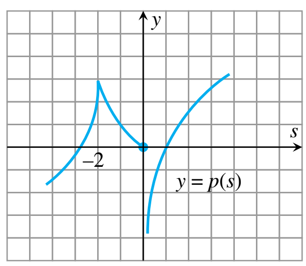
(α) $\lim_{t\to -4^-} g(t)$ **(β)** $\lim_{t\to -4^+} g(t)$ **(γ)** $\lim_{t\to -4} g(t)$ **(δ)** $g(-4)$

3.



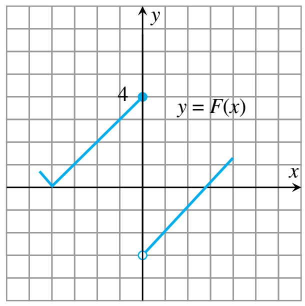
(α) $\lim_{h\to 0^-} f(h)$ **(β)** $\lim_{h\to 0^+} f(h)$ **(γ)** $\lim_{h\to 0} f(h)$ **(δ)** $f(0)$

4.



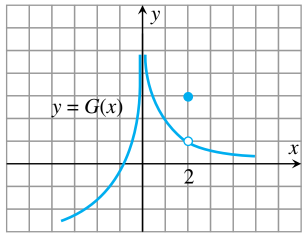
(α) $\lim_{s\to -2^-} p(s)$ **(β)** $\lim_{s\to -2^+} p(s)$ **(γ)** $\lim_{s\to -2} p(s)$ **(δ)** $p(-2)$

5.



(α) $\lim_{x\to 0^-} F(x)$ **(β)** $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ **(γ)** $\lim_{x\to 0} F(x)$ **(δ)** $F(0)$

6.



(α) $\lim_{x\to 2^-} G(x)$ **(β)** $\lim_{x\to 2^+} G(x)$ **(γ)** $\lim_{x\to 2} G(x)$ **(δ)** $G(2)$

Χρήση κανόνων ορίων

7. Έστω $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ και $\lim_{x\to 0} g(x) = -5$. Αναφέρετε ποιους κανόνες του Θεωρήματος 1 έχουμε εφαρμόσει στα βήματα (α), (β), και (γ) του ακόλουθου υπολογισμού.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2f(x) - g(x)}{(f(x)+7)^{2/3}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0} (2f(x) - g(x))}{\lim_{x\to 0} (f(x)+7)^{2/3}} \qquad (\alpha)$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0} 2f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{\left(\lim_{x\to 0} (f(x)+7)\right)^{2/3}} \qquad (\beta)$$

$$= \frac{2\lim_{x\to 0} f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{\left(\lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 0} 7\right)^{2/3}} \qquad (\gamma)$$

$$= \frac{(2)(1) - (-5)}{(1+7)^{2/3}} = \frac{7}{4}$$

8. Έστω $\lim_{x\to 1} h(x) = 5$, $\lim_{x\to 1} p(x) = 1$, και $\lim_{x\to 1} r(x) = -2$. Αναφέρετε ποιους κανόνες του Θεωρήματος 1 έχουμε εφαρμόσει στα βήματα (α), (β), και (γ) του ακόλουθου υπολογισμού.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4 - r(x))}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 1} \sqrt{5h(x)}}{\lim_{x\to 1} (p(x)(4 - r(x)))} \qquad (\alpha)$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 1} 5h(x)}}{\left(\lim_{x\to 1} p(x)\right)\left(\lim_{x\to 1} (4 - r(x))\right)} \qquad (\beta)$$

$$= \frac{\sqrt{5 \lim_{x\to 1} h(x)}}{\left(\lim_{x\to 1} p(x)\right)\left(\lim_{x\to 1} 4 - \lim_{x\to 1} r(x)\right)} \qquad (\gamma)$$

$$= \frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4-2)} = \frac{5}{2}$$

9. Έστω $\lim_{x\to c} f(x) = 5$ και $\lim_{x\to c} g(x) = -2$. Να βρεθούν τα όρια:

(α) $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$ **(β)** $\lim_{x\to c} 2f(x)g(x)$

(γ) $\lim_{x\to c} (f(x) + 3g(x))$ **(δ)** $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{f(x) - g(x)}$

10. Έστω $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to 4} g(x) = -3$. Να βρεθούν τα όρια:

(α) $\lim_{x\to 4} (g(x) + 3)$ **(β)** $\lim_{x\to 4} xf(x)$

(γ) $\lim_{x\to 4} (g(x))^2$ **(δ)** $\lim_{x\to 4} \dfrac{g(x)}{f(x) - 1}$

Υπολογισμοί ορίων

Στις Ασκήσεις 11-14, να βρεθούν τα όρια:

11. (α) $\lim_{x\to -7} (2x + 5)$ **(β)** $\lim_{t\to 6} 8(t-5)(t-7)$

(γ) $\lim_{y\to 2} \dfrac{y+2}{y^2 + 5y + 6}$ **(δ)** $\lim_{h\to 0} \dfrac{3}{\sqrt{3h+1} + 1}$

12. (α) $\lim_{r\to -2} (r^3 - 2r^2 + 4r + 8)$ **(β)** $\lim_{x\to 2} \dfrac{x+3}{x+6}$

(γ) $\lim_{y\to -3} (5 - y)^{4/3}$ **(δ)** $\lim_{\theta\to 5} \dfrac{\theta - 5}{\theta^2 - 25}$

13. (α) $\lim_{t\to -5} \dfrac{t^2 + 3t - 10}{t+5}$ **(β)** $\lim_{x\to -2} \dfrac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2}$

(γ) $\lim_{y\to 1} \dfrac{y-1}{\sqrt{y+3} - 2}$

14. (α) $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+8} - 3}{x+1}$ **(β)** $\lim_{\theta\to 1} \dfrac{\theta^4 - 1}{\theta^3 - 1}$

(γ) $\lim_{t\to 9} \dfrac{3 - \sqrt{t}}{9 - t}$

Χρήση του θεωρήματος «σάντουιτς»

15. *Μάθετε γράφοντας* **(α)** Μπορεί να δειχτεί ότι οι ανισότητες

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \sin x}{2 - 2\cos x} < 1$$

ισχύουν για κάθε x κοντά στο μηδέν. Τι συμπεραίνετε για την τιμή του ορίου

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{2 - 2\cos x};$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

T **(β)** Στο ίδιο σχήμα, σχεδιάστε τις $y = 1 - (x^2/6)$, $y = (x \sin x)/(2 - 2\cos x)$, και $y = 1$, για $-2 \le x \le 2$. Σχολιάστε τη συμπεριφορά των γραφημάτων, καθώς $x \to 0$.

16. *Μάθετε γράφοντας* **(α)** Οι ανισότητες

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$$

ισχύουν για x κοντά στο μηδέν. Τι συμπεραίνετε για την τιμή του ορίου

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\ ;$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

T **(β)** Στο ίδιο σχήμα, σχεδιάστε τις $y = (1/2) - (x^2/24)$, $y = (1 - \cos x)/x^2$, και $y = 1/2$, για $-2 \le x \le 2$. Σχολιάστε τη συμπεριφορά των γραφημάτων, καθώς $x \to 0$.

Όρια μέσων ρυθμών μεταβολής

Στον απειροστικό λογισμό, όρια του τύπου

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

προκύπτουν συχνά κατά τη μελέτη των τεμνουσών και των εφαπτόμενων ευθειών, καθώς και των στιγμιαίων μεταβολών. Στις Ασκήσεις 17-20, να υπολογίσετε το παραπάνω όριο για τα x_0 και τις συναρτήσεις f που δίδονται.

17. $f(x) = x^2, \quad x_0 = 1$

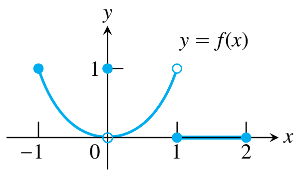
18. $f(x) = 3x - 4, \quad x_0 = 2$

19. $f(x) = 1/x, \quad x_0 = -2$

20. $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 7$

Γραφική εύρεση ορίων

21. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις, σχετικά με τη συνάρτηση $y = f(x)$ που έχει σχεδιαστεί παρακάτω, είναι αληθείς και ποιες όχι; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



(α) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$. **(β)** $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

(γ) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$. **(δ)** $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

(ε) Το $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει. **(στ)** $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

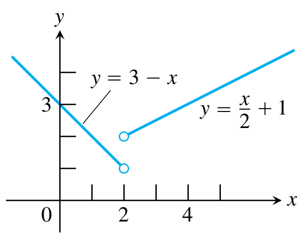
(ζ) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. **(η)** $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

(θ) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$. **(ι)** $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$.

(ια) Το $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ δεν υπάρχει. **(ιβ)** $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$.

22. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ \dfrac{x}{2} + 1, & x > 2. \end{cases}$$



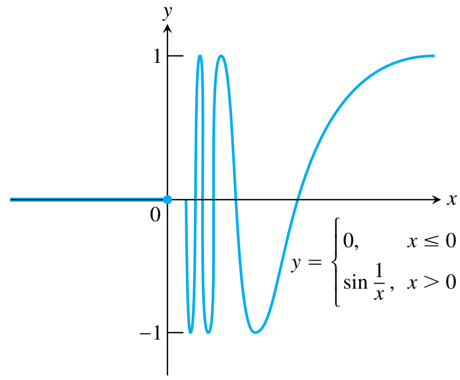
(α) Βρείτε τα $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ και $\lim_{x\to 2^-} f(x)$.

(β) Υπάρχει το $\lim_{x\to 2} f(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

(γ) Βρείτε τα $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ και $\lim_{x\to 4^+} f(x)$.

(δ) Υπάρχει το $\lim_{x\to 4} f(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

23. Έστω $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sin\dfrac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$

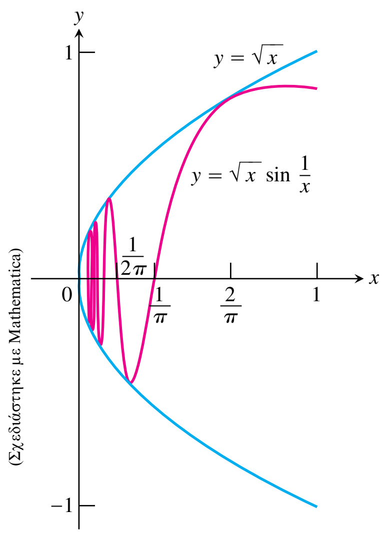


(α) Υπάρχει το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

(β) Υπάρχει το $\lim_{x\to 0^-} f(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

(γ) Υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

24. Έστω $g(x) = \sqrt{x}\,\sin(1/x)$.



(α) Υπάρχει το $\lim_{x\to 0^+} g(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

(β) Υπάρχει το $\lim_{x\to 0^-} g(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

(γ) Υπάρχει το $\lim_{x\to 0} g(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

Αφού σχεδιάσετε τις συναρτήσεις στις Ασκήσεις 25 και 26, απαντήστε στα εξής ερωτήματα.

(α) Ποια τα πεδία ορισμού και τιμών της f;

(β) Σε ποια σημεία c, αν υπάρχουν τέτοια, υπάρχει το $\lim_{x\to c} f(x)$;

(γ) Σε ποιο σημείο υπάρχει μόνο το αριστερό όριο;

(δ) Σε ποιο σημείο υπάρχει μόνο το δεξιό όριο;

25. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{για } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{για } 1 \le x < 2 \\ 2 & \text{για } x = 2 \end{cases}$

26. $f(x) = \begin{cases} x & \text{για } -1 \le x < 0 \text{ ή } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{για } x = 0 \\ 0 & \text{για } 0\ x < -1 \text{ ή } x > 1 \end{cases}$

Αλγεβρική εύρεση πλευρικών ορίων

Στις Ασκήσεις 27-32, να βρεθούν τα όρια:

27. $\lim_{x\to -0.5^-} \sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}$

28. $\lim_{x\to -2^+} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)\left(\dfrac{2x+5}{x^2+x}\right)$

29. $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$

30. $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{5h^2+11h+6}}{h}$

31. **(α)** $\lim_{x\to -2^+} (x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$ **(β)** $\lim_{x\to -2^-} (x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$

32. **(α)** $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{|x-1|}$ **(β)** $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{|x-1|}$

Θεωρία και παραδείγματα

CD-ROM Δικτυότοπος

33. *Μάθετε γράφοντας* Αν $x^4 \le f(x) \le x^2$ για κάθε x στο διάστημα $[-1, 1]$, και $x^2 \le f(x) \le x^4$ για $x < -1$ ή $x > 1$, τότε σε ποια σημεία c σας είναι αμέσως γνωστό το $\lim_{x\to c} f(x)$ και ποια η τιμή του;

34. *Μάθετε γράφοντας* Έστω $g(x) \le f(x) \le h(x)$ για κάθε $x \ne 2$, και ότι

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} h(x) = -5.$$

Μπορείτε να συμπεράνετε κάτι για τις τιμές των f, g, και h στο σημείο $x = 2$; Θα μπορούσε να είναι $f(2) = 0$; Θα μπορούσε να είναι $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

35. *Υπολογίστε το όριο* Δεδομένου ότι $\lim_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$, βρείτε τα

(α) $\lim_{x\to -2} f(x)$ **(β)** $\lim_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x}$

36. *Υπολογίστε το όριο*

(α) Δεδομένου ότι $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 3$, βρείτε το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

(β) Δεδομένου ότι $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 4$, βρείτε το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

37. *Μάθετε γράφοντας* Αν τα $\lim_{x\to a^+} f(x)$ και $\lim_{x\to a^-} f(x)$ σας είναι γνωστά σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f, τότε ξέρετε και την τιμή του $\lim_{x\to a} f(x)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

38. *Μάθετε γράφοντας* Αν γνωρίζετε ότι το $\lim_{x\to c} f(x)$ υπάρχει, μπορείτε να μάθετε την τιμή του υπολογίζοντας το $\lim_{x\to c^+} f(x)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

39. *Εύρεση του δέλτα* Για δεδομένο $\epsilon > 0$, βρείτε ένα διάστημα $I = (5, 5+\delta)$, $\delta > 0$, τέτοιο ώστε αν το x ανήκει στο I, να ισχύει $\sqrt{x-5} < \epsilon$. Ποιο όριο συνάρτησης βρίσκεται έτσι, και ποια η τιμή του;

40. *Εύρεση του δέλτα* Για δεδομένο $\epsilon > 0$, βρείτε ένα διάστημα $I = (4-\delta, 4)$, $\delta > 0$, τέτοιο ώστε αν το x ανήκει στο I, να ισχύει $\sqrt{4-x} < \epsilon$. Ποιο όριο συνάρτησης βρίσκεται έτσι, και ποια η τιμή του;

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $y = f(x)$, με πεδίο ορισμού D το οποίο είναι συμμετρικό ως προς την αρχή, θα είναι **άρτια** αν $f(-x) = f(x)$ για κάθε x στο D και **περιττή** αν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x στο D.

41. *Μάθετε γράφοντας* Έστω f περιττή συνάρτηση του x. Αν ξέρετε ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$, τι μπορείτε να συμπεράνετε για το $\lim_{x\to 0^-} f(x)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

42. *Μάθετε γράφοντας* Έστω f άρτια συνάρτηση του x. Αν ξέρετε ότι $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 7$, τι μπορείτε να συμπεράνετε για τα $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ και $\lim_{x\to -2^+} f(x)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

43. **(α)** Σχεδιάστε την $g(x) = x \sin(1/x)$ και από το γράφημα εκτιμήστε το $\lim_{x\to 0} g(x)$, μεγεθύνοντας γύρω από την αρχή, αν χρειαστεί.

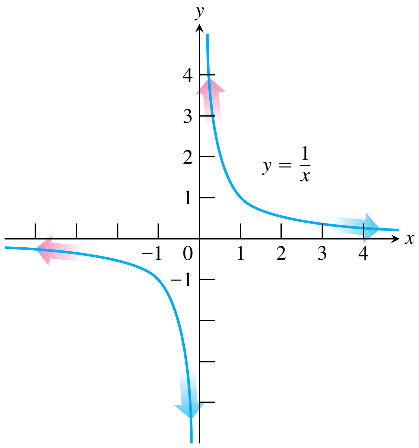
(β) *Μάθετε γράφοντας* Τώρα σχεδιάστε την $k(x)=\sin(1/x)$. Συγκρίνετε τη συμπεριφορά των g και k κοντά στην αρχή. Ποιες ομοιότητες και ποιες διαφορές παρατηρείτε;

44. **(α)** Σχεδιάστε την $h(x) = x^2 \cos(1/x)$ και από το γράφημα εκτιμήστε το $\lim_{x\to 0} h(x)$, μεγεθύνοντας γύρω από την αρχή, αν χρειαστεί.

(β) *Μάθετε γράφοντας* Τώρα σχεδιάστε την $k(x)=\cos(1/x)$. Συγκρίνετε τη συμπεριφορά των h και k κοντά στην αρχή. Ποιες ομοιότητες και ποιες διαφορές παρατηρείτε;

1.3 Άπειρα όρια

Πεπερασμένα όρια καθώς $x \to \pm\infty$ • Όρια ρητών συναρτήσεων καθώς $x \to \pm\infty$ • Οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες: άπειρα όρια • Το θεώρημα «σάντουιτς» • Ακριβείς ορισμοί άπειρων ορίων • Μοντέλα με δεδομένη συμπεριφορά στα άκρα και πλάγιες ασύμπτωτες



Σχημα 1.26 Η γραφική παράσταση της $y = 1/x$.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε γραφικές παραστάσεις ρητών συναρτήσεων (πηλίκα πολυωνύμων), καθώς και άλλων συναρτήσεων, που παρουσιάζουν ενδιαφέρουσα οριακή συμπεριφορά καθώς $x \to \pm\infty$. Μεταξύ των εργαλείων που θα χρησιμοποιήσουμε είναι οι οριζόντιες και οι κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Πεπερασμένα όρια καθώς $x \to \pm\infty$

Το σύμβολο του απείρου (∞) δεν αντιπροσωπεύει κάποιον υπαρκτό αριθμό. Το χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης όταν οι τιμές είτε του πεδίου ορισμού είτε του πεδίου τιμών της υπερβαίνουν κάθε πεπερασμένο όριο. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 1/x$ ορίζεται για κάθε $x \neq 0$ (Σχήμα 1.26). Όταν το x είναι θετικό και αυξάνεται απεριόριστα, το $1/x$ ελαττώνεται απεριόριστα. Όταν το x είναι αρνητικό και αυξάνεται (κατά μέτρο) απεριόριστα, το $1/x$ ελαττώνεται και πάλι. Συνοψίζουμε τις παρατηρήσεις αυτές λέγοντας ότι η $f(x) = 1/x$ έχει όριο 0 καθώς $x \to \pm\infty$.

CD-ROM
Δικτυότοπος

Ορισμοί **Όρια καθώς $x \to \pm\infty$**

1. Λέμε ότι η $f(x)$ έχει **όριο L καθώς το x τείνει στο άπειρο,** και γράφουμε

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

αν η $f(x)$ πλησιάζει αυθαίρετα κοντά στο L καθώς το x απομακρύνεται ολοένα από την αρχή, κινούμενο επί του θετικού ημιάξονα.

2. Λέμε ότι η $f(x)$ έχει **όριο L καθώς το x τείνει στο μείον άπειρο,** και γράφουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

αν η $f(x)$ πλησιάζει αυθαίρετα κοντά στο L καθώς το x απομακρύνεται ολοένα από την αρχή, κινούμενο επί του αρνητικού ημιάξονα.

Η μέθοδος υπολογισμού ορίων συναρτήσεων καθώς $x \to \pm\infty$ μοιάζει με αυτήν που ακολουθήσαμε για πεπερασμένα όρια στην Ενότητα 1.2. Εκεί είχαμε πρώτα υπολογίσει τα όρια της σταθερής και της ταυτοτικής συναρτήσεως $y = k$ και $y = x$ αντίστοιχα. Στη συνέχεια επεκτείναμε τα αποτελέσματα αυτά σε άλλες συναρτήσεις, εφαρμόζοντας ένα θεώρημα υπολογισμού ορίων αλγεβρικών συνδυασμών. Θα κάνουμε κι εδώ το ίδιο, με τη διαφορά ότι εδώ οι αρχικές συναρτήσεις είναι οι $y = k$ και $y = 1/x$, αντί των $y = k$ και $y = x$.

Τα δυο πρωταρχικά λοιπόν αποτελέσματα προς επαλήθευση, καθώς $x \to \pm\infty$, δίδονται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Το σύμβολο του απείρου (∞)

Όπως έχουμε πει και αλλού, το σύμβολο ∞ δεν παριστάνει κάποιον υπαρκτό αριθμό και συνεπώς δεν μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε στις συνήθεις αριθμητικές πράξεις. Σημειώστε επίσης ότι γράφοντας ∞ εννοούμε $+\infty$. Τα δύο αυτά σύμβολα χρησιμοποιούνται συχνά το ένα αντί του άλλου.

Παράδειγμα 1 Όρια των $1/x$ και k καθώς $x \to \pm\infty$

Δείξτε ότι

(α) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

(β) $\lim_{x\to\infty} k = \lim_{x\to-\infty} k = k.$

Λύση

(α) Από το Σχήμα 1.26, είναι φανερό ότι η $y = 1/x$ πλησιάζει όλο και περισσότερο στο μηδέν καθώς το x απομακρύνεται ολοένα από την αρχή κινούμενο είτε προς τη θετική είτε προς την αρνητική κατεύθυνση.

(β) Ασχέτως του πόσο απέχει το x από την αρχή, η σταθερή συνάρτηση $y = k$ λαμβάνει πάντα την ίδια τιμή k.

Τα όρια στο (συν ή πλην) άπειρο έχουν παρόμοιες ιδιότητες με τα όρια όπου το x τείνει σε πεπερασμένο αριθμό.

Θεώρημα 7 Κανόνες ορίων καθώς $x \to \pm\infty$

Αν L, M, και k, είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει ότι

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M, \quad \text{τότε}$$

1. *Όριο αθροίσματος:* $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) + g(x)) = L + M$
2. *Όριο διαφοράς:* $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - g(x)) = L - M$
3. *Όριο γινομένου:* $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
4. *Όριο σταθερού πολλαπλασίου:* $\lim_{x\to\pm\infty} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$
5. *Όριο πηλίκου:* $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$
6. *Όριο δύναμης:* Αν r και s είναι ακέραιοι, και $s \neq 0$, τότε

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

δεδομένου ότι ο $L^{r/s}$ είναι πραγματικός αριθμός.

Οι παραπάνω ιδιότητες είναι αντίστοιχες αυτών του Θεωρήματος 1, Ενότητα 1.2, και τις εφαρμόζουμε κατά τον ίδιο τρόπο.

Παράδειγμα 2 Κάνοντας χρήση του θεωρήματος 7

(α) $\lim_{x\to\infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ Όριο αθροίσματος

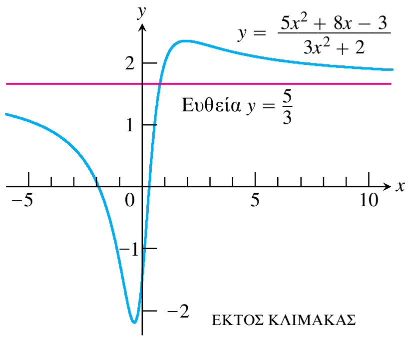
$= 5 + 0 = 5$ Γνωστά όρια

(β) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$

$= \lim_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$ Όριο γινομένου

$= \pi\sqrt{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0$ Γνωστά όρια

Ο **βαθμός** του πολυωνύμου $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, ισούται με n, δηλαδή με τον μεγαλύτερο εκθέτη.



ΣΧΗΜΑ 1.27 Η συνάρτηση του Παραδείγματος 3.

Όρια ρητών συναρτήσεων καθώς $x \to \pm\infty$

Για να προσδιορίσουμε το όριο μιας ρητής συναρτήσεως καθώς $x \to \pm\infty$, μπορούμε να διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με την υψηλότερη δύναμη του x στον παρονομαστή. Το τι θα συμβεί τότε εξαρτάται από τους βαθμούς των δύο πολυωνύμων.

Παράδειγμα 3 Αριθμητής και παρονομαστής ίδιου βαθμού

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 + (8/x) - (3/x^2)}{3 + (2/x^2)}$$

Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το x^2.

$$= \frac{5 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{5}{3}$$

Δείτε το Σχ. 1.27.

Παράδειγμα 4 Βαθμός αριθμητή μικρότερος του βαθμού παρονομαστή

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{11x + 2}{2x^3 - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(11/x^2) + (2/x^3)}{2 - (1/x^3)}$$

Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το x^3.

$$= \frac{0 + 0}{2 - 0} = 0$$

Δείτε το Σχ. 1.28.

Παράδειγμα 5 Βαθμός αριθμητή μεγαλύτερος του βαθμού παρονομαστή

(α) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - 3}{7x + 4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x - (3/x)}{7 + (4/x)}$$

Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το x.

$$= -\infty$$

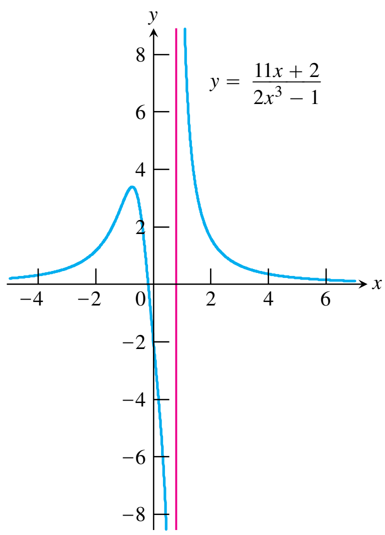
Ο αριθμητής τώρα τείνει στο $-\infty$ ενώ ο παρονομαστής τείνει στο 7, άρα ο λόγος τους $\to -\infty$. Δείτε το Σχ. 1.29.

(β) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^3 + 7x}{2x^2 - 3x - 10} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x + (7/x)}{2 - (3/x) - (10/x^2)}$$

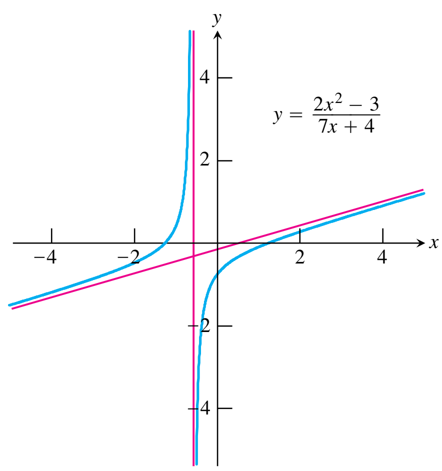
Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το x^2.

$$= \infty$$

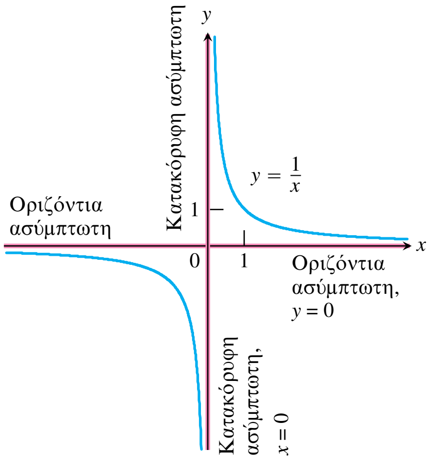
Ο αριθμητής $\to \infty$, ο παρονομαστής $\to 2$· ο λόγος τους $\to \infty$.



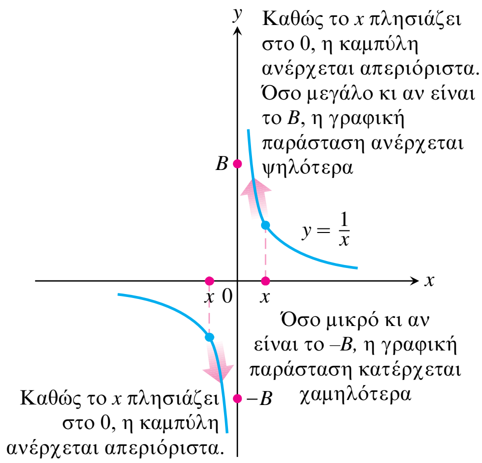
ΣΧΗΜΑ 1.28 Γραφική παράσταση της συναρτήσεως του Παραδείγματος 4. Η καμπύλη τείνει στον άξονα x καθώς το $|x|$ αυξάνεται.



ΣΧΗΜΑ 1.29 Η συνάρτηση του Παραδείγματος 5(α).



ΣΧΗΜΑ 1.30 Οι άξονες συντεταγμένων αποτελούν τις ασύμπτωτες των κλάδων της υπερβολής $y = 1/x$.



ΣΧΗΜΑ 1.31 Τα πλευρικά όρια απειρίζονται:

$$\lim_{x\to 0^+} {}^1\!/_x = \infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^-} {}^1\!/_x = -\infty.$$

Οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες: άπειρα όρια

Από το γράφημα της $f(x) = 1/x$ (Σχήμα 1.30), παρατηρούμε τα εξής:

(α) Καθώς $x \to \infty$, $(1/x) \to 0$, δηλαδή $\lim_{x\to\infty} (1/x) = 0$.

(β) Καθώς $x \to -\infty$, $(1/x) \to 0$, δηλαδή $\lim_{x\to-\infty} (1/x) = 0$.

Λέμε τότε ότι η ευθεία $y = 0$ είναι *οριζόντια ασύμπτωτη* της γραφικής παράστασης της f.

Αν η απόσταση μεταξύ του γραφήματος μιας συναρτήσεως και μιας σταθερής ευθείας τείνει στο μηδέν καθώς απομακρυνόμαστε ολοένα από την αρχή, λέμε ότι η γραφική παράσταση τείνει (προσεγγίζει, πλησιάζει) ασυμπτωτικά στην ευθεία, και ότι η τελευταία είναι μια *ασύμπτωτη* της γραφικής παραστάσεως.

Ας δούμε προσεκτικά τη συμπεριφορά της συναρτήσεως $f(x) = 1/x$ που έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.31. Καθώς $x \to 0^+$, οι τιμές της f αυξάνονται απεριόριστα, και τελικά υπερβαίνουν κάθε θετικό πραγματικό αριθμό. Με άλλα λόγια, δοθέντος ενός θετικού πραγματικού αριθμού B, οσοδήποτε μεγάλου, οι τιμές της f γίνονται τελικά μεγαλύτερες του B (Σχήμα 1.31). Συνεπώς, αυστηρά μιλώντας, η f δεν έχει όριο καθώς $x \to 0^+$. Ωστόσο ένας πρακτικός τρόπος περιγραφής τέτοιου είδους συμπεριφοράς της f είναι να πούμε ότι η $f(x)$ τείνει στο ∞ καθώς $x \to 0^+$. Γράφουμε λοιπόν

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$$

Καθώς $x \to 0^-$, οι τιμές της $f(x) = 1/x$ γίνονται αυθαίρετα μεγάλες (κατά μέτρο) και αρνητικές. Δοθέντος ενός οποιουδήποτε αρνητικού πραγματικού αριθμού $-B$, οι τιμές της f θα κείνται τελικά κάτω του $-B$. (Δείτε το Σχήμα 1.31.) Γράφουμε λοιπόν

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Προσέξτε ότι ο παρονομαστής μηδενίζεται για $x = 0$, άρα η συνάρτηση δεν ορίζεται στο σημείο αυτό.

Ορισμοί **Οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες**

Μια ευθεία $y = b$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της συναρτήσεως $y = f(x)$ αν

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \qquad \text{ή} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

Μια ευθεία $x = a$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης, αν

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

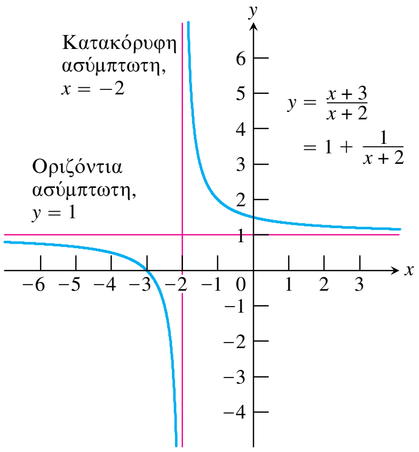
Παράδειγμα 6 Αναζήτηση ασυμπτώτων

Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της καμπύλης

$$y = \frac{x+3}{x+2}.$$

Λύση Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της καμπύλης καθώς $x \to \pm\infty$ και καθώς $x \to -2$, δηλαδή στις περιπτώσεις όπου μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Οι ασύμπτωτες προκύπτουν αμέσως, αν γράψουμε τη ρητή συνάρτηση ως πολυώνυμο συν κάποιο υπόλοιπο, δηλαδή εκτελώντας τη διαίρεση που δηλώνεται από το κλάσμα:



Σχημα 1.32 Οι ευθείες $y = 1$ και $x = -2$ είναι ασύμπτωτες της καμπύλης $y = (x + 3)/(x + 2)$. (Παράδειγμα 6)

$$\begin{array}{r|l} x + 3 & x + 2 \\ \cline{2-2} x + 2 & 1 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Έτσι γράφουμε:

$$y = 1 + \frac{1}{x+2}.$$

Από εδώ μπορούμε να δούμε ότι η καμπύλη μας δεν είναι άλλη από την $y = 1/x$, μετατοπισμένη 1 μονάδα πάνω και 2 μονάδες αριστερά (Σχήμα 1.32). Έτσι οι ασύμπτωτες δεν είναι πλέον οι άξονες συντεταγμένων (όπως ίσχυε για την $y = 1/x$), αλλά οι ευθείες $y = 1$ και $x = -2$.

Παράδειγμα 7 Οι ασύμπτωτες δεν είναι απαραιτήτως αμφίπλευρες

Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της καμπύλης

$$f(x) = -\frac{8}{x^2 - 4}.$$

Λύση Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της καμπύλης για $x \to \pm\infty$ και $x \to \pm 2$, δηλαδή στις περιπτώσεις όπου μηδενίζεται ο παρονομαστής. Προσέξτε ότι η f είναι άρτια συνάρτηση του x, με γραφική παράσταση συμμετρική ως προς τον άξονα y.

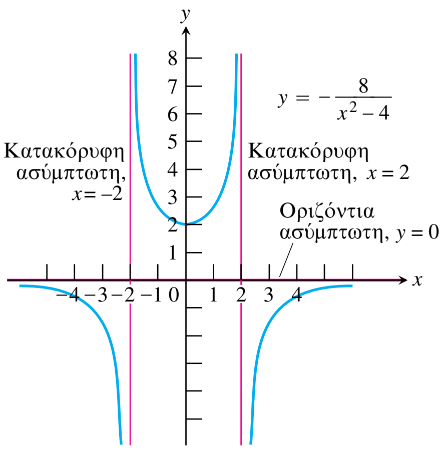
Συμπεριφορά καθώς $x \to \pm\infty$. Εφόσον $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ η ευθεία $y = 0$ είναι μια ασύμπτωτη της καμπύλης στα δεξιά (δηλ. για μεγάλα x). Και λόγω συμμετρίας, θα είναι ασύμπτωτη της καμπύλης και στα αριστερά (δηλ. για μικρά x) (Σχήμα 1.33).

Συμπεριφορά καθώς $x \to \pm 2$. Εφόσον

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty,$$

η ευθεία $x = 2$ είναι μια κατακόρυφη ασύμπτωτη, τόσο από δεξιά (δηλ. για $x \to 2^+$) όσο και από αριστερά (δηλ. για $x \to 2^-$). Και λόγω συμμετρίας, το ίδιο θα ισχύει και για την ευθεία $x = -2$.

Άλλες ασύμπτωτες δεν υπάρχουν, διότι η f έχει πεπερασμένο όριο σε κάθε άλλο σημείο.



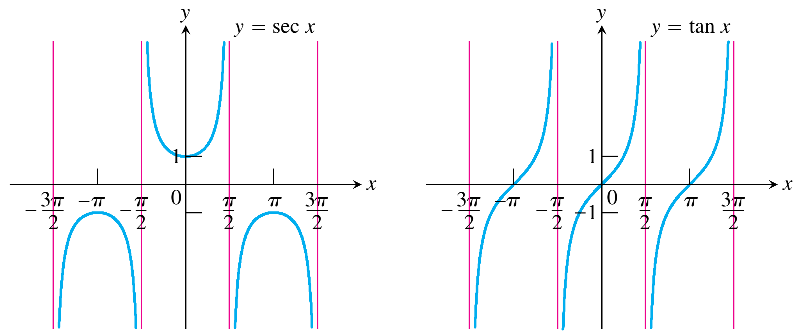
Σχημα 1.33 Γραφική παράσταση της $y = -8/(x^2 - 4)$. Προσέξτε ότι η καμπύλη προσεγγίζει τον άξονα x μόνο από τη μία του πλευρά. Οι ασύμπτωτες λοιπόν δεν είναι απαραιτήτως «αμφίπλευρες». (Παράδειγμα 7)

Παράδειγμα 8 Καμπύλες με άπειρο αριθμό ασυμπτώτων

Οι καμπύλες

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{και} \qquad y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες για $x =$ περιττό πολλαπλάσιο του $\pi/2$, όπου $\cos x = 0$ (Σχήμα 1.34).

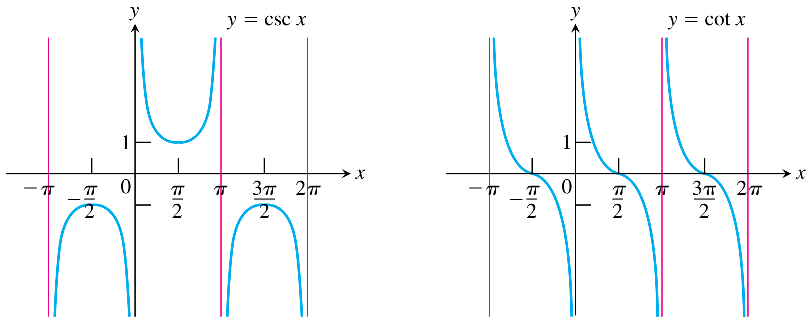


Σχημα 1.34 Γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\sec x$ και $\tan x$. (Παράδειγμα 8)

Οι γραφικές παραστάσεις των

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x} \qquad \text{και} \qquad y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες για x = ακέραιο πολλαπλάσιο του π, όπου $\sin x = 0$ (Σχήμα 1.35).



Σχημα 1.35 Γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\csc x$ και $\cot x$. (Παράδειγμα 8)

Παράδειγμα 9 Οριζόντια ασύμπτωτη της $y = e^x$

Η καμπύλη

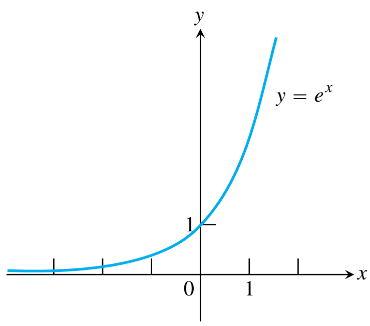
$$y = e^x$$

έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$ (δηλαδή τον άξονα x). Αυτό προκύπτει από τη γραφική παράσταση του Σχήματος 1.36 και τον συνοδευτικό πίνακα τιμών. Γράφουμε λοιπόν

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0\,.$$

Προσέξτε ότι οι τιμές της e^x τείνουν στο 0 αρκετά γρήγορα.

x	e^x
0	1,00000
−1	0,36788
−2	0,13534
−3	0,04979
−5	0,00674
−8	0,00034
−10	0,00005



Σχημα 1.36 Η ευθεία $y = 0$ είναι μια οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $y = e^x$.

Όσο για τη συμπεριφορά της συναρτήσεως $y = f(x)$ στο $x \to \pm\infty$, μπορούμε να τη διερευνήσουμε υπολογίζοντας το όριο της $y = f(1/x)$ καθώς $x \to 0$.

Παράδειγμα 10 Αντικατάσταση με νέα μεταβλητή

Να βρεθεί το $\lim_{x \to \infty} \sin(1/x)$.

Λύση Εισάγουμε μια νέα μεταβλητή, την $t = 1/x$. Από το Σχήμα 1.30, γνωρίζουμε ότι $t \to 0^+$ καθώς $x \to \infty$. Κατά συνέπεια,

$$\lim_{x \to \infty} \sin\frac{1}{x} = \lim_{t \to 0^+} \sin t = 0\,.$$

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να διερευνήσουμε τη συμπεριφορά της $y = f(1/x)$ καθώς $x \to 0$, εξετάζοντας την $y = f(x)$ καθώς $x \to \pm\infty$.

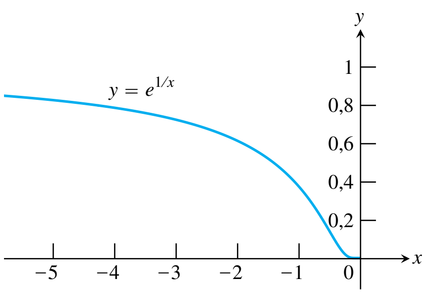
Παράδειγμα 11 Αντικατάσταση

Να βρεθεί το $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x}$.

Λύση Έστω $t = 1/x$. Από το Σχήμα 1.31, γνωρίζουμε ότι $t \to -\infty$ καθώς $x \to 0^-$. Κατά συνέπεια,

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0 \qquad \text{Παράδειγμα 9}$$

(Σχήμα 1.37).



Σχημα 1.37 Η γραφική παράσταση της $y = e^{1/x}$ για $x < 0$ δείχνει ότι $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$. (Παράδειγμα 11)

Το θεώρημα «σάντουιτς»

Το θεώρημα «σάντουιτς» ισχύει επίσης για όρια καθώς $x \to \pm\infty$.

Παράδειγμα 12 Εύρεση ορίου καθώς το x τείνει στο 0 ή στο $\pm\infty$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα «σάντουιτς», να βρεθούν οι ασύμπτωτες της καμπύλης

$$y = 2 + \frac{\sin x}{x}.$$

Λύση Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της καμπύλης καθώς $x \to \pm\infty$ και $x \to 0$, δηλαδή στις περιπτώσεις όπου μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Συμπεριφορά καθώς $x \to 0$. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to 0} (\sin x)/x = 1$, και άρα δεν υπάρχει ασύμπτωτη στην αρχή των αξόνων.

Συμπεριφορά καθώς $x \to \pm\infty$. Εφόσον

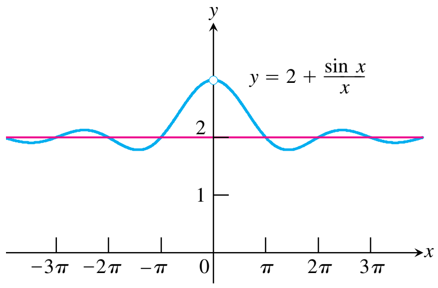
$$0 \le \left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \left|\frac{1}{x}\right|$$

και $\lim_{x\to\pm\infty} |1/x| = 0$, θα είναι $\lim_{x\to\pm\infty} (\sin x)/x = 0$, βάσει του θεωρήματος «σάντουιτς». Συνεπώς,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(2 + \frac{\sin x}{x}\right) = 2 + 0 = 2,$$

και άρα η ευθεία $y = 2$ είναι ασύμπτωτη της καμπύλης τόσο στα δεξιά όσο και στα αριστερά (Σχήμα 1.38).

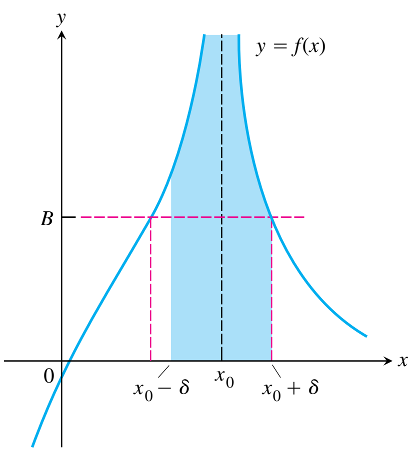
Το παράδειγμα αυτό φανερώνει ότι μια καμπύλη μπορεί να τέμνει, και μάλιστα πολλές φορές, μια οριζόντιά της ασύμπτωτη.



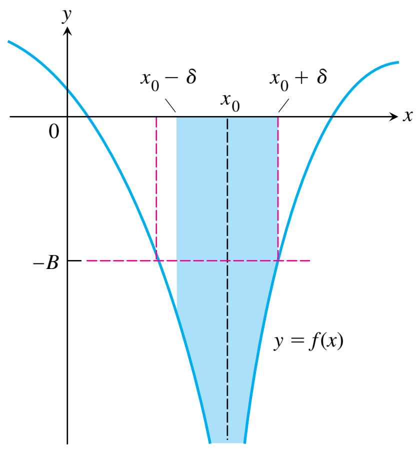
Σχημα 1.38 Μια καμπύλη μπορεί να τέμνει την ασύμπτωτή της άπειρες φορές. (Παράδειγμα 12)

Ακριβείς ορισμοί άπειρων ορίων

Ενώ μέχρι τώρα ορίζαμε όρια απαιτώντας από την $f(x)$ να πλησιάζει αυθαίρετα κοντά σε πεπερασμένο αριθμό L για κάθε x που βρίσκεται αρκετά κοντά στο x_0, θα ορίσουμε τα άπειρα όρια αξιώνοντας από την $f(x)$ να κείται αυθαίρετα μακριά από την αρχή των αξόνων. Εκτός από την αλλαγή αυτή, κατά τα άλλα οι διατυπώσεις είναι πανομοιότυπες με αυτές που ήδη έχουμε δει. Τα Σχήματα 1.39 και 1.40 συνοδεύουν τους ορισμούς.



Σχημα 1.39 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$.



Σχημα 1.40 $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Ορισμός Απειριζόμενα όρια

1. Λέμε ότι η $f(x)$ **τείνει στο άπειρο καθώς το x τείνει στο x_0**, και γράφουμε
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty,$$
αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό B υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x να ισχύει ότι
$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > B.$$

2. Λέμε ότι η $f(x)$ **τείνει στο μείον άπειρο καθώς το x τείνει στο x_0**, και γράφουμε
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty,$$
αν για κάθε αρνητικό πραγματικό αριθμό $-B$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x να ισχύει ότι
$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -B.$$

Παρόμοιοι είναι και οι ακριβείς ορισμοί των πλευρικών άπειρων ορίων στο x_0.

CD-ROM Δικτυότοπος

Μοντέλα με δεδομένη συμπεριφορά στα άκρα και πλάγιες ασύμπτωτες

Για μεγάλες αριθμητικά (δηλ. κατά μέτρο) τιμές του x, μπορούμε ενίοτε να προσομοιώνουμε μια περίπλοκη συνάρτηση με μια απλούστερη που παρουσιάζει την ίδια συμπεριφορά στις ίδιες περιοχές τιμών του x.

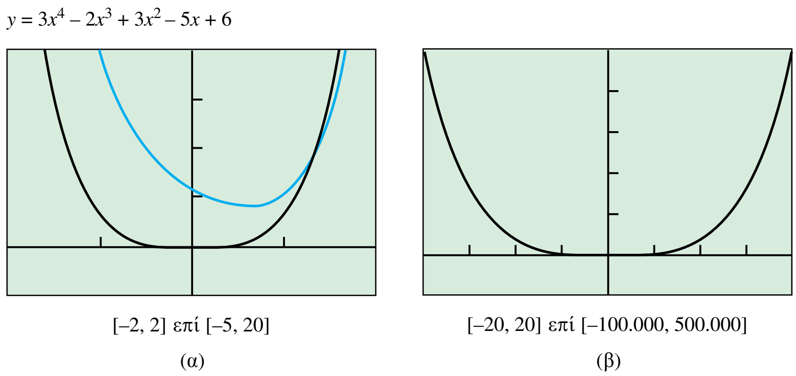
Παράδειγμα 13 Μοντέλα συναρτήσεων για μεγάλα $|x|$

Έστω $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6$ και $g(x) = 3x^4$. Δείξτε ότι παρόλο που οι f και g διαφέρουν αρκετά για αριθμητικά μικρές τιμές του x, ουσιαστικά ταυτίζονται για μεγάλα $|x|$.

Λύση

Γραφική επίλυση

Οι γραφικές παραστάσεις των f και g (Σχήμα 1.41α), αν και αρκετά διαφορετικές κοντά στην αρχή, ουσιαστικά συμπίπτουν αν ειδωθούν σε μεγαλύτερη κλίμακα (Σχήμα 1.41β).



Σχημα 1.41 Οι γραφικές παραστάσεις των f (άνω καμπύλη) και g, (α) διαφέρουν για μικρά $|x|$, και (β) σχεδόν ταυτίζονται για μεγάλα $|x|$. (Παράδειγμα 13)

Αναλυτική επαλήθευση

Η υπόθεση ότι η g έχει την ίδια συμπεριφορά με την f (και άρα αποτελεί μοντέλο της) για αριθμητικά μεγάλες τιμές του x, μπορεί να ελεγχθεί εξετάζοντας τον λόγο των δύο συναρτήσεων καθώς $x \to \pm\infty$. Βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^4-2x^3+3x^2-5x+6}{3x^4}\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{2}{3x}+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{3x^3}+\frac{2}{x^4}\right)\\ &= 1,\end{aligned}$$

γεγονός που αποτελεί πειστήριο του ότι όντως οι f και g παρουσιάζουν κοινή συμπεριφορά για μεγάλα $|x|$.

Ορισμός **Μοντέλο με δεδομένη συμπεριφορά στα άκρα**

Η συνάρτηση g είναι

(α) ένα **μοντέλο της f στο άπειρο** αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

(β) ένα **μοντέλο της f στο μείον άπειρο** αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1\,.$$

Το μοντέλο μιας συναρτήσεως f στο συν άπειρο δεν αποτελεί αναγκαστικά και μοντέλο της f στο μείον άπειρο.

Παράδειγμα 14 Εύρεση μοντέλων με δεδομένη συμπεριφορά στο $\pm\infty$

Έστω $f(x) = x + e^{-x}$. Δείξτε ότι η $g(x) = x$ αποτελεί μοντέλο της f στο συν άπειρο, ενώ η $h(x) = e^{-x}$ αποτελεί μοντέλο της f στο μείον άπειρο.

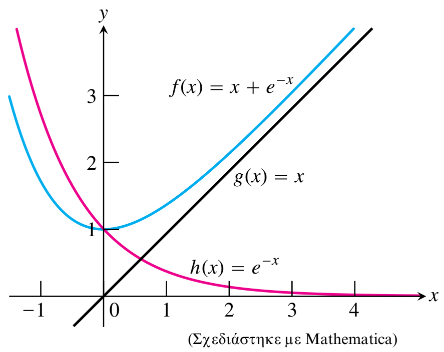
Λύση Στο συν άπειρο,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+e^{-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)=1,\ \text{εφόσον}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x}=0.$$

Στο μείον άπειρο,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+e^{-x}}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^{-x}}+1\right)=1,\ \text{εφόσον}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=0.$$

(Δείτε την Άσκηση 51). Η γραφική παράσταση της f στο Σχήμα 1.42 έρχεται σε συμφωνία με τους υπολογισμούς μας.



Σχημα 1.42 Η γραφική παράσταση της $f(x) = x + e^{-x}$ μοιάζει με αυτήν της $g(x) = x$ δεξιά του άξονα y. Αριστερά του άξονα y, μοιάζει με τη γραφική παράσταση της $h(x) = e^{-x}$. (Παράδειγμα 14)

Σε μερικές περιπτώσεις μπορούμε να βρούμε μοντέλα συναρτήσεων στο άπειρο για ρητές συναρτήσεις. Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτερος του βαθμού του παρονομαστή, τότε η γραφική παράσταση της ρητής συναρτήσεως $f(x)$ θα έχει μια **πλάγια (λοξή) ασύμπτωτη,** όπως στο Σχήμα 1.29. Η εξίσωση της ασύμπτωτης αυτής βρίσκεται αν εκτελέσουμε τη διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή, προκειμένου να εκφράσουμε την f ως μια γραμμική συνάρτηση συν κάποιο υπόλοιπο που τείνει στο μηδέν καθώς $x \to \pm\infty$. Ακολουθεί ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 15 Εύρεση πλάγιας ασύμπτωτης

Να βρεθεί η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4}$$

που φαίνεται στο Σχήμα 1.29.

Λύση Εκτελώντας τη διαίρεση, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2 - 3}{7x + 4} \\ &= \underbrace{\left(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49}\right)}_{\text{γραμμική συνάρτηση } g(x)} + \underbrace{\frac{-115}{49(7x + 4)}}_{\text{υπόλοιπο}}. \end{aligned}$$

Καθώς $x \to \pm\infty$, το υπόλοιπο (η απόλυτη τιμή του οποίου μας δίνει την κατακόρυφη απόσταση των καμπυλών f και g) τείνει στο μηδέν, άρα η ευθεία

$$g(x) = \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}$$

θα είναι η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως της f (Σχήμα 1.29). Η συνάρτηση g είναι λοιπόν μοντέλο της f τόσο στο συν άπειρο όσο και στο μείον άπειρο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.3

Υπολογισμός ορίων καθώς $x \to \pm\infty$

Στις Ασκήσεις 1-4, να βρεθούν τα όρια κάθε συναρτήσεως (**α**) καθώς $x \to \infty$ και (**β**) καθώς $x \to -\infty$. (Μπορείτε, αν θέλετε, να ελέγξετε τις απαντήσεις σας σχεδιάζοντας τις συναρτήσεις σε υπολογιστή.)

1. $f(x) = \pi - \dfrac{2}{x^2}$

2. $g(x) = \dfrac{1}{2 + (1/x)}$

3. $h(x) = \dfrac{-5 + (7/x)}{3 - (1/x^2)}$

4. $h(x) = \dfrac{3 - (2/x)}{4 + (\sqrt{2}/x^2)}$

Στις Ασκήσεις 5 και 6, να βρεθούν τα όρια.

5. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin 2x}{x}$

6. $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \frac{2 - t + \sin t}{t + \cos t}$

Όρια ρητών συναρτήσεων

Στις Ασκήσεις 7-14, να βρεθούν τα όρια κάθε συναρτήσεως (**α**) καθώς $x \to \infty$ και (**β**) καθώς $x \to -\infty$.

7. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{5x + 7}$

8. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 3}$

9. $f(x) = \dfrac{1 - 12x^3}{4x^2 + 12}$

10. $h(x) = \dfrac{7x^3}{x^3 - 3x^2 + 6x}$

11. $g(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{4x - 8}$

12. $f(x) = \dfrac{2x^5 + 3}{-x^2 + x}$

13. $h(x) = \dfrac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x}$

14. $h(x) = \dfrac{-x^4}{x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 9}$

Όρια μη ακέραιων ή αρνητικών δυνάμεων

Η ίδια διαδικασία που χρησιμοποιούμε για να προσδιορίσουμε τα όρια ρητών συναρτήσεων, μπορεί να εφαρμοστεί και για πηλίκα συναρτήσεων με μη ακέραιες ή και αρνητικές δυνάμεις του x: Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με τη μεγαλύτερη δύναμη του x στον παρονομαστή, και συνεχίζουμε κατά τα συνήθη. Στις Ασκήσεις 15-20, να βρεθούν τα όρια.

15. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$

18. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1} + x^{-4}}{x^{-2} - x^{-3}}$

19. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^{5/3} - x^{1/3} + 7}{x^{8/5} + 3x + \sqrt{x}}$

20. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + x^{2/3} - 4}$

Κατασκευή γραφικών παραστάσεων από τιμές συναρτήσεων και όρια

Στις Ασκήσεις 21 και 22, σχεδιάστε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$ που ικανοποιεί τις δοθείσες συνθήκες. Δεν σας χρειάζεται ο μαθηματικός τύπος της $f(x)$ · απλώς ονομάστε τους άξονες και σχεδιάστε μια κατάλληλη καμπύλη. (Δεν υπάρχει μία κια μοναδική απάντηση, άρα οι απαντήσεις σας δεν θα συμπίπτουν αναγκαστικά με αυτές στο τέλος του βιβλίου.)

21. $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, και $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

22. $f(0) = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, και $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$

Κατασκευή συναρτήσεων

Στις Ασκήσεις 23 και 24, βρείτε μια συνάρτηση που ικανοποιεί τις δοθείσες συνθήκες και σχεδιάστε μια πρόχειρη γραφική της παράσταση. (Και εδώ οι απαντήσεις δεν είναι μοναδικές. Κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τις συνθήκες είναι αποδεκτή. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και τμηματικά οριζόμενες συναρτήσεις, αν αυτό σας εξυπηρετεί.)

23. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$, και $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$

24. $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -1$, $\lim_{x\to\infty} h(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^-} h(x) = -1$, και $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 1$

Σχεδίαση ρητών συναρτήσεων

T Παραστήστε γραφικά τις ρητές συναρτήσεις των Ασκήσεων 25-34. Σε κάθε σχήμα σχεδιάστε τις ασύμπτωτες, γράφοντας και τις σχετικές τους εξισώσεις.

25. $y = \dfrac{1}{x-1}$

26. $y = \dfrac{x+1}{x+2}$

27. $y = \dfrac{2x^2+x-1}{x^2-1}$

28. $y = \dfrac{x^2-1}{x}$

29. $y = \dfrac{x^4+1}{x^2}$

30. $y = \dfrac{x^2-4}{x-1}$

31. $y = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

32. $y = \dfrac{x}{x^2-1}$

33. $y = \dfrac{8}{x^2+4}$ (μάγισσα της Agnesi)

34. $y = \dfrac{4x}{x^2+4}$ (οφιοειδής του Νεύτωνα)

Μοντέλα με δεδομένη συμπεριφορά στα άκρα

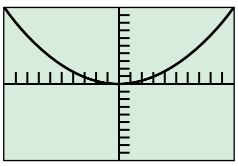
Στις Ασκήσεις 35-38, αντιστοιχίστε κάθε συνάρτηση με τη γραφική παράσταση του μοντέλου της στα άκρα του πεδίου ορισμού

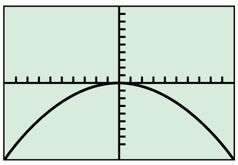
35. $y = \dfrac{2x^3-3x^2+1}{x+3}$

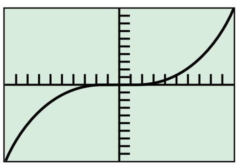
36. $y = \dfrac{x^5-x^4+x+1}{2x^2+x-3}$

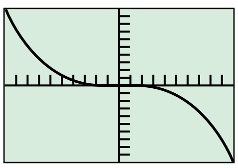
37. $y = \dfrac{2x^4-x^3+x^2-1}{2-x}$

38. $y = \dfrac{x^4-3x^3+x^2-1}{1-x^2}$


(α)


(β)


(γ)


(δ)

Στις Ασκήσεις 39-42, να βρεθεί μια απλή στοιχειώδης συνάρτηση που αποτελεί μοντέλο της συναρτήσεως (**α**) στο συν άπειρο και (**β**) στο μείον άπειρο.

39. $y = e^x - 2x$

40. $y = x^2 + e^{-x}$

41. $y = x + \ln|x|$

42. $y = x^2 + \sin x$

Θεωρία και παραδείγματα

T **43.** (**α**) Εκτιμήστε την τιμή του ορίου

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)$$

σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x.$$

(**β**) Αφού συμπληρώσετε έναν πίνακα τιμών της $f(x)$, προβλέψτε την τιμή του ορίου (α). Κατόπιν δείξτε ότι η πρόβλεψή σας ήταν η ορθή.

T **44.** Βρείτε με γραφικό τρόπο το $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)$ και επαληθεύστε αλγεβρικά την απάντησή σας.

45. *Μάθετε γράφοντας* Πόσες οριζόντιες ασύμπτωτες μπορεί να έχει η γραφική παράσταση μιας ρητής συναρτήσεως; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

46. *Μάθετε γράφοντας* Πόσες κατακόρυφες ασύμπτωτες μπορεί να έχει η γραφική παράσταση μιας ρητής συναρτήσεως; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Σύγκριση μεταξύ συναρτήσεων και μαθηματικών τύπων

Σχεδιάστε τις καμπύλες των Ασκήσεων 47-50. Εξηγήστε τη σχέση μεταξύ κάθε καμπύλης και του αντίστοιχου μαθηματικού τύπου.

47. $y = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

48. $y = \dfrac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$

49. $y = x^{2/3} + \dfrac{1}{x^{1/3}}$

50. $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{x^2+1}\right)$

Αντικατάσταση του $1/x$

Στις Ασκήσεις 51-54, χρησιμοποιήστε τη γραφική παράσταση της $y = f(1/x)$ για να βρείτε τα $\lim_{x\to\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

51. $f(x) = xe^x$

52. $f(x) = x^2e^{-x}$

53. $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{x}$

54. $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$

55. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\cos(1/x)}{1+(1/x)}$

56. $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{1/x}$

57. $\lim_{x\to\pm\infty} \left(3+\dfrac{2}{x}\right)\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$

58. $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{3}{x^2} - \cos\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\sin\dfrac{1}{x}\right)$

Εύρεση ασυμπτώτων

Στις Ασκήσεις 59-62, παραστήστε γραφικά τις συναρτήσεις που δίδονται. Ποιες ασύμπτωτες έχουν οι γραφικές παραστάσεις και γιατί οι ασύμπτωτες αυτές βρίσκονται εκεί που βρίσκονται;

59. $y = -\dfrac{x^2-4}{x+1}$

60. $y = \dfrac{x^3-x^2-1}{x^2-1}$

61. $y = x^3 + \dfrac{3}{x}$

62. $y = 2\sin x + \dfrac{1}{x}$

Στις Ασκήσεις 63 και 64, παραστήστε γραφικά τις συναρτήσεις που δίδονται. Κατόπιν απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα.

(α) Πώς συμπεριφέρεται η καμπύλη καθώς $x \to 0^+$;

(β) Πώς συμπεριφέρεται η καμπύλη καθώς $x \to \pm\infty$;

(γ) Πώς συμπεριφέρεται η καμπύλη για $x = 1$ και $x = -1$;

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

63. $y = \dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^{2/3}$

64. $y = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{2/3}$

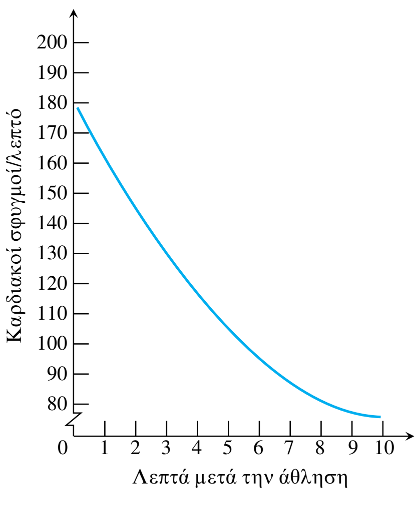
1.4 Συνέχεια

Σημειακή συνέχεια • Συνεχείς συναρτήσεις • Αλγεβρικοί συνδυασμοί • Σύνθετες συναρτήσεις • Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις

CD-ROM Δικτυότοπος

Όταν τοποθετούμε σε διάγραμμα σημεία που αντιστοιχούν σε πειραματικά δεδομένα, συνηθίζεται να συνδέουμε τα σημεία με μια συνεχή γραμμή. Με αυτόν τον τρόπο δηλώνουμε ποιες πιστεύουμε ότι είναι (κατά πάσα πιθανότητα) οι τιμές της συναρτήσεως σε ενδιάμεσες περιοχές όπου δεν πήραμε μετρήσεις (Σχήμα 1.43). Εδώ ενυπάρχει η υπόθεσή μας ότι έχουμε να κάνουμε με *συνεχή συνάρτηση,* της οποίας οι τιμές εξόδου μεταβάλλονται κατά συνεχή τρόπο με τις τιμές εισόδου, δηλαδή δεν παρουσιάζουν άλματα από μια τιμή σε μια άλλη χωρίς να παίρνουν όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

Κάθε συνάρτηση $y = f(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση μπορεί να σχεδιαστεί κατά συνεχή τρόπο, δηλαδή χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι («μονοκοντυλιά»), είναι μια συνεχής συνάρτηση. Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε την έννοια αυτή της συνέχειας.



Σχημα 1.43 Επιστροφή των παλμών της καρδιάς στα φυσιολογικά τους επίπεδα μετά από άθληση (τρέξιμο).

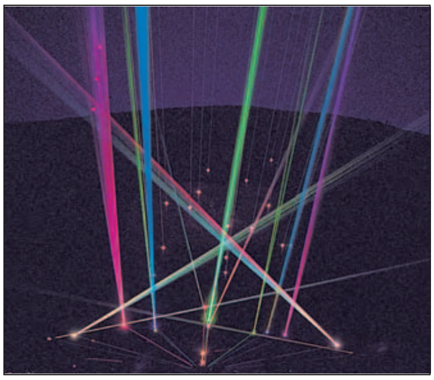
Σημειακή συνέχεια

Χρησιμοποιούμε συνεχείς συναρτήσεις για να βρούμε το πλησιέστερο στον Ήλιο σημείο μιας πλανητικής τροχιάς, ή τη μέγιστη συγκέντρωση αντισωμάτων στο πλάσμα του αίματος. Συνεχείς συναρτήσεις χρησιμοποιούμε ακόμη για να περιγράψουμε την κίνηση ενός σώματος στον χώρο, ή το πώς η ταχύτητα μιας χημικής αντίδρασης αλλάζει με τον χρόνο. Υπάρχουν τόσες πολλές φυσικές διαδικασίες που εξελίσσονται κατά συνεχή τρόπο, ώστε ήταν σχεδόν αδιανόητο στους επιστήμονες του 18^{ου} και 19^{ου} αιώνα να ερευνήσουν για κάποιου άλλου είδους συμπεριφορά στη φύση. Έτσι, προξενήθηκε σάλος στην επιστημονική κοινότητα όταν κατά τη δεκαετία του 1920 οι φυσικοί ανακάλυψαν ότι το φως αποτελείται από σωματίδια, και ότι άτομα που έχουν θερμανθεί εκπέμπουν φως σε διακριτές συχνότητες (Σχήμα 1.44). Ως αποτέλεσμα της ανακάλυψης αυτής και άλλων που ακολούθησαν, σε συνδυασμό με την ευρεία χρήση ασυνεχών συναρτήσεων στην πληροφορική, στη στατιστική, και στην κατασκευή μαθηματικών μοντέλων, το ζήτημα της συνέχειας έχει αποκτήσει τεράστια πρακτική αλλά και θεωρητική σημασία.

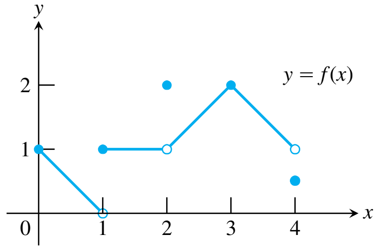
Για να καταλάβουμε την έννοια της συνέχειας συναρτήσεως, θεωρούμε μια συνάρτηση όπως αυτή του Σχήματος 1.45, της οποίας τα όρια εξετάσαμε στο Παράδειγμα 8, Ενότητα 1.2.

Παράδειγμα 1 Μελέτη συνέχειας

Να βρεθούν τα σημεία συνέχειας και ασυνέχειας της συναρτήσεως f του Σχήματος 1.45.



Σχημα 1.44 Μια από τις συνέπειες της κατανόησης της φύσεως του ατόμου ήταν και η εφεύρεση του λέιζερ.



Σχημα 1.45 Η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 4]$, με εξαίρεση τα σημεία $x = 1$, $x = 2$, και $x = 4$. (Παράδειγμα 1)

Λύση Η συνάρτηση f είναι συνεχής παντού στο πεδίο ορισμού της $[0, 4]$ εκτός από τα σημεία $x = 1$, $x = 2$, και $x = 4$. Στα σημεία αυτά η γραφική παράσταση «σπάει» και εμφανίζονται κενά. Προσέξτε τη σχέση μεταξύ του ορίου της f και της τιμής της f σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Σημεία συνέχειας της f:

Στο $x = 0$, $\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

Στο $x = 3$, $\quad \lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$.

Για $0 < c < 4$, $c \neq 1, 2$, $\quad \lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Σημεία ασυνέχειας της f:

Στο $x = 1$, $\quad$ το $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει.

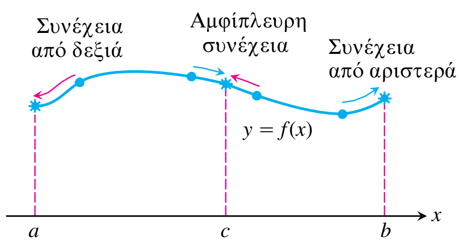
Στο $x = 2$, $\quad \lim_{x\to 2} f(x) = 1$, αλλά $1 \neq f(2)$.

Στο $x = 4$, $\quad \lim_{x\to 4} f(x) = 1$, αλλά $1 \neq f(4)$.

Για $c < 0$, $c > 4$, $\quad$ τα σημεία αυτά δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Johann van Waveren Hudde (1628-1704)

Προκειμένου να ορίσουμε τη συνέχεια συναρτήσεως σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της, χρειάζεται να ορίσουμε τη συνέχεια σε εσωτερικό σημείο (οπότε εξετάζουμε κάποιο αμφίπλευρο όριο), καθώς και σε ακραίο σημείο (οπότε εξετάζουμε κάποιο πλευρικό όριο) (Σχήμα 1.46).



Σχημα 1.46 Συνέχεια στα σημεία a, b, και c.

Ορισμός **Σημειακή συνέχεια**

Εσωτερικό σημείο: Μια συνάρτηση $y = f(x)$ είναι **συνεχής σε ένα εσωτερικό σημείο c** του πεδίου ορισμού της αν

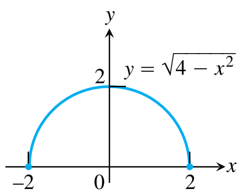
$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Ακραίο σημείο: Μια συνάρτηση $y = f(x)$ είναι **συνεχής στο αριστερό άκρο a** ή **συνεχής στο δεξιό άκρο b** του πεδίου ορισμού της αν

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b), \qquad \text{αντίστοιχα.}$$

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο c, θα λέμε ότι η f είναι **ασυνεχής** στο c και ότι το c είναι ένα **σημείο ασυνέχειας** της f. Σημειώστε ότι το c δεν οφείλει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

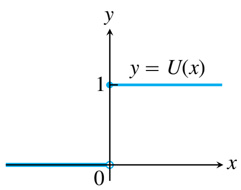
Μια συνάρτηση f είναι **συνεχής από δεξιά** στο σημείο $x = c$ του πεδίου ορισμού της αν $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$. Θα είναι, δε, **συνεχής από αριστερά** στο σημείο c αν $\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$. Κατά συνέπεια, μια συνάρτηση θα είναι συνεχής στο αριστερό άκρο a του πεδίου ορισμού της αν είναι συνεχής από δεξιά στο a· και θα είναι συνεχής στο δεξιό άκρο b του πεδίου ορισμού της αν είναι συνεχής από αριστερά στο b. Μια συνάρτηση θα είναι συνεχής σε εσωτερικό σημείο c του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν είναι ταυτόχρονα συνεχής από δεξιά και συνεχής από αριστερά στο c (Σχήμα 1.46).



Σχημα 1.47 Η συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Παράδειγμα 2 Μια συνάρτηση συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ παραμένει συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, $[-2, 2]$ (Σχήμα 1.47), συμπεριλαμβανομένου του $x = -2$, όπου είναι συνεχής από δεξιά, και του $x = 2$, όπου είναι συνεχής από αριστερά.



Σχημα 1.48 Η συνάρτηση είναι συνεχής από δεξιά στην αρχή.

Παράδειγμα 3 Μια συνάρτηση με ασυνέχεια άλματος

Η συνάρτηση μοναδιαίας βαθμίδας $U(x)$, που έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.48, είναι συνεχής από δεξιά στο $x = 0$, αλλά όχι και από αριστερά, συνεπώς δεν είναι συνεχής στο 0. Παρουσιάζει μια ασυνέχεια άλματος στο $x = 0$.

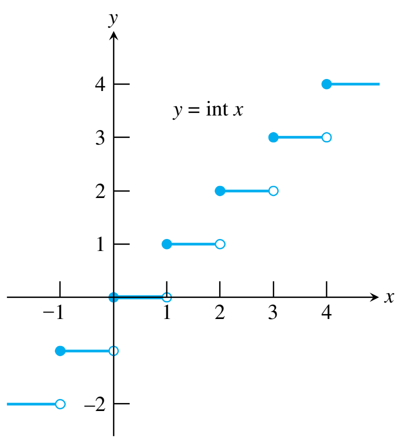
Συνοψίζουμε την έννοια της σημειακής συνέχειας με τη μορφή ενός κριτηρίου.

Κριτήριο συνέχειας

Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $x = c$ αν και μόνο αν πληροί τους ακόλουθους τρεις όρους:

1. υπάρχει το $f(c)$	(το c ανήκει στο πεδίο ορισμού της f)
2. υπάρχει το $\lim_{x\to c} f(x)$	(η f έχει όριο καθώς $x \to c$)
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$	(το όριο ισούται με την τιμή της συναρτήσεως)

Όταν έχουμε να κάνουμε με πλευρική συνέχεια καθώς και με συνέχεια σε άκρο διαστήματος, τα όρια 2 και 3 του κριτηρίου θα πρέπει να αντικατασταθούν με τα αντίστοιχα πλευρικά όρια.



Σχημα 1.49 Η συνάρτηση int x είναι συνεχής για κάθε μη ακέραιο x. Επίσης είναι συνεχής από δεξιά, αλλά όχι και από αριστερά, για κάθε ακέραιο x. (Παράδειγμα 4)

Παράδειγμα 4 Εύρεση σημείων συνέχειας και ασυνέχειας

Να βρεθούν τα σημεία συνέχειας και τα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης ακέραιας τιμής $y = \text{int}\, x$ (Σχήμα 1.49).

Λύση Για να είναι η y συνεχής στο $x = c$, πρέπει να υπάρχει το όριο καθώς $x \to c$ και να ισούται με την τιμή της συνάρτησης στο εν λόγω σημείο $x = c$. Κατά συνέπεια, η συνάρτηση y είναι ασυνεχής σε κάθε ακέραια τιμή του x. Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to 3^-} \text{int}\, x = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 3^+} \text{int}\, x = 3,$$

κι έτσι το όριο καθώς $x \to 3$ δεν υπάρχει. Σημειώστε ότι int $3 = 3$, άρα η συνάρτησή μας είναι συνεχής από δεξιά στο $x = 3$. Γενικεύοντας, για τυχόντα ακέραιο n,

$$\lim_{x \to n^-} \operatorname{int} x = n - 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to n^+} \operatorname{int} x = n,$$

άρα το όριο καθώς $x \to n$ δεν υπάρχει. Εφόσον $\operatorname{int} n = n$, η συνάρτηση ακέραιας τιμής είναι συνεχής από δεξιά (αλλά όχι και από αριστερά) σε κάθε ακέραιο n.

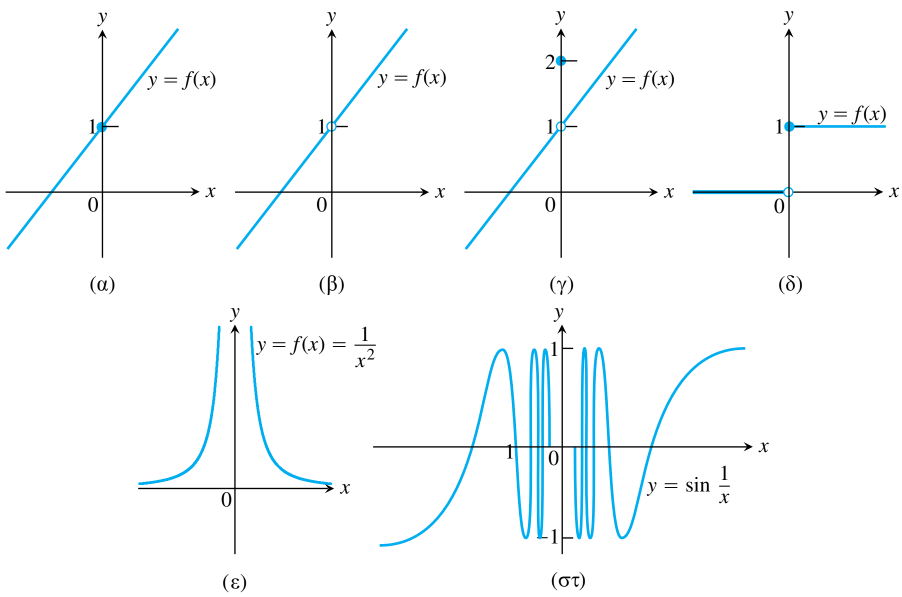
Η συνάρτηση ακέραιας τιμής είναι συνεχής σε κάθε μη ακέραιο πραγματικό αριθμό. Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \to 1,5} \operatorname{int} x = 1 = 1{,}5.$$

Γενικεύοντας, αν $n - 1 < c < n$, όπου n ακέραιος, τότε

$$\lim_{x \to c} \operatorname{int} x = n - 1 = \operatorname{int} c\,.$$

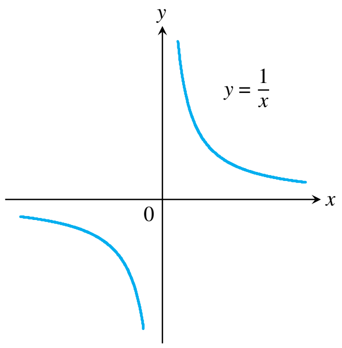
Στο Σχήμα 1.50 έχουμε «καταλογοποιήσει» τους διαφορετικούς τύπους ασυνέχειας. Η συνάρτηση του Σχήματος 1.50α είναι συνεχής στο $x = 0$. Η συνάρτηση του Σχήματος 1.50β θα ήταν συνεχής αν ίσχυε ότι $f(0) = 1$. Η συνάρτηση του Σχήματος 1.50γ θα ήταν συνεχής αν το $f(0)$ ισούτο με 1 αντί για 2. Οι ασυνέχειες των Σχημάτων 1.50β και γ είναι **αιρόμενες (θεραπεύσιμες):** Και στις δύο περιπτώσεις η συνάρτηση έχει όριο καθώς $x \to 0$, άρα μπορούμε να άρουμε την ασυνέχεια θέτοντας το $f(0)$ ίσο με το όριο αυτό.



CD-ROM
Δικτυότοπος

Σχημα 1.50 Η συνάρτηση (α) είναι συνεχής στο $x = 0$, κάτι που δεν ισχύει για τις συναρτήσεις (β) έως (στ).

Οι ασυνέχειες των Σχημάτων 1.50δ έως στ είναι σοβαρότερες: το $\lim_{x \to 0} f(x)$ δεν υπάρχει, και δεν μπορούμε να βελτιώσουμε την κατάσταση αλλάζοντας την τιμή της f στο 0. Η συνάρτηση βαθμίδας στο Σχήμα 1.50δ παρουσιάζει **ασυνέχεια άλματος:** Τα πλευρικά όρια υπάρχουν, αλλά διαφέρουν μεταξύ τους. Η συνάρτηση $f(x) = 1/x^2$ στο Σχήμα 1.50ε παρουσιάζει **άπειρη ασυνέχεια.** Η συνάρτηση στο Σχήμα 1.50στ παρουσιάζει **ταλαντευόμενη ασυνέχεια:** Ταλαντώνεται τόσο έντονα ώστε δεν έχει όριο καθώς $x \to 0$.



Σχημα 1.51 Η συνάρτηση $y = 1/x$ είναι συνεχής για κάθε x εκτός για $x = 0$, όπου παρουσιάζει σημειακή ασυνέχεια. (Παράδειγμα 5)

Συνεχείς συναρτήσεις

Μια συνάρτηση είναι **συνεχής σε διάστημα** αν και μόνο αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος. Μια **συνεχής συνάρτηση** είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Μια συνεχής συνάρτηση δεν οφείλει να παραμένει συνεχής σε κάθε διάστημα. Για παράδειγμα, η $y = 1/x$ δεν είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ (Σχήμα 1.51).

Παράδειγμα 5 Ταυτοποίηση συνεχούς συναρτήσεως

Η συνάρτηση $y = 1/x$ (Σχήμα 1.51) είναι συνεχής συνάρτηση διότι είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Παρουσιάζει όμως, ένα σημείο ασυνέχειας στο $x = 0$, διότι δεν ορίζεται εκεί.

Οι ακόλουθοι τύποι συναρτήσεων είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους:

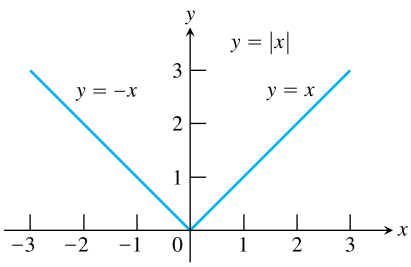
- πολυώνυμα
- ρητές συναρτήσεις
- συναρτήσεις με ρίζες ($y = \sqrt[n]{x}$, n θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1)
- τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- εκθετικές συναρτήσεις
- λογαριθμικές συναρτήσεις.

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις f είναι συνεχείς σε κάθε αριθμό c αφού $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Οι ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους· ασυνέχεια παρουσιάζουν στα σημεία μηδενισμού των παρονομαστών τους. Όσο για τις συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου, είναι συνεχείς, όπως φαίνεται και από τις γραφικές τους παραστάσεις.

Η αντίστροφη συνάρτηση κάθε συνεχούς συναρτήσεως είναι συνεχής. Ξέρουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} αποτελούν κατοπτρικά είδωλα (ως προς την ευθεία $y = x$) η μία της άλλης· έτσι, αν η γραφική παράσταση της f δεν «σπάει» πουθενά, ούτε και της f^{-1} θα «σπάει», και άρα η f^{-1} είναι συνεχής.

Η εκθετική συνάρτηση $y = a^x$ ορίστηκε έτσι ώστε να είναι συνεχής, και συνεπώς η αντίστροφή της $y = \log_a x$ θα είναι επίσης συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής για κάθε x (Σχήμα 1.52). Αν $x > 0$, τότε $f(x) = x$, που είναι πολυώνυμο (και άρα συνεχής). Αν $x < 0$, τότε $f(x) = -x$, πάλι πολυώνυμο. Τέλος, στην αρχή των αξόνων θα είναι $\lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0|$.



Σχημα 1.52 Παρά τον γωνιώδη χαρακτήρα της, η συνάρτηση παραμένει συνεχής στην αρχή.

Αλγεβρικοί συνδυασμοί

Όπως θα έχετε ήδη υποψιαστεί, οι αλγεβρικοί συνδυασμοί συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχείς, όπου ορίζονται.

Θεώρημα 8 Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $x = c$, τότε και οι ακόλουθοι συνδυασμοί είναι συνεχείς στο $x = c$.

1. *Αθροίσματα:* $f + g$
2. *Διαφορές:* $f - g$
3. *Γινόμενα:* $f \cdot g$
4. *Σταθερά πολλαπλάσια:* $k \cdot f$, για τυχόντα αριθμό k
5. *Πηλίκα:* f/g, για $g(c) \neq 0$

Τα περισσότερα αποτελέσματα του Θεωρήματος 8 προκύπτουν εύκολα από τους κανόνες ορίων του Θεωρήματος 1.

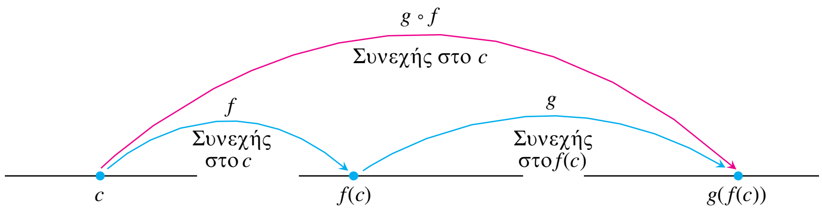
Σύνθετες συναρτήσεις

Κάθε σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση. Για παράδειγμα, οι σύνθετες συναρτήσεις

$$y = \sin(x^2) \qquad \text{και} \qquad y = |\cos x|$$

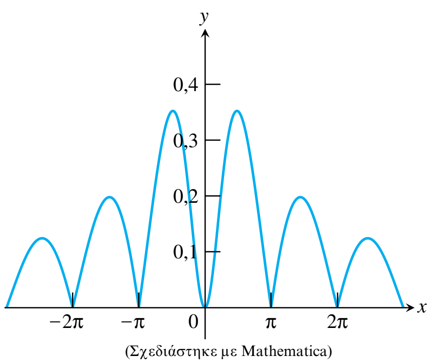
είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους. Εδώ η βασική ιδέα είναι ότι αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x = c$ και η $g(x)$ είναι συνεχής στο $x = f(c)$, τότε και η $g \circ f$ θα είναι συνεχής στο $x = c$ (Σχήμα 1.53). Στην περίπτωση αυτή το όριο της σύνθετης συνάρτησης, καθώς $x \to c$, ισούται με $g(f(c))$.

Θεώρημα 9 **Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων**
Αν η f είναι συνεχής στο c και η g είναι συνεχής στο $f(c)$, τότε η σύνθετη συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής στο c.



Σχημα 1.53 Συναρτήσεις που προέκυψαν από σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχείς.

Από διαισθητικής απόψεως το Θεώρημα 9 είναι εύλογο, γιατί όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο c, η $f(x)$ θα κείται κοντά στην τιμή $f(c)$· και εφόσον η g είναι συνεχής στο $f(c)$, η $g(f(x))$ θα κείται κοντά στην τιμή $g(f(c))$.



Σχημα 1.54 Όπως δείχνει η γραφική παράσταση, η $y = |(x \sin x)/(x^2+2)|$ είναι συνεχής. (Παράδειγμα 6)

Παράδειγμα 6 Κάνοντας χρήση του θεωρήματος 9

Δείξτε ότι η

$$y = \left| \frac{x \sin x}{x^2 + 2} \right|$$

είναι συνεχής.

Λύση Η γραφική παράσταση (Σχήμα 1.54) της $y = |(x \sin x)/(x^2+2)|$ δείχνει ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε x. Αν θέσουμε

$$g(x) = |x| \qquad \text{και} \qquad f(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 2},$$

βλέπουμε αμέσως ότι η y είναι η σύνθεση $g \circ f$.

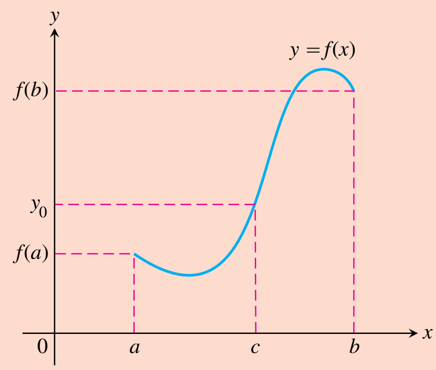
Γνωρίζουμε ήδη ότι η συνάρτηση απόλυτης τιμής g είναι συνεχής. Η συνάρτηση f είναι συνεχής βάσει του Θεωρήματος 8. Η σύνθεση των δύο θα είναι συνεχής, βάσει του Θεωρήματος 9.

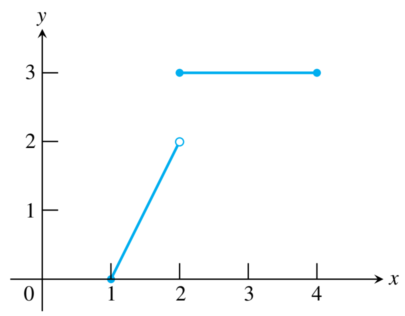
Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις

Συναρτήσεις συνεχείς σε κάποιο διάστημα έχουν ιδιότητες που τις καθιστούν εξαιρετικά χρήσιμες στα μαθηματικά και στις εφαρμογές τους. Μία τέτοια ιδιότητα είναι η *ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής*. Λέμε ότι μία συνάρτηση f έχει την **ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής,** αν μεταξύ δύο οποιονδήποτε τιμών της, η f παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

Θεώρημα 10 **Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις**

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ που είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα $[a, b]$ παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$. Με άλλα λόγια, αν y_0 είναι τυχούσα ενδιάμεση τιμή μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$, τότε $y_0 = f(c)$ για κάποιο c στο $[a, b]$.





Σχήμα 1.55 Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & 1 \le x < 2 \\ 3, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

δεν παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(1) = 0$ και $f(4) = 3$· παραλείπει τις τιμές μεταξύ του 2 και του 3.

Από γεωμετρική άποψη, το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής λέει ότι κάθε οριζόντια ευθεία $y = y_0$ που τέμνει τον άξονα y κάπου μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$, θα τέμνει και την καμπύλη $y = f(x)$ σε τουλάχιστον ένα σημείο του διαστήματος $[a, b]$.

Για να ισχύει το Θεώρημα 10, η συνέχεια της f στο εν λόγω διάστημα είναι ουσιώδης. Αν η f παρουσιάζει ασυνέχεια έστω και σε ένα σημείο του διαστήματος, το συμπέρασμα του θεωρήματος μπορεί να μην αληθεύει, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 1.55.

Συνέπεια για τη σχεδίαση: συνεκτικότητα Το Θεώρημα 10 είναι ο λόγος για τον οποίο η γραφική παράσταση κάθε συναρτήσεως συνεχούς στο διάστημα I δεν μπορεί να «σπάει» στο διάστημα αυτό. Η καμπύλη θα είναι συνεκτική, δηλαδή ενιαία και αδιάλειπτη, όπως αυτή του $\sin x$. Δεν θα παρουσιάζει άλματα, όπως η καμπύλη της συνάρτησης ακέραιας τιμής $\operatorname{int} x$, ούτε χωριστούς κλάδους, όπως αυτή της $1/x$.

Συνέπεια για την εύρεση ριζών Κάθε λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ καλείται **ρίζα** της εξίσωσης, ή **σημείο μηδενισμού** της συναρτήσεως f. Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής μάς λέει ότι αν η f είναι συνεχής, τότε κάθε διάστημα όπου η f αλλάζει πρόσημο θα περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο μηδενισμού της συναρτήσεως.

Από πρακτική άποψη, όταν βλέπουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης να διασχίζει τον οριζόντιο άξονα της οθόνης του υπολογιστή μας, τότε ξέρουμε ότι δεν μπορεί παρά να τον τέμνει σε σημείο στο οποίο η συνάρτηση μηδενίζεται. Η διαπίστωση αυτή μάς προϊδεάζει για μια μέθοδο προσεγγιστικού υπολογισμού των σημείων μηδενισμού κάθε συνεχούς συναρτήσεως που μπορεί να παρασταθεί γραφικά:

Μια διαδικασία γραφικής εύρεσης ριζών.

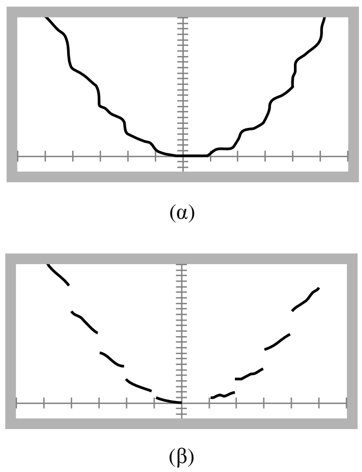
1. Σχεδιάζουμε τη συνάρτηση σε αρκετά μεγάλο διάστημα, ώστε να δούμε περίπου πού αυτή μηδενίζεται.
2. Εστιάζουμε (μεγεθύνουμε τη γραφική παράσταση) σε κάθε σημείο μηδενισμού, για να εκτιμήσουμε το x.

Μπορείτε να εφαρμόσετε τη μέθοδο αυτή στον υπολογιστή σας για μερικές από τις ασκήσεις του κεφαλαίου.

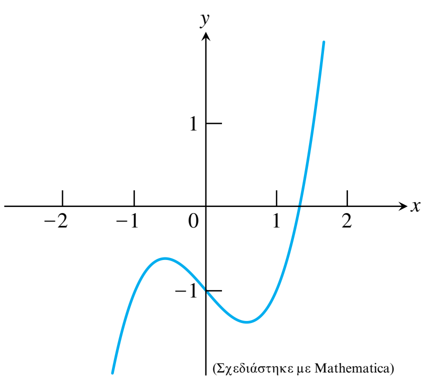
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Απατηλές εικόνες Ο υπολογιστής σχεδιάζει μία γραφική παράσταση με τρόπο παρόμοιο με αυτόν που ακολουθείτε όταν σχεδιάζετε με το χέρι: τοποθετώντας σημεία (εικονοψηφίδες, "pixels") στο χαρτί και κατόπιν συνδέοντάς τα. Η εικόνα που προκύπτει μπορεί να αποπροσανατολίζει στην περίπτωση εσφαλμένης σύνδεσης σημείων εκατέρωθεν ενός σημείου ασυνέχειας. Προκειμένου να αποφευχθούν τέτοιες ατυχείς συνδέσεις, χρησιμοποιήστε την επιλογή διάκριτης σχεδίασης ("dot mode") του υπολογιστή σας, οπότε τοποθετούνται στο διάγραμμα μόνο τα αληθή σημεία της γραφικής παράστασης. Το μειονέκτημα μιας τέτοιας σχεδίασης είναι ότι αυτή ενδέχεται να μην αποκαλύψει ικανή ποσότητα πληροφορίας ώστε να αποδώσει εύγλωττα τη φύση της γραφικής παράστασης. Σχεδιάστε τις ακόλουθες τέσσερις συναρτήσεις στον υπολογιστή σας. Αν είναι δυνατόν, δοκιμάστε και τις δύο επιλογές, διάκριτης ("dot mode") και «συνεχούς» ("connected mode") σχεδίασης.

$y_1 = x \operatorname{int} x$	στο $x = 2$	ασυνέχεια άλματος
$y_2 = \sin 1/x$	στο $x = 0$	ταλαντευόμενη ασυνέχεια
$y_3 = 1/(x-2)$	στο $x = 2$	άπειρη ασυνέχεια
$y_4 = (x^2-2)/(x-\sqrt{2})$	στο $x = \sqrt{2}$	αιρόμενη ασυνέχεια



(α) Εσφαλμένη σχεδίαση της $y_1 = x \times \operatorname{int} x$, με σύνδεση των τμημάτων της γραφικής παράστασης (συνεχές γράφημα).
(β) Ορθή σχεδίαση της $y_1 = x \times \operatorname{int} x$, χωρίς σύνδεση (διάκριτο γράφημα).



Σχημα 1.56 Γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - x - 1$. (Παράδειγμα 7)

Παράδειγμα 7 Κάνοντας χρήση του θεωρήματος μέσης τιμής

Υπάρχει πραγματικός αριθμός μικρότερος κατά μία μονάδα από τον κύβο του;

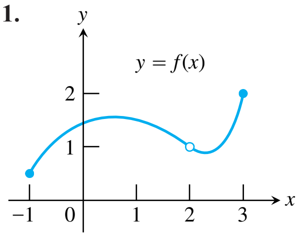
Λύση Για να απαντήσουμε στο ερώτημα, εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής ως ακολούθως. Ο ζητούμενος αριθμός θα ικανοποιεί την εξίσωση $x = x^3 - 1$ ή, ισοδύναμα, τη $x^3 - x - 1 = 0$. Οδηγούμαστε λοιπόν στην αναζήτηση των σημείων μηδενισμού της συνεχούς συναρτήσεως $f(x) = x^3 - x - 1$ (Σχήμα 1.56). Μεταξύ των σημείων $x = 1$ και $x = 2$, η συνάρτηση αλλάζει πρόσημο, συνεπώς θα υπάρχει σημείο c μεταξύ των 1 και 2 όπου $f(c) = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.4

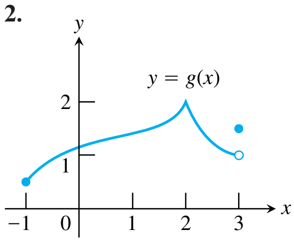
Συνέχεια και γραφικές παραστάσεις

Είναι οι παρακάτω συναρτήσεις (Ασκήσεις 1-4) συνεχείς στο διάστημα $[-1, 3]$; Αν όχι, σε ποια σημεία και γιατί;

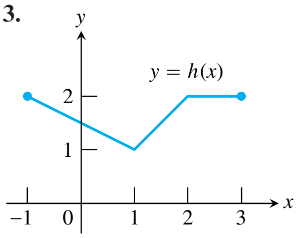
1.



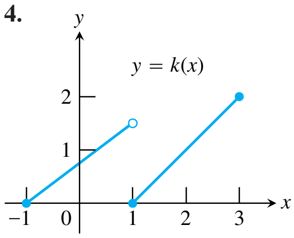
2.



3.



4.



Οι Ασκήσεις 5-10 αναφέρονται στη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \le x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

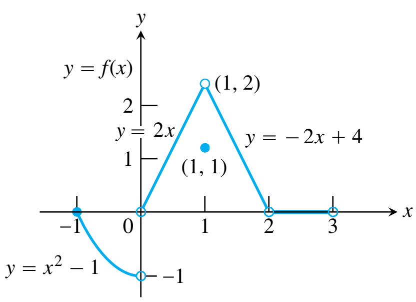
που έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.57.

5. **(α)** Υπάρχει η τιμή $f(-1)$;

(β) Υπάρχει το $\lim_{x\to -1^+} f(x)$;

(γ) Αληθεύει ότι $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$;

(δ) Είναι η f συνεχής στο $x = -1$;



ΣΧΗΜΑ 1.57 Η γραφική παράσταση στην οποία αναφέρονται οι Ασκήσεις 5-10.

6. **(α)** Υπάρχει η τιμή $f(1)$;

(β) Υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x)$;

(γ) Υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$;

(δ) Είναι η f συνεχής στο $x = 1$;

7. **(α)** Ορίζεται η f στο $x = 2$; (Συμβουλευτείτε τον ορισμό της f.)

(β) Είναι η f συνεχής στο $x = 2$;

8. Για ποιες τιμές του x είναι συνεχής η f;

9. Ποια τιμή πρέπει να δοθεί στην $f(2)$ ώστε να διατηρηθεί η συνέχεια στο $x = 2$;

10. Ποια τιμή πρέπει να δοθεί στην $f(1)$ ώστε να αρθεί η ασυνέχεια;

Εφαρμογή του κριτηρίου συνέχειας

Σε ποια σημεία παύουν να είναι συνεχείς οι συναρτήσεις των Ασκήσεων 11 και 12; Σε ποια από αυτά η ασυνέχεια είναι αιρόμενη, και σε ποια μη αιρόμενη; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

11. Άσκηση 11, Παράγραφος 1.1

12. Άσκηση 12, Παράγραφος 1.1

Σε ποια διαστήματα είναι συνεχείς οι συναρτήσεις των Ασκήσεων 13-20;

13. $y = \dfrac{1}{x-2} - 3x$

14. $y = \dfrac{1}{(x+2)^2} + 4$

15. $z = \dfrac{t+1}{t^2 - 4t + 3}$

16. $u = \dfrac{1}{|t| + 1} - \dfrac{t^2}{2}$

17. $r = \dfrac{\cos\theta}{\theta}$

18. $y = \tan\dfrac{\pi\theta}{2}$

19. $s = \sqrt{2v + 3}$

20. $y = \sqrt[4]{3x - 1}$

Σύνθετες συναρτήσεις

Στις Ασκήσεις 21-24, να βρεθούν τα όρια. Είναι συνεχείς οι συναρτήσεις στο σημείο υπολογισμού κάθε ορίου;

21. $\lim_{x\to\pi} \sin(x - \sin x)$

22. $\lim_{t\to 0} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cos(\tan t)\right)$

23. $\lim_{y\to 1} \sec(y\sec^2 y - \tan^2 y - 1)$

24. $\lim_{\theta\to 0} \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\cos(\sin\theta^{1/3})\right)$

Θεωρία και παραδείγματα

25. *Μάθετε γράφοντας* Μια συνάρτηση $y = f(x)$, συνεχής στο $[0, 1]$, είναι αρνητική στο $x = 0$ και θετική στο $x = 1$. Τι σας λέει αυτό για την εξίσωση $f(x) = 0$; Κάντε ένα σχήμα για να δείξετε τι συμβαίνει.

26. *Μάθετε γράφοντας* Γιατί η εξίσωση $\cos x = x$ διαθέτει τουλάχιστον μία λύση;

27. *Μάθετε γράφοντας* Εξηγήστε γιατί τα ακόλουθα πέντε ερωτήματα απαιτούν τις ίδιες ακριβώς πληροφορίες για την απάντησή τους.

(α) Να βρεθούν τα σημεία μηδενισμού της $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

(β) Να βρεθεί η συντεταγμένη x των σημείων τομής της καμπύλης $y = x^3$ με την ευθεία $y = 3x + 1$.

(γ) Να βρεθούν όλες οι τιμές του x για τις οποίες $x^3 - 3x = 1$.

(δ) Να βρεθούν οι συντεταγμένες x των σημείων όπου η καμπύλη $y = x^3 - 3x$ τέμνει την ευθεία $y = 1$.

(ε) Να λυθεί η εξίσωση $x^3 - 3x - 1 = 0$.

28. *Επίλυση εξισώσεως* Αν $f(x) = x^3 - 8x + 10$, δείξτε ότι θα υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή του c για την οποία η $f(c)$ θα ισούται με

(α) π

(β) $-\sqrt{3}$

(γ) 5.000.000.

29. *Αιρόμενη ασυνέχεια* Δώστε ένα παράδειγμα συναρτήσεως $f(x)$ συνεχούς για κάθε x εκτός από $x = 2$, όπου η συνάρτηση παρουσιάζει αιρόμενη ασυνέχεια. Εξηγήστε γιατί η f είναι ασυνεχής στο $x = 2$ και γιατί η εν λόγω ασυνέχεια είναι αιρόμενη.

30. *Μη αιρόμενη ασυνέχεια* Δώστε ένα παράδειγμα συναρτήσεως $g(x)$ συνεχούς για κάθε x εκτός από $x = -1$, όπου παρουσιάζει μη αιρόμενη ασυνέχεια. Εξηγήστε γιατί η g είναι ασυνεχής στο σημείο αυτό και γιατί η εν λόγω ασυνέχεια είναι μη αιρόμενη.

31. *Παραγοντοποίηση πολυωνύμου* Από την ακόλουθη παραγοντοποίηση, βρείτε τις σταθερές r_1 έως r_5 με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων:

$$x^5 - x^4 - 5x^3 = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)(x - r_5).$$

T **32.** *Παραγοντοποίηση πολυωνύμου* Έστω ότι επιθυμείτε να φέρετε το πολυώνυμο $x^3 - 3x - 1$ στη μορφή $(x - r)q(x)$, όπου $q(x)$ είναι ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο. Ποια η τιμή της σταθεράς r, με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων;

33. *Μια συνάρτηση ασυνεχής παντού*

(α) Με βάση το γεγονός ότι κάθε μη κενό διάστημα πραγματικών αριθμών περιέχει τόσο ρητούς όσο και άρρητους αριθμούς, δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο.

(β) Υπάρχει κανένα σημείο όπου η f είναι συνεχής από δεξιά ή από αριστερά;

34. *Μάθετε γράφοντας* Αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχείς για $0 \le x \le 1$, θα μπορούσε το πηλίκο $f(x)/g(x)$ να παρουσιάζει ασυνέχεια σε κάποιο σημείο του διαστήματος $[0, 1]$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

35. *Μάθετε γράφοντας* Αληθεύει ότι μια συνεχής συνάρτηση που δεν μηδενίζεται ποτέ σε κάποιο διάστημα, δεν αλλάζει πρόσημο στο διάστημα αυτό; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

36. *Τεντώνοντας ένα λαστιχάκι* Αν τεντώσετε ένα λαστιχάκι τραβώντας το ένα του άκρο προς τα δεξιά και το άλλο προς τα αριστερά, θα υπάρχει κάποιο σημείο πάνω στο λαστιχάκι που θα καταλήξει στην αρχική του θέση; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

37. *Θεώρημα σταθερού σημείου* Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$ και ότι $0 \le f(x) \le 1$ για κάθε x στο $[0, 1]$. Δείξτε ότι οφείλει να υπάρχει αριθμός c στο $[0, 1]$ τέτοιος ώστε $f(c) = c$ (το c καλείται **σταθερό σημείο** της f).

38. *Η ιδιότητα συνεχών συναρτήσεων να διατηρούν το πρόσημό τους* Έστω ότι η f ορίζεται σε διάστημα (a, b) και ότι $f(c) \neq 0$ για κάποιο σημείο c στο οποίο η f είναι συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει μια περιοχή $(c - \delta, c + \delta)$ γύρω από το c όπου η f έχει το ίδιο πρόσημο με την $f(c)$. Το συμπέρασμα αυτό είναι άξιο προσοχής. Η f, αν και ορίζεται στο (a, b), δεν απαιτείται να είναι συνεχής πουθενά εκτός από το c. Η συνέχεια στο σημείο c και η συνθήκη $f(c) \neq 0$ αρκούν για να εξασφαλίσουν μη μηδενικές (θετικές ή αρνητικές) τιμές της f σε όλη την έκταση μιας (μικρής) περιοχής.

T **39.** *Μισθολογική διαπραγμάτευση* Η Λουίζα εργάζεται ως οξυγονοκολλητής, με σύμβαση εργασίας που της αποδίδει μισθολογική αύξηση 3,5% κατ' έτος, για 4 χρόνια. Ο αρχικός μισθός της είναι 36.500 €.

(α) Δείξτε ότι ο μισθός της Λουίζας δίδεται από τη σχέση

$$y = 36.500(1{,}035)^{\operatorname{int} t},$$

όπου t ο χρόνος (σε έτη) αφότου η Λουίζα υπέγραψε τη σύμβαση.

(β) Παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση του μισθού της Λουίζας. Για ποιες τιμές του t είναι συνεχής η καμπύλη;

T **40.** *Στάθμευση σε αεροδρόμιο* Μια εταιρεία χρεώνει 1,10 € ανά ώρα στάθμευσης (ελάχιστη χρέωση) στον χώρο του αεροδρομίου. Η μέγιστη ημερήσια χρέωση είναι 7,25 €.

(α) Γράψτε έναν τύπο που να δίδει τη χρέωση για x ώρες σταθμεύσεως, όπου $0 \le x \le 24$. (*Υπόδειξη:* Δείτε την Άσκηση 39.)

(β) Παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση του ερωτήματος (α). Για ποιες τιμές του x είναι αυτή συνεχής;

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Συνεχής επέκταση σε σημείο

Όπως είδαμε στην Ενότητα 1.2, μια ρητή συνάρτηση μπορεί να έχει όριο ακόμα και σε σημείο όπου ο παρονομαστής της μηδενίζεται. Αν η $f(c)$ δεν ορίζεται αλλά υπάρχει το $\lim_{x\to c} f(x) = L$, μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση $F(x)$ ως εξής:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν το } x \text{ ανήκει στο πεδίο ορισμού της } f \\ L & \text{αν } x = c. \end{cases}$$

Η F είναι συνεχής στο $x = c$. Ονομάζεται **συνεχής επέκταση** της f στο $x = c$. Για ρητές συναρτήσεις f, η εύρεση συνεχών επεκτάσεων γίνεται συνήθως με απαλοιφή κοινών παραγόντων.

Στις Ασκήσεις 41-44, παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση f. Από το γράφημα που βλέπετε, δείχνει να διαθέτει συνεχή επέκταση στην αρχή η f; Αν ναι, χρησιμοποιήστε τις εντολές "Trace" και "Zoom" για να βρείτε μια εύλογη τιμή συνεχούς επέκτασης της συνάρτησης στο $x = 0$. Αν πάλι η f δεν μοιάζει να διαθέτει συνεχή επέκταση, μπορεί να επεκταθεί ώστε να παρουσιάζει τουλάχιστον συνέχεια από δεξιά ή από αριστερά στην αρχή; Αν ναι, ποιες νομίζετε ότι πρέπει να είναι οι τιμές της συνάρτησης επέκτασης;

41. $f(x) = \dfrac{10^x - 1}{x}$

42. $f(x) = \dfrac{10^{|x|} - 1}{x}$

43. $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$

44. $f(x) = (1 + 2x)^{1/x}$

Γραφική επίλυση εξισώσεων

Κάνοντας χρήση του υπολογιστή σας, επιλύστε γραφικά τις εξισώσεις των Ασκήσεων 45-52. Στρογγυλοποιήστε κάθε λύση σε τέσσερα δεκαδικά ψηφία.

45. $x^3 - 3x - 1 = 0$

46. $2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

47. $x(x-1)^2 = 1$ (μία ρίζα)

48. $x^x = 2$

49. $\sqrt{x} + \sqrt{1+x} = 4$

50. $x^3 - 15x + 1 = 0$ (τρεις ρίζες)

51. $\cos x = x$ (μία ρίζα). Βεβαιωθείτε ότι επιλέξατε μέτρηση γωνιών σε ακτίνια (“radian mode”).

52. $2 \sin x = x$ (τρεις ρίζες). Βεβαιωθείτε ότι επιλέξατε μέτρηση γωνιών σε ακτίνια (“radian mode”).

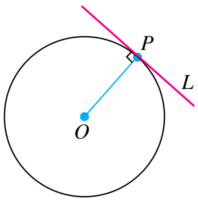
1.5 Εφαπτόμενες ευθείες

Τι *είναι* η εφαπτομένη καμπύλης; • Εύρεση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης • Ρυθμοί μεταβολής: Παράγωγος σε σημείο

Θα συνεχίσουμε εδώ τη μελέτη των τεμνουσών και των εφαπτόμενων ευθειών που αρχίσαμε στην Ενότητα 1.1. Υπολογίζουμε όρια κλίσεων τεμνουσών προκειμένου να βρούμε εφαπτομένες καμπυλών.

Τι είναι η εφαπτομένη καμπύλης;

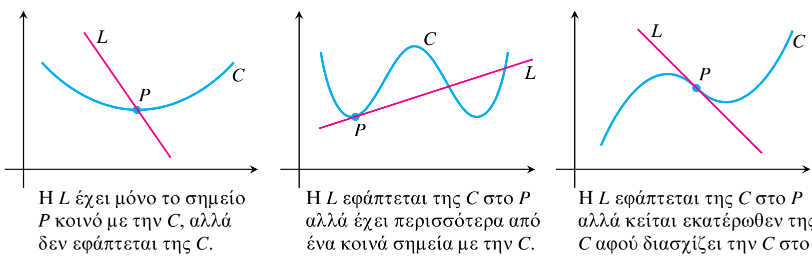
Προκειμένου για κύκλους, η έννοια της εφαπτομένης είναι απλή. Μια ευθεία L εφάπτεται ενός κύκλου στο σημείο P αν η L διέρχεται από το P κάθετα στην εκεί ακτίνα (Σχήμα 1.58). Μια τέτοια ευθεία μόλις που *αγγίζει* τον κύκλο. Αλλά τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια ευθεία L εφάπτεται μιας άλλου τύπου καμπύλης C σε σημείο P; Γενικεύοντας την περίπτωση του κύκλου, θα μπορούσαμε να εικάσουμε ότι η έννοια της εφαπτομένης συνεπάγεται μια από τις ακόλουθες προτάσεις:



Σχημα 1.58 Η ευθεία L εφάπτεται του κύκλου στο σημείο P αν διέρχεται από το P κάθετα στην ακτίνα OP.

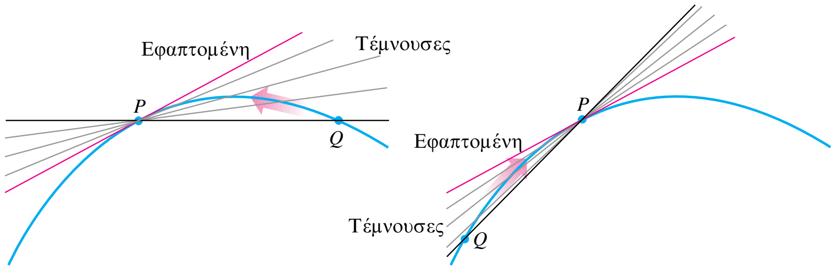
1. Η L διέρχεται από το P κάθετα στην ευθεία που ενώνει το P με το κέντρο της C.
2. Η L διέρχεται από ένα μόνο σημείο της C, το P.
3. Η L διέρχεται από το P και κείται πάντα από τη μία πλευρά της καμπύλης C.

Παρότι οι παραπάνω προτάσεις αληθεύουν αν η C είναι κύκλος, καμία τους δεν παραμένει σε πλήρη ισχύ σε γενικότερου τύπου καμπύλες. Οι περισσότερες καμπύλες δεν διαθέτουν κέντρο, ενώ μια καμπύλη που θα ονομάζαμε εφαπτομένη ενδέχεται να τέμνει τη C σε άλλα σημεία της, ή ακόμη και να τη «διασχίζει» στο σημείο επαφής (Σχήμα 1.59).



Σχημα 1.59 Διευκρινίσεις περί της έννοιας της εφαπτομένης.

Για να ορίσουμε την εφαπτομένη μιας γενικής καμπύλης, χρειαζόμαστε μια *δυναμική* ερμηνεία που να λαμβάνει υπ’ όψιν της τη συμπεριφορά των τεμνουσών που διέρχονται από το P και από γειτονικά



Σχημα 1.60 Δυναμική ερμηνεία της έννοιας της εφαπτομένης. Εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο P είναι η ευθεία που διέρχεται από το P με κλίση ίση με το όριο των κλίσεων των τεμνουσών ευθειών καθώς $Q \to P$ (από όποια πλευρά του P κι αν κινείται το Q).

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία

Pierre de Fermat
(1601-1665)

σημεία Q, καθώς το Q προσεγγίζει το P, κινούμενο επί της καμπύλης (Σχήμα 1.60). Η δυναμική ερμηνεία έχει ως εξής:

1. Ξεκινούμε με ό,τι *μπορούμε* να υπολογίσουμε, δηλαδή με την κλίση της τέμνουσας PQ.
2. Εξετάζουμε το όριο της κλίσης της τέμνουσας, καθώς το Q προσεγγίζει το P κινούμενο επί της καμπύλης.
3. Αν το όριο αυτό υπάρχει, το θεωρούμε ως την κλίση της καμπύλης στο P και ορίζουμε ως εφαπτομένη της καμπύλης στο P την ευθεία που διέρχεται από το P με την κλίση αυτή.

Όταν, στην Ενότητα 1.1, εξετάζαμε με τα παραδείγματα του βράχου που έπεφτε και της θερμικής θωράκισης, ουσιαστικά εκτελούσαμε την παραπάνω διαδικασία.

Πώς βρίσκουμε την εφαπτομένη καμπύλης;

Το ζήτημα της εφαπτομένης ήταν το κυριότερο μαθηματικό πρόβλημα των αρχών του $17^{ου}$ αιώνα, και η επίλυσή του αποτελούσε διακαή πόθο των μεγαλύτερων μαθηματικών της εποχής. Στην οπτική, η εφαπτομένη καθορίζει τη γωνία υπό την οποία μια φωτεινή ακτίνα εισέρχεται σε καμπύλο φακό. Στη μηχανική, η εφαπτομένη καθορίζει την κατεύθυνση της κίνησης σωματιδίου σε κάθε σημείο της τροχιάς του. Στη γεωμετρία, οι εφαπτομένες δύο καμπυλών στο σημείο τομής τους καθορίζουν τη γωνία που σχηματίζουν τεμνόμενες οι καμπύλες. Ο René Descartes μάλιστα είχε δηλώσει ότι το πρόβλημα εύρεσης της εφαπτομένης σε μια καμπύλη ήταν «το χρησιμότερο και γενικότερο πρόβλημα που γνωρίζω και που θα ήθελα όσο τίποτε άλλο να λύσω.»

Παράδειγμα 1 Εφαπτόμενη ευθεία σε παραβολή

Να βρεθεί η κλίση της παραβολής $y = x^2$ στο σημείο $P(2, 4)$. Να γραφεί μια εξίσωση για την εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

Λύση Θεωρούμε την τέμνουσα που διέρχεται από το $P(2, 4)$ και από το γειτονικό σημείο $Q(2 + h, (2 + h)^2)$. Γράφουμε μια έκφραση για την κλίση της τέμνουσας PQ και εξετάζουμε την κλίση καθώς το Q προσεγγίζει το P κινούμενο επί της καμπύλης:

$$\text{Κλίση τέμνουσας} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4.$$

Αν $h > 0$, τότε το Q κείται άνω δεξιά του P, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.61. Αν $h < 0$, τότε το Q κείται αριστερά του P (δεν φαίνεται). Σε κάθε περίπτωση, καθώς το Q προσεγγίζει το P κινούμενο επί της καμπύλης, το h τείνει στο 0 και η κλίση της τέμνουσας τείνει στο 4:

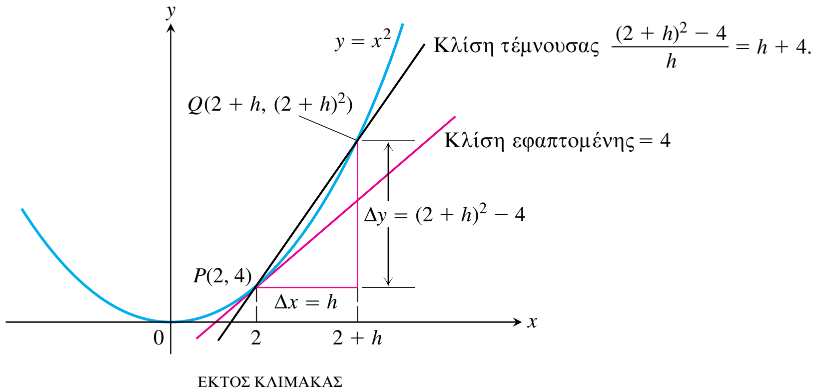
$$\lim_{h \to 0} (h + 4) = 4.$$

Θεωρούμε ότι η κλίση της παραβολής στο σημείο P ισούται με 4.

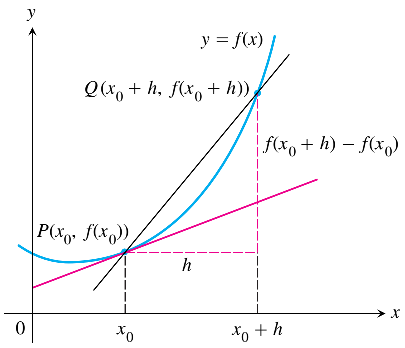
Η εφαπτομένη της παραβολής στο P είναι η ευθεία που διέρχεται από το P με κλίση 4:

$$y = 4 + 4(x - 2) \quad \text{Εξίσωση σημείου-κλίσεως}$$

$$y = 4x - 4.$$



Σχημα 1.61 Διάγραμμα για την εύρεση της κλίσης της παραβολής $y = x^2$ στο σημείο $P(2, 4)$. (Παράδειγμα 1)



Σχημα 1.62 Η κλίση της εφαπτομένης ισούται με

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Εύρεση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης

Για να βρούμε μια εφαπτομένη τυχούσας καμπύλης $y = f(x)$ σε σημείο της $P(x_0, f(x_0))$, εφαρμόζουμε την ίδια δυναμική διαδικασία. Υπολογίζουμε την κλίση της τέμνουσας που διέρχεται από το P και από το σημείο $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Κατόπιν εξετάζουμε το όριο της κλίσεως καθώς $h \to 0$ (Σχήμα 1.62). Αν το όριο υπάρχει, το ονομάζουμε κλίση της καμπύλης στο P και ορίζουμε ως εκεί εφαπτομένη την ευθεία που διέρχεται από το P με την κλίση αυτή.

Ορισμός Κλίση και εφαπτόμενη ευθεία

Η **κλίση της καμπύλης** $y = f(x)$ στο σημείο $P(x_0, f(x_0))$ ισούται με

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{(δεδομένου ότι υπάρχει το όριο).}$$

Η **εφαπτόμενη ευθεία** της καμπύλης στο P είναι η ευθεία που διέρχεται από το P με κλίση ίση με m.

CD-ROM Δικτυότοπος

Όταν διατυπώνουμε κάποιον καινούριο ορισμό, καλό είναι να τον δοκιμάζουμε πρώτα σε περιπτώσεις όπου γνωρίζουμε την απάντηση για να βεβαιωθούμε ότι αναπαράγει τα επιθυμητά αποτελέσματα. Το Παράδειγμα 2 δείχνει ότι ο νέος ορισμός της κλίσεως συμφωνεί με τον παλιό ορισμό όταν τον εφαρμόσουμε σε μη κατακόρυφες ευθείες.

Παράδειγμα 2 Έλεγχος του ορισμού

Δείξτε ότι η ευθεία $y = mx + b$ είναι εφαπτομένη του εαυτού της σε τυχόν της σημείο $(x_0, mx_0 + b)$.

Λύση Έστω $f(x) = mx + b$. Εκτελούμε τα εξής τρία βήματα.

Βήμα 1: *Βρίσκουμε τα $f(x_0)$ και $f(x_0 + h)$.*

$$f(x_0) = mx_0 + b$$
$$f(x_0 + h) = m(x_0 + h) + b = mx_0 + mh + b$$

Βήμα 2: *Βρίσκουμε την κλίση* $\lim_{h\to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0))/h$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(mx_0 + mh + b) - (mx_0 + b)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{mh}{h} = m$$

Βήμα 3: *Εφαρμόζουμε την εξίσωση σημείου-κλίσεως για να βρούμε την εφαπτομένη.* Η εφαπτομένη στο σημείο $(x_0, mx_0 + b)$ είναι η

$$y = (mx_0 + b) + m(x - x_0)$$
$$y = mx_0 + b + mx - mx_0$$
$$y = mx + b\,.$$

Πώς βρίσκουμε την εφαπτομένη της καμπύλης $y = f(x)$ στο (x_0, y_0)

1. Υπολογίζουμε τις τιμές $f(x_0)$ και $f(x_0 + h)$.
2. Υπολογίζουμε την κλίση $m = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
3. Αν το παραπάνω όριο υπάρχει, η εφαπτόμενη ευθεία θα δίδεται από την εξίσωση $y = y_0 + m(x - x_0)$.

Παράδειγμα 3 Κλίση και εφαπτομένη της $y = 1/x$

(α) Να βρεθεί η κλίση της καμπύλης $y = 1/x$ στο $x = a$.

(β) Σε ποια σημεία παίρνει η κλίση αυτή την τιμή $-1/4$;

(γ) Πώς αλλάζει η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $(a, 1/a)$ καθώς το a μεταβάλλεται;

Λύση

(α) Εδώ έχουμε $f(x) = 1/x$. Η κλίση στο σημείο $(a, 1/a)$ ισούται με

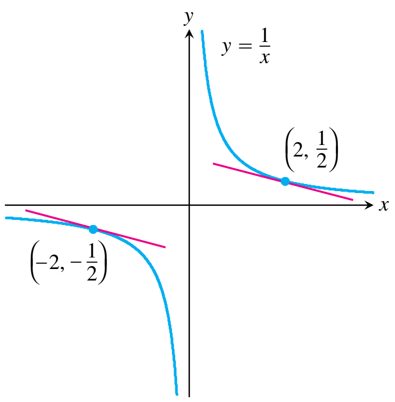
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{ha(a+h)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}.\end{aligned}$$

Προσέξτε ότι εξακολουθούμε να γράφουμε «$\lim_{h\to 0}$» πριν από κάθε κλάσμα, μέχρι να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το όριο αντικαθιστώντας $h = 0$.

(β) Η κλίση της $y = 1/x$ στο σημείο $x = a$ ισούται με $-1/a^2$. Θα ισούται με $-1/4$ εφόσον

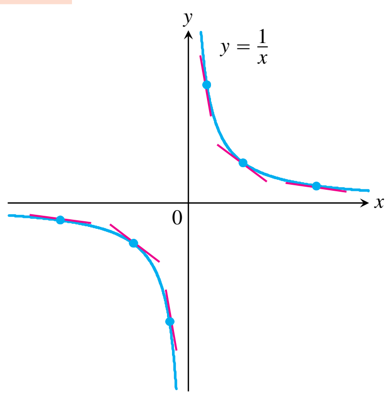
$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}.$$

Η τελευταία εξίσωση ισοδυναμεί με την $a^2 = 4$, άρα $a = 2$ ή $a = -2$. Η καμπύλη έχει κλίση $-1/4$ στα δύο σημεία $(2, 1/2)$ και $(-2, -1/2)$ (Σχήμα 1.63).



Σχημα 1.63 Οι δύο εφαπτομένες της καμπύλης $y = 1/x$, που έχουν κλίση $-1/4$.

(γ) Προσέξτε ότι η κλίση $-1/a^2$ είναι πάντα αρνητική. Καθώς $a \to 0^+$, η κλίση τείνει στο $-\infty$ και η εφαπτομένη γίνεται όλο και πιο απότομη (Σχήμα 1.64). Το ίδιο συμβαίνει καθώς $a \to 0^-$. Καθώς το a απομακρύνεται από την αρχή (προς οποιαδήποτε κατεύθυνση), η κλίση τείνει στο 0^- και η εφαπτομένη «οριζοντιώνεται».



Σχημα 1.64 Οι εφαπτομενικές κλίσεις, που είναι απότομες κοντά στην αρχή, βαθμιαία εξομαλύνονται καθώς το σημείο επαφής απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία

René François de Sluse (1622-1685)

Ρυθμοί μεταβολής: Παράγωγος σε σημείο

Η έκφραση

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

καλείται **πηλίκο διαφορών της f στο x_0 με βήμα h.** Αν το πηλίκο διαφορών έχει όριο καθώς το h τείνει στο μηδέν, το όριο αυτό καλείται **παράγωγος της f στο x_0.** Αν ερμηνεύσουμε το πηλίκο διαφορών ως την κλίση μιας τέμνουσας ευθείας, η παράγωγος δίνει την κλίση της καμπύλης και της εφαπτομένης στο σημείο $x = x_0$. Αν ερμηνεύσουμε το πηλίκο διαφορών ως κάποιον μέσο ρυθμό μεταβολής, όπως κάναμε στην Ενότητα 1.1, τότε η παράγωγος δίνει τον ρυθμό μεταβολής (ως προς x) της συναρτήσεως στο σημείο $x = x_0$. Η παράγωγος είναι το ένα από τα δύο σπουδαιότερα μαθηματικά εργαλεία του απειροστικού λογισμού (το άλλο είναι το ολοκλήρωμα). Με τις παραγώγους θα ασχοληθούμε διεξοδικότερα στο Κεφάλαιο 2· με τα ολοκληρώματα στο Κεφάλαιο 4.

Πέντε ταυτόσημες έννοιες

1. Η κλίση της $y = f(x)$ στο σημείο $x = x_0$
2. Η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = f(x)$ στο $x = x_0$
3. Ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς το x στο σημείο $x = x_0$
4. Η παράγωγος της f στο σημείο $x = x_0$
5. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Παράδειγμα 4 Στιγμιαία ταχύτητα (συνέχεια των Παραδειγμάτων 1 και 2 της Ενότητας 1.1)

Στα Παραδείγματα 1 και 2 της Ενότητας 1.1, εξετάσαμε την ταχύτητα ελεύθερης πτώσεως ενός βράχου που αρχικά ηρεμούσε κοντά στην επιφάνεια της γης. Μας ήταν γνωστό ότι πέφτοντας ο βράχος διανύει $y = 4{,}9t^2$ m κατά τα πρώτα t sec, οπότε χρησιμοποιήσαμε μια ακολουθία μέσων ρυθμών μεταβολής για ολοένα και μικρότερα χρονικά διαστήματα, για να εκτιμήσουμε την ταχύτητα του βράχου τη χρονική στιγμή $t = 2$. Πόση *ακριβώς* ήταν η ταχύτητα του βράχου τη στιγμή εκείνη;

Λύση Θέτουμε $f(t) = 4{,}9t^2$. Κατά το χρονικό διάστημα μεταξύ $t = 2$ και $t = 2 + h$ sec, η μέση ταχύτητα του βράχου ήταν

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{4{,}9(2+h)^2 - 4{,}9(2)^2}{h} = \frac{4{,}9(h^2 + 4h)}{h} = 4{,}9(h+4).$$

Έτσι η ταχύτητα του βράχου τη στιγμή $t = 2$ ήταν

$$\lim_{h\to 0} 4{,}9(h+4) = 4{,}9(0+4) = 19{,}6 \text{ m/sec}.$$

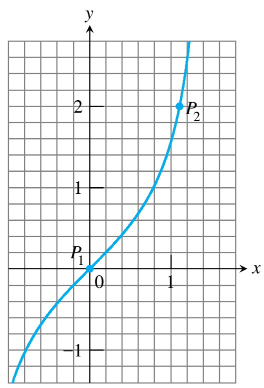
Η αρχική εκτίμησή μας των 19,6 m/sec ήταν λοιπόν ορθή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.5

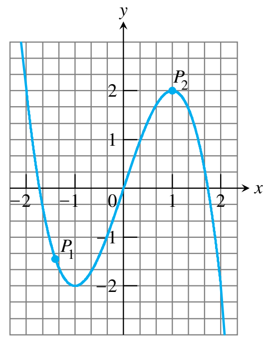
Κλίσεις και τέμνουσες ευθείες

Στις Ασκήσεις 1-4, χρησιμοποιήστε τα διαγράμματα για να κάνετε μια χονδρική εκτίμηση της κλίσεως της καμπύλης (σε μονάδες y ανά μονάδα x) στα σημεία P_1 και P_2. Οι γραφικές παραστάσεις μπορεί να έχουν κάπως μετατοπιστεί κατά την εκτύπωση του βιβλίου, κι έτσι οι απαντήσεις σας ενδέχεται να διαφέρουν κάπως από αυτές στο τέλος του βιβλίου.

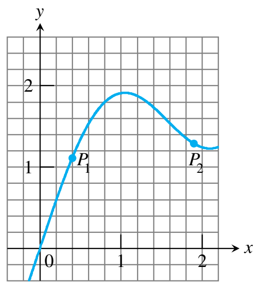
1.



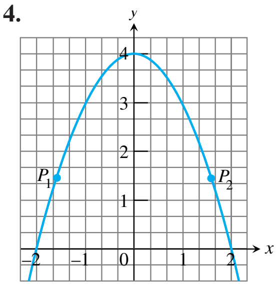
2.



3.



4.



Στις Ασκήσεις 5-8, βρείτε μια εξίσωση για την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο που δίδεται. Σχεδιάστε πρόχειρα στο ίδιο σχήμα την καμπύλη και την εφαπτομένη της.

5. $y = 4 - x^2, \quad (-1, 3)$

6. $y = 2\sqrt{x}, \quad (1, 2)$

7. $y = x^3, \quad (-2, -8)$

8. $y = \dfrac{1}{x^3}, \quad (-2, -1/8)$

Στις Ασκήσεις 9-12, βρείτε την κλίση της γραφικής παράστασης κάθε συνάρτησης στο σημείο που δίδεται. Κατόπιν, βρείτε μια εξίσωση για την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό.

9. $f(x) = x - 2x^2, \quad (1, -1)$

10. $h(t) = t^3 + 3t, \quad (1, 4)$

11. $g(u) = \dfrac{u}{u-2}, \quad (3, 3)$

12. $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad (8, 3)$

Στις Ασκήσεις 13 και 14, βρείτε την κλίση της καμπύλης για την τιμή του x που δίδεται.

13. $y = \dfrac{1}{x-1}, \quad x = 3$

14. $y = \dfrac{x-1}{x+1}, \quad x = 0$

Εφαπτόμενες ευθείες με καθορισμένες κλίσεις

Σε ποια σημεία γίνονται οριζόντιες οι εφαπτόμενες ευθείες των γραφημάτων των συναρτήσεων στις Ασκήσεις 15 και 16;

15. $f(x) = x^2 + 4x - 1$

16. $g(x) = x^3 - 3x$

17. Βρείτε εξισώσεις για όλες τις εφαπτομένες της καμπύλης $y = 1/(x-1)$ που έχουν κλίση ίση με -1.

18. Βρείτε μια εξίσωση για την εφαπτομένη της καμπύλης $y = \sqrt{x}$ με κλίση $1/4$.

Ρυθμοί μεταβολής

19. *Αντικείμενο που πέφτει από πύργο* Αντικείμενο αφήνεται να πέσει ελεύθερα από την κορυφή πύργου ύψους 100 m. Μετά από t sec, το ύψος του ισούται με $100 - 4{,}9t^2$ m. Πόσο γρήγορα πέφτει κατά τη χρονική στιγμή 2 sec μετά την έναρξη της πτώσης του;

20. *Ταχύτητα πυραύλου* t sec μετά την εκτόξευση πυραύλου, το ύψος του είναι t^2 m. Πόσο γρήγορα ανυψώνεται ο πύραυλος 10 sec μετά την εκτόξευση;

21. *Μεταβαλλόμενο εμβαδόν κύκλου* Με ποιον ρυθμό μεταβάλλεται το εμβαδόν κύκλου ($A = \pi r^2$) ως προς την ακτίνα r, όταν $r = 3$;

22. *Μεταβαλλόμενος όγκος σφαίρας* Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου σφαίρας ($V = (4/3)\pi r^3$) ως προς την ακτίνα r, όταν $r = 2$;

23. *Ελεύθερη πτώση στον Άρη* Η εξίσωση που περιγράφει ελεύθερη πτώση στην επιφάνεια του πλανήτη Άρη είναι $s = 1{,}86t^2$ m, όπου t ο χρόνος σε sec. Αν ένας βράχος αφήνεται να πέσει κατακόρυφα από την κορυφή απότομης βουνοπλαγιάς ύψους 200 m, να βρεθεί η ταχύτητα του βράχου τη στιγμή $t = 1$ sec.

24. *Ελεύθερη πτώση στον Δία* Η εξίσωση που περιγράφει ελεύθερη πτώση στην επιφάνεια του πλανήτη Δία είναι $s = 11{,}44t^2$ m, όπου t ο χρόνος σε sec. Αν ένας βράχος αφήνεται να πέσει κατακόρυφα από την κορυφή απότομης βουνοπλαγιάς ύψους 500 m, να βρεθεί η ταχύτητα του βράχου τη στιγμή $t = 2$ sec.

Αναζήτηση εφαπτόμενων ευθειών

25. *Μάθετε γράφοντας* Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Έχει εφαπτομένη στην αρχή η γραφική της παράσταση; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

26. *Μάθετε γράφοντας* Δίδεται η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

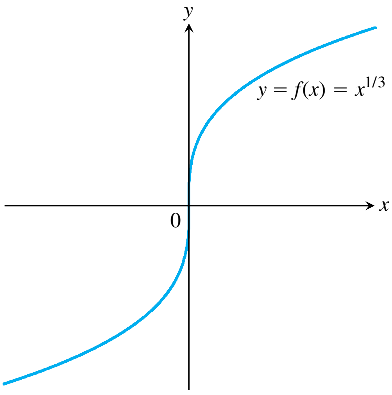
Έχει εφαπτομένη στην αρχή η γραφική της παράσταση; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Κατακόρυφες εφαπτομένες

Λέμε ότι η καμπύλη $y = f(x)$ έχει **κατακόρυφη εφαπτομένη** στο σημείο $x = x_0$ αν $\lim_{h\to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0))/h = \infty$ ή $-\infty$.

Η ακόλουθη καμπύλη έχει κατακόρυφη εφαπτομένη στο $x = 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty$$

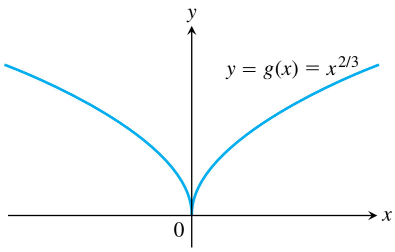


ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΤΗΝ ΑΡΧΗ

Η ακόλουθη καμπύλη *δεν* έχει κατακόρυφη εφαπτομένη στο $x = 0$: Το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{2/3} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{1/3}}$$

δεν υπάρχει, αφού το δεξιό όριο είναι ∞, ενώ το αριστερό είναι $-\infty$.



ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΤΗΝ ΑΡΧΗ

27. *Μάθετε γράφοντας* Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Έχει κατακόρυφη εφαπτομένη στην αρχή η γραφική της παράσταση; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

28. *Μάθετε γράφοντας* Δίδεται η συνάρτηση

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Έχει κατακόρυφη εφαπτομένη στο σημείο (0, 1) η γραφική της παράσταση; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Στις Ασκήσεις 29-32, χρησιμοποιήστε υπολογιστή ή κομπιουτεράκι για να βρείτε τον μέσο ρυθμό μεταβολής της συναρτήσεως σε κάθε διάστημα.

29. $f(x) = e^x$

(α) $[-2, 0]$ **(β)** $[1, 3]$

30. $f(x) = \ln x$

(α) $[1, 4]$ **(β)** $[100, 103]$

31. $f(t) = \cot t$

(α) $[\pi/4, 3\pi/4]$ **(β)** $[\pi/6, \pi/2]$

32. $f(t) = 2 + \cos t$

(α) $[0, \pi]$ **(β)** $[-\pi, \pi]$

33. *Επιχορήγηση στο INS* Ο Πίνακας 1.3 παραθέτει τα ποσά επιχορήγησης που έλαβε η υπηρεσία Immigration and Naturalization Service (INS) των ΗΠΑ για κάποια χρονική περίοδο.

Πίνακας 1.3 Ομοσπονδιακή επιχορήγηση προς το INS

Έτος	Επιχορήγηση (δισεκ. $)
1993	1,5
1994	1,6
1995	2,1
1996	2,6
1997	3,1

Πηγή: Immigration and Naturalization Service, από άρθρο του Bob Laird στην εφημερίδα *USA Today*, February 18, 1997.

(α) Να βρεθεί ο μέσος ρυθμός μεταβολής της επιχορήγησης από το 1993 έως το 1995.

(β) Να βρεθεί ο μέσος ρυθμός μεταβολής της επιχορήγησης από το 1995 έως το 1997.

(γ) Έστω ότι η τιμή $x = 0$ αντιστοιχεί στο 1990, η $x = 1$ στο 1991, κ.ο.κ. Αφού βρείτε μια δευτεροβάθμια παλινδρομική εξίσωση που να προσαρμόζεται στα δεδομένα, σχεδιάστε την μαζί με το διάγραμμα διασποράς. (Για να θυμηθείτε πώς γίνεται παλινδρομική ανάλυση με υπολογιστή, δείτε τη σελ. 5.)

(δ) Υπολογίστε τους μέσους ρυθμούς μεταβολής στα ερωτήματα (α) και (β) κάνοντας χρήση της παλινδρομικής εξίσωσης.

(ε) Χρησιμοποιώντας την παλινδρομική εξίσωση, βρείτε πόσο γρήγορα αυξανόταν η επιχορήγηση το έτος 1997.

34. *Επιχορήγηση στα πανεπιστήμια από το Κογκρέσο* Στον Πίνακα 1.4 παρατίθενται τα ποσά που ενέκρινε το αμερικανικό Κογκρέσο για την επιχορήγηση ακαδημαϊκών προγραμμάτων, για κάποια χρονική περίοδο.

Πίνακας 1.4 Επιχορήγηση Κογκρέσου προς πανεπιστήμια των ΗΠΑ

Έτος	Επιχορήγηση (εκατομμύρια $)
1988	225
1989	289
1990	270
1991	493
1992	684
1993	763
1994	651
1995	600
1996	296
1997	440

Πηγή: The Chronicle of Higher Education, March 28, 1997.

(α) Έστω ότι η τιμή $x = 0$ αντιστοιχεί στο 1980, η $x = 1$ στο 1981, κ.ο.κ. Κάντε το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

(β) Έστω P το σημείο που αντιστοιχεί στο 1997 και Q το σημείο που αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε από τα προηγούμενα έτη. Κατασκευάστε έναν πίνακα τιμών με τις κλίσεις όλων των δυνατών τεμνουσών PQ.

(γ) *Μάθετε γράφοντας* Βάσει των υπολογισμών σας, εξηγήστε γιατί δεν θα εμπιστευόσασταν μια πρόβλεψη του ρυθμού μεταβολής της επιχορήγησης από το Κογκρέσο το έτος 1997.

Γραφικές διερευνήσεις: κατακόρυφες εφαπτομένες

(α) Σχεδιάστε με υπολογιστή τις καμπύλες των Ασκήσεων 35-44. Σε ποια σημεία δείχνουν να έχουν κατακόρυφες εφαπτομένες οι γραφικές παραστάσεις;

(β) Διαβάστε την εισαγωγή στις Ασκήσεις 27 και 28. Κατόπιν, επαληθεύστε τις απαντήσεις σας στο (α) υπολογίζοντας τα κατάλληλα όρια.

35. $y = x^{2/5}$

36. $y = x^{4/5}$

37. $y = x^{1/5}$

38. $y = x^{3/5}$

39. $y = 4x^{2/5} - 2x$

40. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

41. $y = x^{2/3} - (x-1)^{1/3}$

42. $y = x^{1/3} + (x-1)^{1/3}$

43. $y = \begin{cases} -\sqrt{|x|}, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

44. $y = \sqrt{|4-x|}$

Σχεδίαση τεμνουσών και εφαπτόμενων ευθειών

Με κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας, εκτελέστε τα παρακάτω βήματα στις Ασκήσεις 45-48.

(α) Σχεδιάστε την $y = f(x)$ στο διάστημα $x_0 - 1/2 \le x \le x_0 + 3$.

(β) Για σταθερό x_0, το πηλίκο διαφορών στο x_0,

$$q(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

γίνεται η συνάρτηση βαθμίδας h. Εισάγετε τη συνάρτηση αυτή στο υπολογιστικό σύστημα που χρησιμοποιείτε.

(γ) Βρείτε το όριο του q καθώς $h \to 0$.

(δ) Ορίστε τις τέμνουσες ευθείες $y = f(x_0) + q * (x - x_0)$ για $h = 3, 2$, και 1. Σχεδιάστε τις σε κοινό σχήμα με την f και την εφαπτομένη, στην περιοχή τιμών του ερωτήματος (α).

45. $f(x) = x^3 + 2x, \quad x_0 = 0$

46. $f(x) = x + \dfrac{5}{x}, \quad x_0 = 1$

47. $f(x) = x + \sin(2x), \quad x_0 = \pi/2$

48. $f(x) = \cos x + 4\sin(2x), \quad x_0 = \pi$

Επαναληπτικές ερωτήσεις

1. Τι είναι ο μέσος ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $g(t)$ στο διάστημα από $t = a$ έως $t = b$ και ποια η σχέση του με τέμνουσες ευθείες;

2. Ποιος υπολογισμός ορίου απαιτείται για την εύρεση του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης $g(t)$ στο $t = t_0$;

3. Ποιος είναι ο άτυπος ορισμός του ορίου
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L;$$
Γιατί είναι «άτυπος» ο ορισμός αυτός; Δώστε παραδείγματα. Όταν γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) =$ τί ακριβώς εννοούμε;

4. Εξαρτάται η ύπαρξη και η τιμή του ορίου συναρτήσεως $\lim_{x\to x_0} f(x)$ από το τι συμβαίνει στο σημείο $x = x_0$; Εξηγήστε και δώστε παραδείγματα.

5. Για ποια είδη συμπεριφοράς μιας συνάρτησης παύει να υπάρχει το όριό της; Δώστε παραδείγματα.

6. Ποια θεωρήματα έχουμε στη διάθεσή μας για τον υπολογισμό ορίων; Δώστε παραδείγματα για το πώς αυτά χρησιμοποιούνται.

7. Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ πλευρικών ορίων και ορίων; Πώς μπορούμε, εκμεταλλευόμενοι τη σχέση αυτή, να υπολογίσουμε κάποιο όριο ή να δείξουμε ότι δεν υπάρχει; Δώστε παραδείγματα.

8. Ποια η τιμή του $\lim_{\theta\to 0} ((\sin\theta)/\theta)$; Έχει σημασία αν η γωνία θ μετριέται σε μοίρες ή σε ακτίνια; Εξηγήστε.

9. Τι σημαίνουν οι συμβολισμοί $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$; Δώστε παραδείγματα.

10. Ποια η τιμή των $\lim_{x\to\pm\infty} k$ (όπου k μια σταθερά) και $\lim_{x\to\pm\infty} (1/x)$; Πώς μπορούν να χρησιμεύσουν τα όρια αυτά στην εύρεση ορίων άλλων συναρτήσεων; Δώστε παραδείγματα.

11. Πώς βρίσκουμε το όριο ρητής συναρτήσεως καθώς $x \to \pm\infty$; Δώστε παραδείγματα.

12. Τι είναι οι οριζόντιες, οι κατακόρυφες, και οι πλάγιες ασύμπτωτες; Δώστε παραδείγματα.

13. Ποιες συνθήκες πρέπει να πληρούνται για να είναι μια συνάρτηση συνεχής σε σημείο του πεδίου ορισμού της (α) εσωτερικό και (β) ακραίο;

14. Πώς μπορείτε κοιτάζοντας τη γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως να αποφανθείτε για το πού αυτή είναι συνεχής;

15. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής από δεξιά ή συνεχής από αριστερά σε ένα σημείο; Πώς συνδέονται οι έννοιες της συνέχειας και της πλευρικής συνέχειας;

16. Τι γνωρίζετε για τη συνέχεια των πολυωνυμικών συναρτήσεων; Των ρητών συναρτήσεων; Των τριγωνομετρικών συναρτήσεων; Των εκθετικών συναρτήσεων; Των λογαριθμικών συναρτήσεων; Των ρητών δυνάμεων και των αλγεβρικών συνδυασμών συναρτήσεων; Των σύνθετων συναρτήσεων; Των απόλυτων τιμών συναρτήσεων; Των αντίστροφων συναρτήσεων;

17. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα;

18. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής; Δείξτε με μερικά παραδείγματα ότι υπάρχει η περίπτωση μια συνάρτηση να μην είναι συνεχής στο πλήρες πεδίο ορισμού της αλλά σε συγκεκριμένα διαστήματα μέσα σε αυτό.

19. Ποιοι είναι οι κυριότεροι τύποι ασυνέχειας; Δώστε από ένα παράδειγμα. Τι είναι η αιρόμενη ασυνέχεια; Δώστε ένα παράδειγμα.

20. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής; Ποιες συνθήκες μάς εγγυώνται ότι μια συνάρτηση θα έχει την ιδιότητα αυτή σε κάποιο διάστημα; Τι συνεπάγεται η ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής για τη γραφική παράσταση της f και την επίλυση της εξίσωσης $f(x) = 0$;

21. Λέγεται συχνά ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής αν μπορείτε να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση χωρίς να χρειαστεί να σηκώσετε το μολύβι σας από το χαρτί. Γιατί;

22. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια ευθεία εφάπτεται μιας καμπύλης C σε ένα σημείο P ;

23. Ποια η σημασία του τύπου

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ ?$$

Δώστε τη γεωμετρική και τη φυσική του ερμηνεία.

24. Πώς βρίσκεται η εφαπτομένη της καμπύλης $y = f(x)$ σε σημείο (x_0, y_0) επί της καμπύλης;

25. Πώς συνδέεται η κλίση της καμπύλης $y=f(x)$ στο $x=x_0$ με τον ρυθμό μεταβολής της συναρτήσεως ως προς x στο $x = x_0$; Πώς συνδέεται με την παράγωγο της f στο x_0 ;

Ασκήσεις κεφαλαίου

Όρια και συνέχεια

1. Σχεδιάστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le -1 \\ -x, & -1 < x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

Κατόπιν μελετήστε λεπτομερώς τα όρια, τα πλευρικά όρια, τη συνέχεια, και την πλευρική συνέχεια της f στα σημεία $x = -1, 0$, και 1. Είναι καμία από τις ασυνέχειες αιρόμενη; Εξηγήστε.

2. Επαναλάβετε ό,τι κάνατε στην Άσκηση 1 για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 1/x, & 0 < |x| < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

3. Έστω ότι οι $f(t)$ και $g(t)$ είναι ορισμένες για κάθε t και ότι $\lim_{t\to t_0} f(t) = -7$ και $\lim_{t\to t_0} g(t) = 0$. Βρείτε τα όρια, καθώς $t \to t_0$, των ακόλουθων συναρτήσεων:

(α) $3f(t)$ **(β)** $(f(t))^2$
(γ) $f(t)\cdot g(t)$ **(δ)** $\dfrac{f(t)}{g(t)-7}$
(ε) $\cos(g(t))$ **(στ)** $|f(t)|$
(ζ) $f(t)+g(t)$ **(η)** $1/f(t)$

4. Έστω ότι οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι ορισμένες για κάθε x και ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = 1/2$ και $\lim_{x\to 0} g(x) = \sqrt{2}$. Βρείτε τα όρια, καθώς $x \to 0$, των ακόλουθων συναρτήσεων:

(α) $-g(x)$ **(β)** $g(x)\cdot f(x)$
(γ) $f(x)+g(x)$ **(δ)** $1/f(x)$
(ε) $x+f(x)$ **(στ)** $\dfrac{f(x)\cdot\cos x}{x-1}$

Στις Ασκήσεις 5 και 6, βρείτε ποια τιμή πρέπει να έχει το όριο $\lim_{x\to 0} g(x)$ ώστε να αληθεύουν οι ακόλουθες προτάσεις.

5. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{4-g(x)}{x}\right) = 1$ 6. $\lim_{x\to -4}\left(x\lim_{x\to 0} g(x)\right) = 2$

7. Σε ποια διαστήματα είναι συνεχείς οι ακόλουθες συναρτήσεις;

(α) $f(x) = x^{1/3}$ **(β)** $g(x) = x^{3/4}$
(γ) $h(x) = x^{-2/3}$ **(δ)** $k(x) = x^{-1/6}$

8. Σε ποια διαστήματα είναι συνεχείς οι ακόλουθες συναρτήσεις;

(α) $f(x) = \tan x$ **(β)** $g(x) = \csc x$

(γ) $h(x) = e^{-x}$ **(δ)** $k(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Εύρεση ορίων

Στις Ασκήσεις 9-16, βρείτε κάθε όριο ή εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει.

9. $\lim \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^3 + 5x^2 - 14x}$

(α) καθώς $x \to 0$ **(β)** καθώς $x \to 2$

10. $\lim \dfrac{x^2 + x}{x^5 + 2x^4 + x^3}$

(α) καθώς $x \to 0$ **(β)** καθώς $x \to -1$

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$ **12.** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x^4 - a^4}$

13. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$ **14.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{2 + x} - \dfrac{1}{2}}{x}$ **16.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2 + x)^3 - 8}{x}$

Στις Ασκήσεις 17-28, να βρεθούν τα όρια .

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x + 3}{5x + 7}$ **18.** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2 + 3}{5x^2 + 7}$

19. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 8}{3x^3}$ **20.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2 - 7x + 1}$

21. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 - 7x}{x + 1}$ **22.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 + x^3}{12x^3 + 128}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{\operatorname{int} x}$ (Αν έχετε υπολογιστή, σχεδιάστε τη συνάρτηση για $-5 \le x \le 5$.)

24. $\lim\limits_{\theta\to\infty} \dfrac{\cos\theta - 1}{\theta}$ (Αν έχετε υπολογιστή, σχεδιάστε την $f(x) = x(\cos(1/x) - 1)$ κοντά στην αρχή ώστε να «δείτε» το όριο στο άπειρο.)

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \sin x + 2\sqrt{x}}{x + \sin x}$ **26.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{2/3} + x^{-1}}{x^{2/3} + \cos^2 x}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2}$ **28.** $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{1/x}$

T **29.** Έστω $f(x) = x^3 - x - 1$.

(α) Δείξτε ότι η f έχει ένα σημείο μηδενισμού μεταξύ του -1 και του 2.

(β) Επιλύστε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$ με μέγιστο επιτρεπόμενο σφάλμα 10^{-8} .

(γ) Μπορεί να δειχτεί ότι η ακριβής λύση της εξίσωσης του ερωτήματος (β) είναι

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{1/3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{1/3}$$

Υπολογίστε την τιμή της λύσης αυτής και συγκρίνετέ την με την απάντησή σας στο (β).

T **30.** Έστω $f(\theta) = \theta^3 - 2\theta + 2$.

(α) Δείξτε ότι η f έχει ένα σημείο μηδενισμού μεταξύ του -2 και του 0.

(β) Επιλύστε γραφικά την εξίσωση $f(\theta) = 0$ με μέγιστο επιτρεπόμενο σφάλμα 10^{-4} .

(γ) Μπορεί να δειχτεί ότι η ακριβής λύση της εξίσωσης του ερωτήματος (β) είναι

$$\left(\sqrt{\frac{19}{27}} - 1\right)^{1/3} - \left(\sqrt{\frac{19}{27}} + 1\right)^{1/3}$$

Υπολογίστε την τιμή της λύσης αυτής και συγκρίνετέ την με την απάντησή σας στο (β).

Επιπρόσθετες ασκήσεις: θεωρία, παραδείγματα, εφαρμογές

T **1.** *Ανάθεση τιμής στο 0^0* Σύμφωνα με τους κανόνες των εκθετών, $a^0 = 1$ για κάθε μη μηδενικό a· επίσης, $0^n = 0$ για κάθε θετικό n .

Αν επιχειρούσαμε να επεκτείνουμε τους κανόνες αυτούς στο 0^0, θα παίρναμε αντιφατικά αποτελέσματα. Ο πρώτος κανόνας δίνει $0^0 = 1$, ενώ ο δεύτερος δίνει $0^0 = 0$.

Δεν τίθεται θέμα ποιος από τους δύο κανόνες είναι σωστός και ποιος λάθος. Κανείς από τους δύο δεν ισχύει ως έχει, άρα δεν υπάρχει αντίφαση. Μάλιστα, θα μπορούσαμε να ορίσουμε ότι το 0^0 ισούται με όποιον αριθμό μάς κάνει κέφι, αρκεί να μπορούσαμε να πείσουμε και τους άλλους για την επιλογή μας.

Ποια τιμή θα θέλατε να δώσετε στο 0^0; Ενδεχομένως το ακόλουθο παράδειγμα να σας δώσει μια ιδέα. (Δείτε την Άσκηση 2 πιο κάτω για άλλο ένα παράδειγμα.)

(α) Υπολογίστε το x^x για $x = 0{,}1$, $0{,}01$, $0{,}001$, κ.ο.κ. μέχρι όπου φτάνει το κομπιουτεράκι σας. Καταγράψτε τις τιμές που πήρατε. Ποια χαρακτηριστική συμπεριφορά βλέπετε να διαμορφώνεται;

(β) Σχεδιάστε τη συνάρτηση $y = x^x$ για $0 < x \le 1$. Αν και η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x \le 0$, η γραφική παράσταση θα τείνει στον άξονα y από δεξιά. Σε ποια τιμή του y σας φαίνεται ότι συγκλίνει; Εστιάστε (σχεδιάζοντας την καμπύλη με μεγαλύτερη ανάλυση) για να υποστηρίξετε την άποψή σας.

T **2.** *Ένας λόγος που θα θέλατε το 0^0 να μην ισούται με 0 ή 1* Καθώς το x αυξάνεται παίρνοντας θετικές τιμές, οι αριθμοί $1/x$ και $1/(\ln x)$ τείνουν ταυτόχρονα στο μηδέν. Πώς συμπεριφέρεται ο αριθμός

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{1/(\ln x)}$$

καθώς το x αυξάνεται; Υπάρχουν δύο τρόποι να το διερευνήσετε:

(α) Υπολογίστε τις τιμές της f για $x = 10$, 100 , 1000 , κ.ο.κ. μέχρι όπου φτάνει το κομπιουτεράκι σας. Ποια χαρακτηριστική συμπεριφορά βλέπετε να διαμορφώνεται;

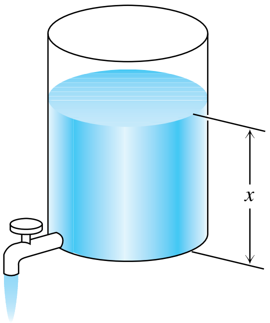
(β) Σχεδιάστε την f για διάφορες περιοχές σχεδίασης, φροντίζοντας σε μερικές από αυτές να περιλαμβάνεται η αρχή των αξόνων. Τι παρατηρείτε; Παρακολουθήστε την εξέλιξη των τιμών του y σε κάθε σχήμα. Τι συμπεραίνετε;

3. *Συστολή Lorentz* Σύμφωνα με τη θεωρία της σχετικότητας, το μήκος ενός σώματος, π.χ. ενός πυραύλου, όπως μετριέται από κάποιον παρατηρητή, δείχνει να εξαρτάται από την ταχύτητα του σώματος ως προς τον παρατηρητή. Έτσι, αν ο παρατηρητής μετρά το μήκος του ακίνητου πυραύλου ως L_0, τότε για ταχύτητα v το φαινόμενο μήκος θα είναι

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Η εξίσωση αυτή είναι ο τύπος συστολής μήκους του Lorentz. Εδώ, c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό, περίπου 3×10^8 m/sec. Τι παθαίνει το L καθώς αυξάνεται το v; Βρείτε το όριο $\lim_{v\to c^-} L$. Γιατί έπρεπε να πάρουμε το αριστερό όριο;

4. *Ελέγχοντας τη ροή μιας δεξαμενής που αδειάζει* Ο νόμος του Torricelli μάς λέει ότι αν αδειάσουμε μια δεξαμενή σαν κι αυτή που φαίνεται στο σχήμα, ο ρυθμός εκροής y του νερού ισούται με ένα σταθερό πολλαπλάσιο της τετραγωνικής ρίζας του ύψους x της στάθμης του νερού (δείτε το σχήμα). Η πολλαπλασιαστική σταθερά εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά (σχήμα και μέγεθος) της βαλβίδας εκροής.



Έστω ότι $y = \sqrt{x}/2$ για μια δεδομένη δεξαμενή. Επιθυμείτε να διατηρήσετε περίπου σταθερό τον ρυθμό εκροής προσθέτοντας περιοδικά νερό στη δεξαμενή με μια αντλία. Σε πόσο ύψος πρέπει να διατηρήσετε τη στάθμη του νερού αν ο επιθυμητός ρυθμός εκροής είναι

(α) $y_0 = 1$ m³/min με απόκλιση το πολύ 0,2 m³/min;

(β) $y_0 = 1$ m³/min με απόκλιση το πολύ 0,1 m³/min;

5. *Θερμική διαστολή σε εξοπλισμό ακριβείας* Όπως μάλλον γνωρίζετε, τα περισσότερα μέταλλα διαστέλλονται όταν θερμαίνονται και συστέλλονται όταν ψύχονται. Μερικές φορές οι διαστάσεις εργαστηριακών συσκευών πρέπει να είναι τόσο αυστηρά καθορισμένες, ώστε ακόμη και το εργοστάσιο που τις κατασκευάζει πρέπει να διατηρείται στην ίδια θερμοκρασία με αυτήν του εργαστηρίου που θα τις χρησιμοποιήσει. Μια συνήθης ράβδος αλουμινίου πλάτους 10 cm στους 20°C, θα έχει πλάτος

$$y = 10 + (t - 20) \times 10^{-4}$$

εκατοστά σε μια παραπλήσια θερμοκρασία t. Έστω ότι χρησιμοποιείτε μια τέτοια ράβδο σε έναν ανιχνευτή βαρυτικών κυμάτων, όπου η επιτρεπόμενη απόκλιση από το ιδανικό πλάτος των 10 cm είναι 0,0005 cm. Πόσο κοντά στην τιμή $t_0 = 20$°C πρέπει να διατηρήσετε τη θερμοκρασία για να μην υπερβεί τις καθορισμένες διαστάσεις διαστελλόμενη η ράβδος;

6. *Μάθετε γράφοντας:* Έχουμε λόγο να πιστεύουμε ότι θα πρέπει να υπάρχει πάντα ένα ζεύγος διαμετρικά αντίθετων σημείων στον ισημερινό της Γης, των οποίων οι θερμοκρασίες θα είναι οι ίδιες; Εξηγήστε την άποψή σας.

T **7.** *Ρίζες δευτεροβάθμιας εξίσωσης που είναι σχεδόν γραμμική* Η εξίσωση $ax^2 + 2x - 1 = 0$, όπου a είναι σταθερά, έχει δύο ρίζες αν $a > -1$ και $a \neq 0$, μια θετική και μια αρνητική:

$$r_+(a) = \frac{-1 + \sqrt{1+a}}{a}, \qquad r_-(a) = \frac{-1 - \sqrt{1+a}}{a}.$$

(α) Τι θα συμβεί στην $r_+(a)$ καθώς $a \to 0$; Καθώς $a \to -1^+$;

(β) Τι θα συμβεί στην $r_-(a)$ καθώς $a \to 0$; Καθώς $a \to -1^+$;

(γ) Επιβεβαιώστε τις παραπάνω απαντήσεις σας σχεδιάζοντας τις $r_+(a)$ και $r_-(a)$ ως συναρτήσεις του a. Περιγράψτε τι βλέπετε.

(δ) Για περαιτέρω κατοχύρωση, σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα πέντε εκδοχές της $f(x) = ax^2 + 2x - 1$, δηλαδή για $a = 1$, $0{,}5$, $0{,}2$, $0{,}1$, και $0{,}05$.

8. *Πλευρικά όρια* Αν $\lim_{x\to 0^+} f(x) = A$ και $\lim_{x\to 0^-} f(x) = B$, να βρεθούν τα:

(α) $\lim_{x\to 0^+} f(x^3 - x)$

(β) $\lim_{x\to 0^-} f(x^3 - x)$

(γ) $\lim_{x\to 0^+} f(x^2 - x^4)$

(δ) $\lim_{x\to 0^-} f(x^2 - x^4)$

9. *Όρια και συνέχεια* Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν, και ποιες όχι; Αν αληθεύουν, πείτε γιατί. Αν όχι, δώστε ένα αντιπαράδειγμα (δηλαδή, ένα παράδειγμα που επιβεβαιώνει το ψευδές τους).

(α) Αν υπάρχει το $\lim_{x\to a} f(x)$ αλλά δεν υπάρχει το $\lim_{x\to a} g(x)$, τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$.

(β) Αν δεν υπάρχει ούτε το $\lim_{x\to a} (f(x)$ ούτε το $\lim_{x\to a} g(x)$, τότε και το $\lim_{x\to a}\ f(x) + g(x))$ δεν υπάρχει.

(γ) Αν η f είναι συνεχής στο x, τότε και η $|f|$ είναι συνεχής.

(δ) Αν η $|f|$ είναι συνεχής στο a, τότε και η f είναι συνεχής.

10. *Ρίζα εξίσωσης* Δείξτε ότι η εξίσωση $x + 2\cos x = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Αυστηρός ορισμός του ορίου

Στις Ασκήσεις 11-14, χρησιμοποιήστε τον αυστηρό ορισμό του ορίου για να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0.

11. $f(x) = x^2 - 7, \quad x_0 = 1$

12. $g(x) = 1/(2x), \quad x_0 = 1/4$

13. $h(x) = \sqrt{2x - 3}, \quad x_0 = 2$

14. $F(x) = \sqrt{9 - x}, \quad x_0 = 5$

15. *Συνάρτηση συνεχής μόνο σε ένα σημείο* Έστω

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος.} \end{cases}$$

(α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

(β) Βάσει του γεγονότος ότι κάθε μη κενό ανοιχτό διάστημα πραγματικών αριθμών περιέχει τόσο ρητούς όσο και άρρητους αριθμούς, δείξτε ότι η f είναι ασυνεχής για κάθε x διάφορο του μηδενός.

16. *Η συνάρτηση Dirichlet* Κάθε ρητός αριθμός x μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως πηλίκο ακεραίων m/n, όπου $n > 0$ και οι m και n δεν έχουν κοινούς παράγοντες πλην της μονάδας. (Λέμε τότε ότι το κλάσμα αυτό είναι ανάγωγο. Για παράδειγμα, ο $6/4$ γράφεται ως $3/2$.) Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται για κάθε x στο διάστημα $[0, 1]$ ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} 1/n & \text{αν } x = m/n \text{ ρητό ανάγωγο κλάσμα} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος.} \end{cases}$$

Για παράδειγμα, $f(0) = f(1) = 1$, $f(1/2) = 1/2$, $f(1/3) = f(2/3) = 1/3$, $f(1/4) = f(3/4) = 1/4$, κ.ο.κ.

(α) Δείξτε ότι η f είναι ασυνεχής σε κάθε ρητό αριθμό στο διάστημα $[0, 1]$.

(β) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε άρρητο αριθμό στο διάστημα $[0, 1]$. (*Υπόδειξη*: Αν ϵ είναι ένας δοσμένος θετικός αριθμός, δείξτε ότι υπάρχει μόνο πεπερασμένο πλήθος ρητών αριθμών r στο $[0, 1]$ τέτοιοι ώστε $f(r) \geq \epsilon$.)

(γ) Παραστήστε γραφικά την f.

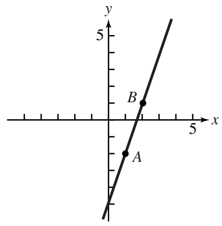
Απαντήσεις

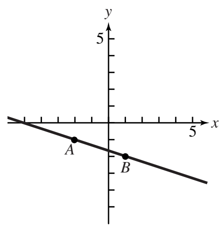
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0

Ενότητα 0.1, σελ. 7-10

1. **(α)** $\Delta x = -2$, $\Delta y = -3$ **(β)** $\Delta x = 2$, $\Delta y = -4$

3. **(α)** $m = 3$ **(β)** $m = -\frac{1}{3}$





5. **(α)** $x = 2, y = 3$ **(β)** $x = -1, y = \frac{4}{3}$

7. **(α)** $y = 1(x - 1) + 1$ **(β)** $y = -1(x + 1) + 1$

9. **(α)** $3x - 2y = 0$ **(β)** $y = 1$

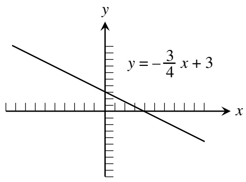
11. **(α)** $y = 3x - 2$ **(β)** $y = -x + 2$

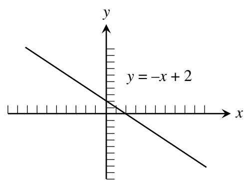
13. $y = \frac{5}{2}x$

15. **(α)** **(i)** Κλίση: $-\frac{3}{4}$ **(β)** **(i)** Κλίση: -1

(α) **(ii)** τεταγμένη y: 3 **(ii)** τεταγμένη y: 2

(α) **(iii)** **(β)** **(iii)**





17. **(α)** $y = -x$· $y = x$

(β) $y = -2x - 2$· $y = \frac{1}{2}x + 3$

19. $m = \frac{7}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$ **21.** $y = -1$

23. $y = 1(x - 3) + 4$

$y = x - 3 + 4$

$y = x + 1$, που είναι η ίδια εξίσωση.

25. **(α)** $k = 2$ **(β)** $k = -2$

27. 5,97 ατμόσφαιρες ($k = 0{,}0994$)

29. **(α)** Ναι, −40°F είναι το ίδιο με −40°C.

(β) Και οι τρεις ευθείες διέρχονται από το σημείο $(-40, -40)$.

33. **(α)** $y = \frac{B}{A}(x - a) + b$

(β) Οι συντεταγμένες του Q είναι $\left(\frac{B^2a + AC - ABb}{A^2 + B^2}, \frac{A^2b + BC - ABa}{A^2 + B^2}\right)$

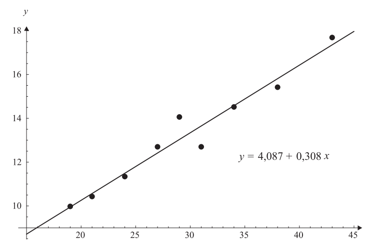
(γ) Απόσταση $= \frac{|Aa + Bb - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

35. 11,5 m

37. **(α)** $y = 4{,}087 + 0{,}308\,x$

(β) Η κλίση είναι 0,308. Αντιπροσωπεύει την κατά προσέγγιση μέση αύξηση βάρους σε kg ανά μήνα.

(γ)



(δ) 13,33 kg

39. **(α)** $y = 5632x - 11.080.280$

(β) Ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται η μέση τιμή σε δολάρια κατ' έτος

(γ) $y = 2732x - 5.362.360$

(δ) Στις βορειοανατολικές πολιτείες

Ενότητα 0.2, σελ. 20-24

1. $A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$, $p = 3x$

3. $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$, $A = 2d^2$, $V = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$

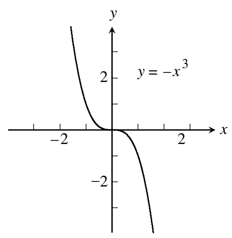
5. **(α)** Δεν είναι συνάρτηση του x διότι σε μερικές τιμές του x αντιστοιχούν δύο τιμές του y

(β) Είναι συνάρτηση του x διότι σε κάθε x αντιστοιχεί μία μόνο τιμή του y

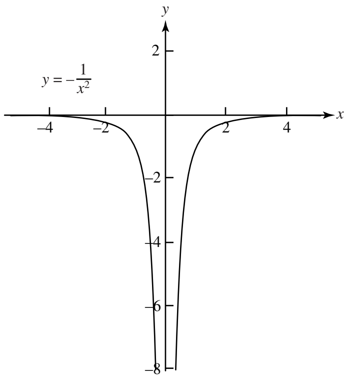
7. **(α)** D: $(-\infty, \infty)$, R: $[1, \infty)$ **(β)** D: $[0, \infty)$, R: $(-\infty, 1]$

9. D: $[-2, 2]$, R: $[0, 2]$

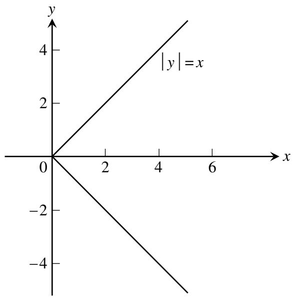
11. **(α)** Συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων



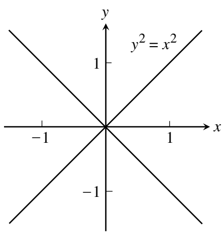
(β) Συμμετρική ως προς τον άξονα y



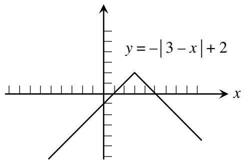
13. (α) Σε κάθε θετική τιμή του x, αντιστοιχούν δύο τιμές του y.

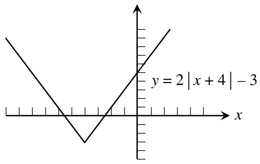


(β) Σε κάθε $x \neq 0$, αντιστοιχούν δύο τιμές του y.

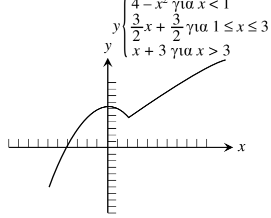


15. (α) Άρτια **(β)** Περιττή
17. (α) Περιττή **(β)** Άρτια
19. (α) Τίποτα από τα δύο **(β)** Άρτια
21. (α) Πεδίο ορισμού = το σύνολο των πραγματικών, πεδίο τιμών = $(-\infty, 2]$
(β) Πεδίο ορισμού = το σύνολο των πραγματικών, πεδίο τιμών = $[-3, \infty)$





23. (α)



(β) Το σύνολο των πραγματικών
(γ) Το σύνολο των πραγματικών

25. Διότι αν ισχύει το κριτήριο της κατακορύφου, τότε σε κάθε τετμημένη x αντιστοιχεί το πολύ μία τεταγμένη y σημείου της καμπύλης. Η τεταγμένη αυτή είναι η τιμή που αναθέτει η συνάρτηση στο x, και συνεπώς η ανάθεση τιμών είναι μοναδική.

27. (α) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ -x + 2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

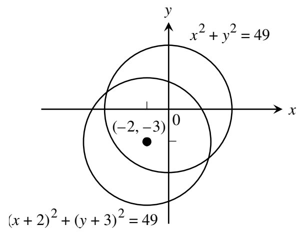
(β) $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x < 2 \\ 2, & 2 \le x < 3 \\ 0, & 3 \le x \le 4 \end{cases}$

(γ) $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & 0 < x \le 2 \\ -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}, & 2 < x \le 5 \end{cases}$

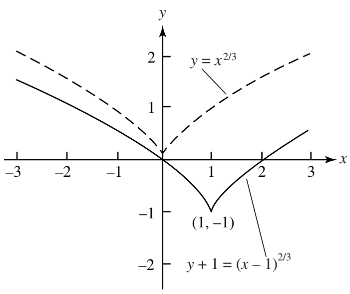
(δ) $f(x) = \begin{cases} -3x - 3, & -1 < x \le 0 \\ -2x + 3, & 0 < x \le 2 \end{cases}$

29. (α) Θέση 4 **(β)** Θέση 1
(γ) Θέση 2 **(δ)** Θέση 3

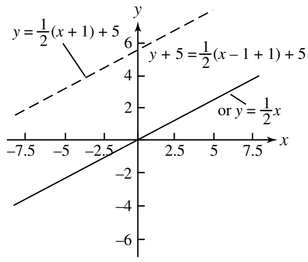
31. $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$



33. $y + 1 = (x - 1)^{2/3}$



35. $y = \frac{1}{2}x$



37. (α) 2 **(β)** 22 **(γ)** $x^2 + 2$ **(δ)** $x^2 + 10x + 22$
(ε) 5 **(στ)** -2 **(ζ)** $x + 10$ **(η)** $x^4 - 6x^2 + 6$

39. (α) $\frac{4}{x^2} - 5$ **(β)** $\frac{4}{x^2} - 5$ **(γ)** $\left(\frac{4}{x} - 5\right)^2$

(δ) $\left(\dfrac{1}{4x-5}\right)^2$ **(ε)** $\dfrac{1}{4x^2-5}$ **(στ)** $\dfrac{1}{(4x-5)^2}$

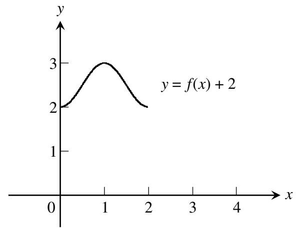
41. **(α)** $g(f(x))$ **(β)** $j(g(x))$ **(γ)** $g(g(x))$

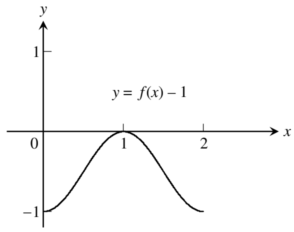
(δ) $j(j(x))$ **(ε)** $g(h(f(x)))$ **(στ)** $h(j(f(x)))$

43. **(α)** $g(x) = x^2$ **(β)** $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ **(γ)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

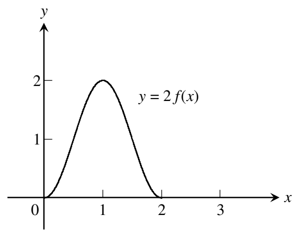
(δ) $f(x) = x^2$ (Προσοχή: Το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης είναι $[0, \infty)$.)

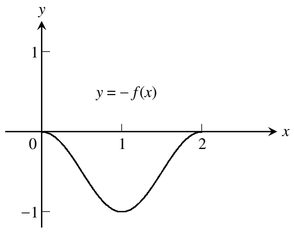
45. **(α)** D: $[0, 2]$, R: $[2, 3]$ **(β)** D: $[0, 2]$, R: $[-1, 0]$



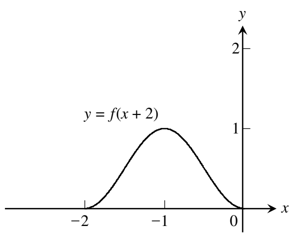


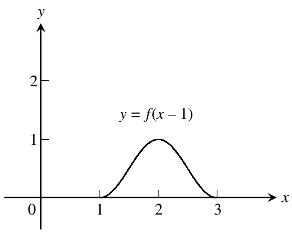
(γ) D: $[0, 2]$, R: $[0, 2]$ **(δ)** D: $[0, 2]$, R: $[-1, 0]$



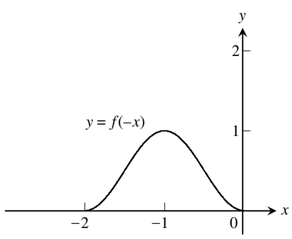


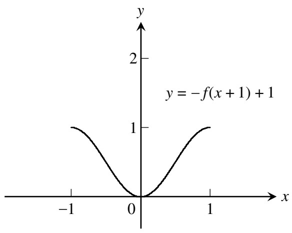
(ε) D: $[-2, 0]$, R: $[0, 1]$ **(στ)** D: $[1, 3]$, R: $[0, 1]$





(ζ) D: $[-2, 0]$, R: $[0, 1]$ **(η)** D: $[-1, 1]$, R: $[0, 1]$





47. **(α)** Διότι η περιφέρεια του αρχικού κύκλου ήταν 8π προτού της αφαιρέσουμε τμήμα μήκους x

(β) $r = \dfrac{8\pi - x}{2\pi} = 4 - \dfrac{x}{2\pi}$

(γ) $h = \sqrt{16 - r^2} = \dfrac{\sqrt{16\pi x - x^2}}{2\pi}$

(δ) $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{(8\pi - x)^2\sqrt{16\pi x - x^2}}{24\pi^2}$

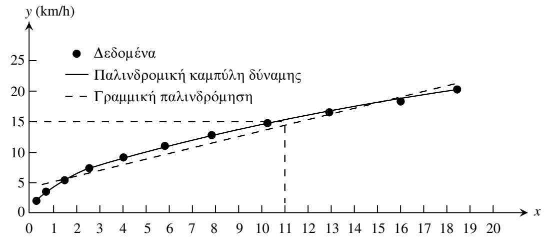
49. **(α)** Ναι. Εφόσον $(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$, η συνάρτηση $(f \cdot g)(x)$ θα είναι επίσης άρτια.

(β) Το γινόμενο είναι άρτια συνάρτηση, εφόσον $(f \cdot g)(-x) = (f \cdot g)(x)$.

53. **(δ)** $(g \circ f)(x) = \sqrt{4 - x^2}$· $D(g \circ f) = [-2, 2]$· $R(g \circ f) = [0, 2]$ $(f \circ g)(x) = 4 - (\sqrt{x})^2 = 4 - x$ for $x \geq 0$· $D(f \circ g) = [0, \infty)$· $R(f \circ g) = (-\infty, 4]$

55. **(α)** $y = 4{,}44647x^{0{,}511414}$

(β)



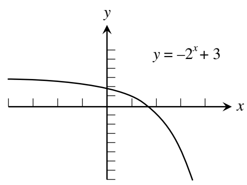
(γ) 15 km/h

(δ) 14 km/h, $y = 0{,}913695x + 4{,}189976$· η παλινδρομική καμπύλη δύναμης του ερωτήματος (α) ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα.

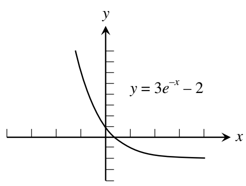
Ενότητα 0.3, σελ. 29-31

1. (α) **3.** (ε) **5.** (β)

7. Πεδίο ορισμού: το σύνολο των πραγματικών, πεδίο τιμών: $(-\infty, 3)$, τετμημένη x: $\approx 1{,}585$, τεταγμένη y: 2



9. Πεδίο ορισμού: το σύνολο των πραγματικών, πεδίο τιμών: $(-2, \infty)$, τετμημένη x: $\approx 0{,}405$, τεταγμένη y: 1



11. 3^{4x} **13.** 2^{-6x}

15.

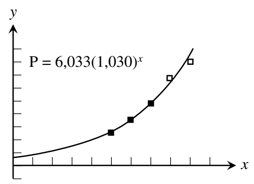
x	y	Δy
1	−1	
		2
2	1	
		2
3	3	
		2
4	5	

17.

x	y	Δy
1	1	
		3
2	4	
		5
3	9	
		7
4	16	

19. Αν οι μεταβολές του x είναι σταθερές για μια γραμμική συνάρτηση, δηλαδή $\Delta x = c$, τότε οι μεταβολές του y θα είναι επίσης σταθερές, και μάλιστα, $\Delta y = mc$.

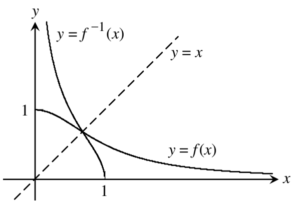
21. $a = 3, k = 1{,}5$
23. $x \approx 2{,}3219$
25. $x \approx -0{,}6309$
27. 7609,7 εκατομμύρια
29. Μετά από 19 έτη
31. **(α)** $A(t) = 6{,}6\left(\frac{1}{2}\right)^{t/14}$
(β) Περίπου μετά από 38 ημέρες
33. $\approx 11{,}433$ έτη
35. $\approx 11{,}090$ έτη
37. $\approx 19{,}108$ έτη
39. $2^{48} \approx 2{,}815 \times 10^{14}$
41. **(α)** Παλινδρομική εξίσωση: $P(x) = 6{,}033(1{,}030)^x$, όπου το $x = 0$ αντιστοιχεί στο 1900



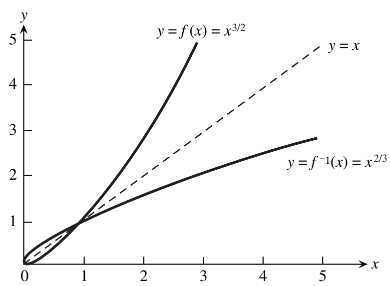
(β) Περίπου 6,03 εκατομμύρια, που δεν προσεγγίζει ιδιαίτερα επιτυχώς τον πραγματικό πληθυσμό
(γ) Ο ετήσιος ρυθμός αύξησης είναι περίπου 3%.

Ενότητα 0.4, σελ. 41-43

1. Ένα προς ένα (1–1)
3. Δεν είναι ένα προς ένα
5. Ένα προς ένα (1–1)
7. D: (0, 1], R: [0, ∞)

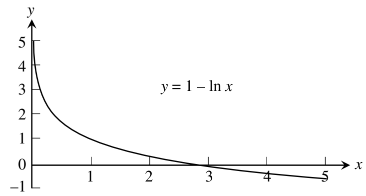


9. $D(f^{-1}) = [0, \infty)\cdot R(f^{-1}) = [0, \infty)$

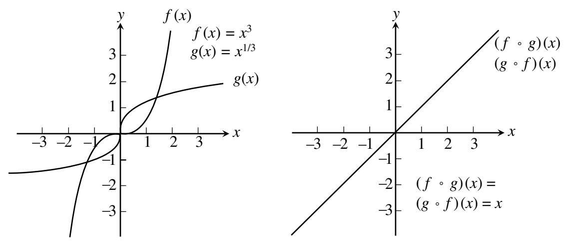


11. $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$
13. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 1}$
15. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$
17. $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 3}{2}$
19. $f^{-1}(x) = (x + 1)^{1/3}$ δηλαδή $\sqrt[3]{x + 1}$
21. $f^{-1}(x) = -x^{1/2}$ δηλαδή $-\sqrt{x}$
23. $f^{-1}(x) = 2 - (-x)^{1/2}$ δηλαδή $2 - \sqrt{-x}$
25. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x^{1/2}}$ δηλαδή $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
27. $f^{-1}(x) = \dfrac{1 - 3x}{x - 2}$
29. $y = e^{x \ln 3} - 1$
(α) $D = (-\infty, \infty)$
(β) $R = (-1, \infty)$

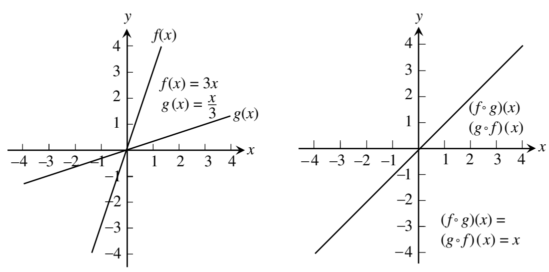
31. $y = 1 - \ln x$
(α) $D = (0, \infty)$
(β) $R = (-\infty, \infty)$
(γ)



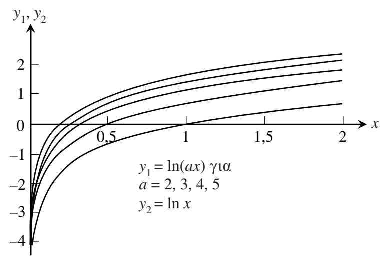
33. $t = \ln 2 / \ln 1{,}045 \approx 15{,}75$
35. $x = \ln\left(\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) \approx -0{,}96$ ή 0,96
37. $y = e^{2t+4}$
39. **(α)** $f^{-1}(x) = \log_2\left(\dfrac{x}{100 - x}\right)$
(β) $f^{-1}(x) = \log_{1,1}\left(\dfrac{x}{50 - x}\right)$
41. **(α)** Ποσότητα $= 8\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/12}$
(β) 36 ώρες
43. $\approx 44{,}081$ έτη
45. 10 db
47. (4, 5)
49. **(α)** (1,58, 3)
(β) Δεν υπάρχει σημείο τομής
51. Οι f και g είναι αντίστροφες η μία της άλλης εφόσον $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.
(α) **(β)** και **(γ)**



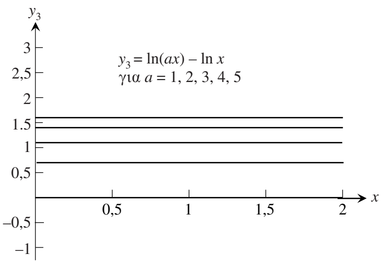
53. Οι f και g είναι αντίστροφες η μία της άλλης εφόσον $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.
(α) **(β)** και **(γ)**



55. **(α)** Τα γραφήματα των y_1, δείχνουν να είναι κατακόρυφες μετατοπίσεις των γραφημάτων των y_2.



(β)

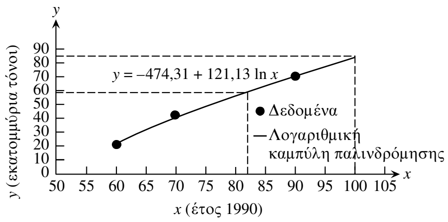


(γ) $y_3 = y_1 - y_2 = \ln ax - \ln x = (\ln a + \ln x) - \ln x = \ln a$, a σταθερά.

57. $x \approx -0{,}76666$

59. **(α)** $y(x) = -474{,}31 + 121{,}13 \ln x$· 59,48 εκατομμύρια τόνοι παρήχθησαν το 1982 και 83,51 εκατομμύρια τόνοι παρήχθησαν το 2000

(β)



(γ) $y(82) \approx 59$ και $y(100) \approx 84$

Ενότητα 0.5, σελ. 55-59

1. **(α)** 8π m **(β)** $\frac{55\pi}{9}$ m

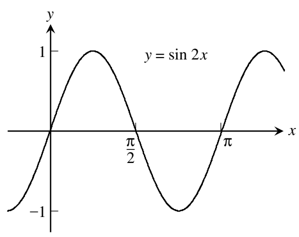
3.

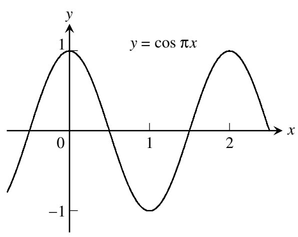
θ	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\sin\theta$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\theta$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\tan\theta$	0	$\sqrt{3}$	0	ΑΟΡ	-1
$\cot\theta$	ΑΟΡ	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	ΑΟΡ	0	-1
$\sec\theta$	-1	-2	1	ΑΟΡ	$-\sqrt{2}$
$\csc\theta$	ΑΟΡ	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	ΑΟΡ	1	$\sqrt{2}$

5. **(α)** $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\tan x = -\frac{3}{4}$

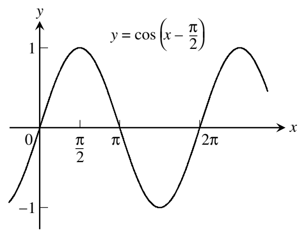
(β) $\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan x = -2\sqrt{2}$

7. **(α)** Περίοδος π **(β)** Περίοδος 2

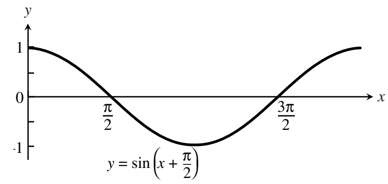




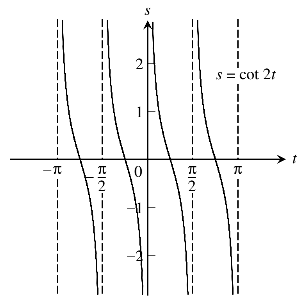
9. **(α)** Περίοδος 2π



(β) Περίοδος 2π

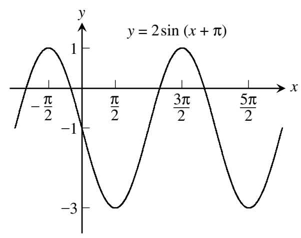


11. Περίοδος $\frac{\pi}{2}$, συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων

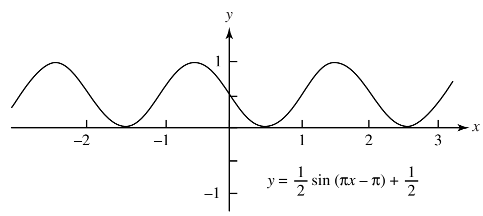


13. **(α)** $-\cos x$ **(β)** $-\sin x$

19. **(α)** $A = 2, B = 2\pi, C = -\pi, D = -1$



(β) $A = \frac{1}{2}, B = 2, C = 1, D = \frac{1}{2}$



21. **(α)** 20,5 **(β)** 365
(γ) Δεξιά 101 **(δ)** Κάτω 3,8

23. **(α)** $\frac{\pi}{4}$ **(β)** $-\frac{\pi}{3}$ **(γ)** $\frac{\pi}{6}$

25. **(α)** $\frac{\pi}{3}$ **(β)** $\frac{3\pi}{4}$ **(γ)** $\frac{\pi}{6}$

37. **(α)** $c = \sqrt{7} \approx 2{,}646$ **(β)** $c \approx 1{,}951$

39. **(α)** Οι τιμές του $\sin x$ προσεγγίζουν τις τιμές του x. Για $x = 0$, και οι δύο συναρτήσεις μηδενίζονται.
(β) Και οι δύο συναρτήσεις τείνουν στο μηδέν, αλλά

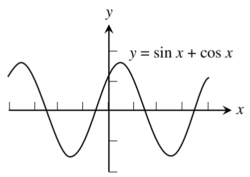
για κάθε x διάφορο του μηδενός, η τιμή του $\sin x$ είναι μικρό κλάσμα της τιμής του x.

41. (α) Πεδίο ορισμού: όλοι οι πραγματικοί αριθμοί εκτός όσων έχουν τη μορφή $\frac{\pi}{2} + k\pi$, όπου k ακέραιος· πεδίο τιμών: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

(β) Πεδίο ορισμού: $-\infty < x < \infty$· πεδίο τιμών: $-\infty < y < \infty$

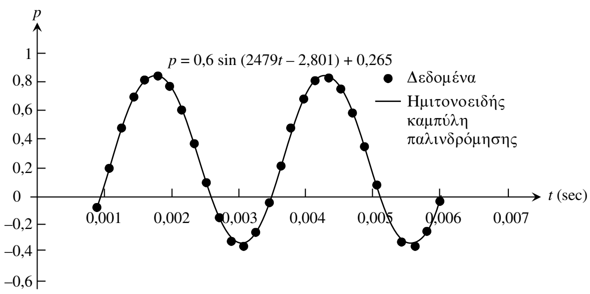
43. $x \approx 1{,}190$ και $x \approx 4{,}332$ **45.** $x \approx -1{,}911$ και $x \approx 1{,}911$

47. (α)



(β) Πλάτος $\approx 1{,}414$, περίοδος $= 2\pi$, οριζόντια μετατόπιση $\approx -0{,}785$ ή $5{,}498$ σε σχέση με το $\sin x$, κατακόρυφη μετατόπιση: 0

49. (α) $p = 0{,}6 \sin(2479t - 2{,}801) + 0{,}265$



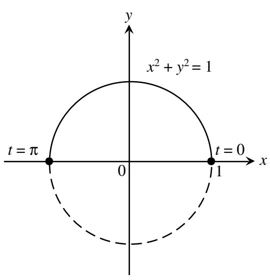
(β) ≈ 395 Hz

51. (α) $y = 3{,}0014 \sin(0{,}9996x + 2{,}0012) + 2{,}9999$

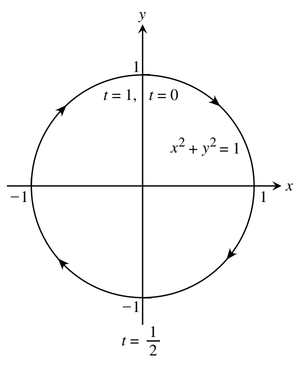
(β) $y = 3 \sin(x + 2) + 3$

Ενότητα 0.6, σελ. 65-67

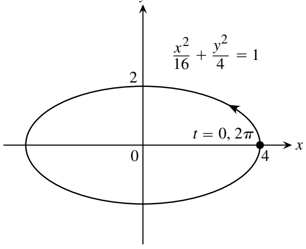
1.



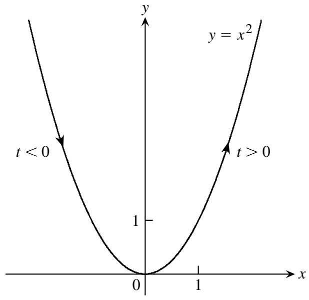
3.



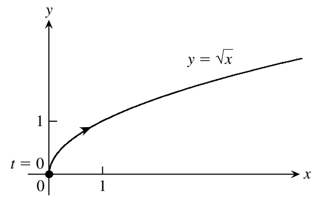
5.



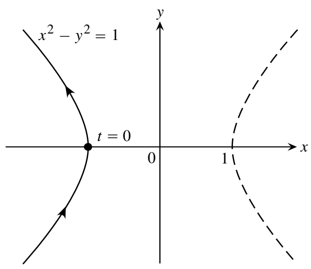
7.



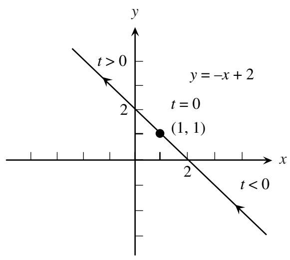
9.



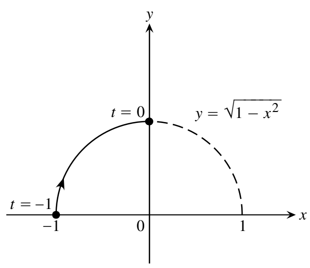
11.



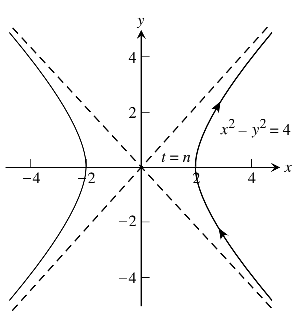
13.



15.



17.



19. (α) $x = a \cos t$, $y = -a \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$

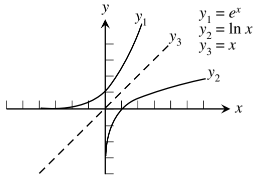
(β) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$

(γ) $x = a \cos t$, $y = -a \sin t$, $0 \le t \le 4\pi$

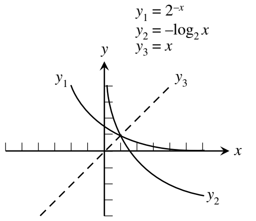
(δ) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \le t \le 4\pi$

21. Πιθανή απάντηση: $x = -1 + 5t,\ y = -3 + 4t,\ 0 \le t \le 1$
23. Πιθανή απάντηση: $x = t^2 + 1,\ y = t,\ t \le 0$
25. Πιθανή απάντηση: $x = 2 - 3t,\ y = 3 - 4t,\ t \ge 0$
27. Γραφική παράσταση (γ), Διαστάσεις: $[-4, 4]$ επί $[-3, 3]$, $0 \le t \le 2\pi$
29. Γραφική παράσταση (δ), Διαστάσεις: $[-10, 10]$ επί $[-10, 10]$, $0 \le t \le 2\pi$

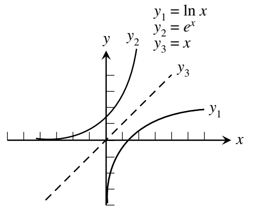
31.



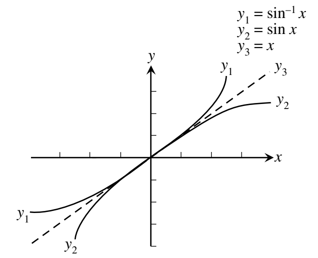
33.



35.



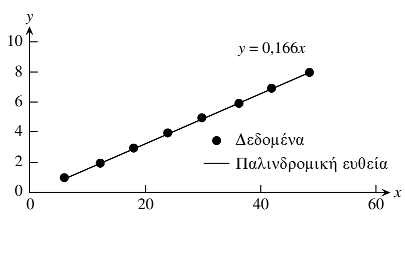
37.



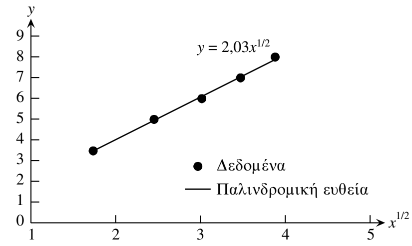
39. $1 < t < 3$ **41.** $-5 \le t < -3$
49. $x = 2 \cot t,\ y = 2 \sin^2 t,\ 0 < t < \pi$
51. **(α)** Η καμπύλη διατρέχεται από δεξιά προς αριστερά και εκτείνεται απεριόριστα από την αρχή των αξόνων και προς τις δύο κατευθύνσεις.

Ενότητα 0.7, σελ. 73-76

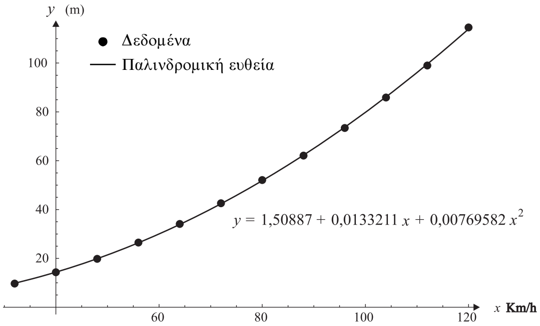
1. **(α)** Η γραφική παράσταση υποστηρίζει την υπόθεση ότι το y είναι ανάλογο του x. Η σταθερά αναλογίας εκτιμάται από την κλίση της παλινδρομικής ευθείας, που ισούται με 0,166.



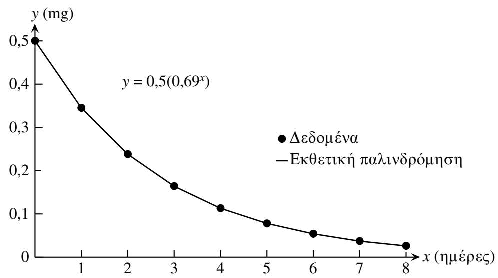
(β) Η γραφική παράσταση υποστηρίζει την υπόθεση ότι το y είναι ανάλογο του $x^{1/2}$. Η σταθερά αναλογίας εκτιμάται από την κλίση της παλινδρομικής ευθείας, που ισούται με 2,03.



3. Παλινδρόμηση με πολυώνυμο δευτέρου βαθμού μάς δίνει $y = 0{,}064555x^2 + 0{,}078422x + 4{,}88961$. Η καμπύλη παλινδρόμησης δύναμης προσαρμόζεται καλά στα δεδομένα.

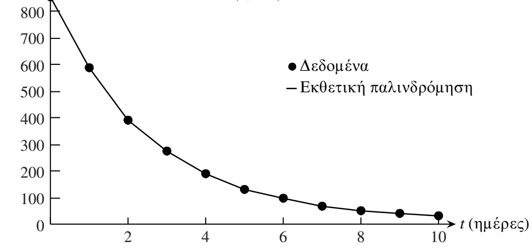


5. **(α)** Παλινδρόμηση με εκθετική συνάρτηση μάς δίνει $y = 0{,}5(0{,}69^x) = 0{,}5e^{-0{,}371x}$.



(β) Η εκθετική καμπύλη παλινδρόμησης προσαρμόζεται πολύ καλά στα δεδομένα.
(γ) Το μοντέλο προβλέπει ότι μετά από 12 ώρες, η ποσότητα διγοξίνης στο αίμα θα είναι λιγότερη από 0,006 mg.

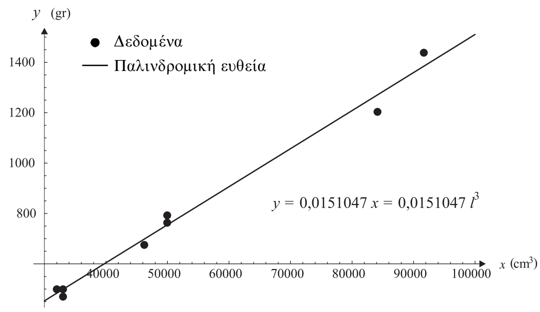
7. **(α)** Η εκθετική παλινδρόμηση μάς δίνει $C = 770(0{,}715^t) = 770e^{-0{,}336\,t}$.



(β) Η εκθετική συνάρτηση δείχνει να αποδίδει πιστά την τάση που εμφανίζουν τα πειραματικά δεδομένα.

(γ) Το μοντέλο προβλέπει ότι η συγκέντρωση φαρμακευτικής ουσίας στο αίμα θα πέσει κάτω από 10 ppm μετά από 12 ημέρες και 22 ώρες.

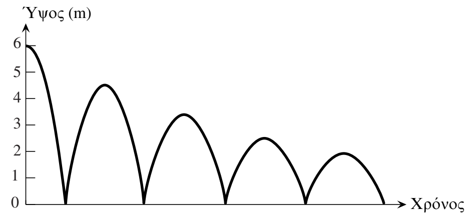
9. Η κλίση της παλινδρομικής ευθείας είναι 0,008435, και άρα το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει το βάρος συναρτήσει του l είναι $w = 0{,}008435l^3$.



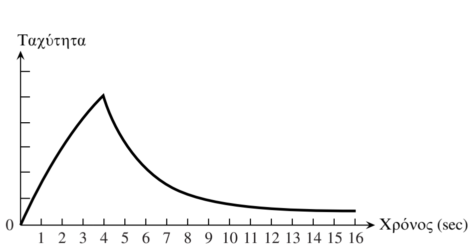
11. Γράφημα (γ) **13.** Γράφημα (γ)

15. **(στ)** Μία πιθανότητα είναι η εξής: Έστω y το πλήθος των ατόμων στη σχολή σας που έχουν αρρωστήσει από γρίππη και έστω x ο αριθμός των ημερών που πέρασαν από τότε που εκδήλωσε συμπτώματα ο πρώτος ασθενής. Στην αρχή, η γρίππη δεν μεταδίδεται πολύ γρήγορα διότι υπάρχουν λίγα μολυσμένα άτομα για να τη μεταδώσουν. Αλλά καθώς αρρωσταίνουν όλο και περισσότεροι, η ασθένεια εξαπλώνεται ταχύτερα. Η ταχύτερη εξάπλωση προκύπτει όταν ο μισός πληθυσμός έχει αρρωστήσει, διότι τότε υπάρχουν πολλοί ασθενούντες για να μεταδώσουν τη γρίππη αλλά και πολλοί υγιείς ακόμα που μπορούν να μολυνθούν από τον ιό. Καθώς ο χρόνος περνά και όλο και περισσότερα άτομα αρρωσταίνουν, υπάρχουν όλο και λιγότερα άτομα «διαθέσιμα προς μόλυνση» κι έτσι η εξάπλωση της ασθενειας αρχίζει να επιβραδύνεται. Η συμπεριφορά αυτή μπορεί να περιγραφεί με μια συνάρτηση όπως αυτή που δείχνεται στο σχήμα (στ).

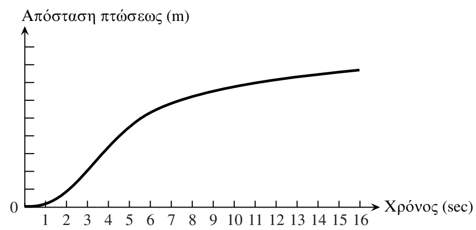
17.



19. **(α)**



(β)



21. **(α)** Η γραφική αυτή παράσταση θα μπορούσε να παριστάνει τη γωνία που σχηματίζει με την κατακόρυφο ένα εκκρεμές καθώς κινείται πέρα δώθε. Η μεταβλητή y παριστάνει τη γωνία ενώ η x παριστάνει τον χρόνο. Λόγω τριβής, το πλάτος της ταλάντωσης φθίνει, όπως φαίνετα στο σχήμα. Όταν το y είναι θετικό, το εκκρεμές βρίσκεται στη μία πλευρά της κατακορύφου, ενώ όταν το y είναι αρνητικό, το εκκρεμές βρίσκεται στην άλλη πλευρά.

(β) Η γραφική αυτή παράσταση θα μπορούσε να παριστάνει τη γωνία που σχηματίζει με την κατακόρυφο η κούνια παιδικής χαράς, καθώς το παιδί που κάθεται σε αυτήν κουνά τα πόδια του ρυθμικά για να αποκτήσει ώθηση. Η μεταβλητή y παριστάνει τη γωνία ενώ η x παριστάνει τον χρόνο. Επειδή το παιδί προσδίδει μηχανική ενέργεια στο σύστημα (κούνια + παιδί), το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνεται με τον χρόνο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Όταν το y είναι θετικό, η κούνια βρίσκεται στη μία πλευρά της κατακορύφου, ενώ ενώ όταν το y είναι αρνητικό, η κούνια βρίσκεται στην άλλη πλευρά.

Ασκήσεις Κεφαλαίου 0, σελ. 77-80

1. $y = 3x - 9$ **3.** $x = 0$

5. $y = 2$ **7.** $y = -3x + 3$

9. $y = -\dfrac{4}{3}x - \dfrac{20}{3}$ **11.** $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{8}{3}$

13. $A = \pi r^2$, $C = 2\pi r$, $A = \dfrac{C^2}{4\pi}$ **15.** $x = \tan\theta$, $y = \tan^2\theta$

17. Ως προς την αρχή **19.** Ως προς τίποτα από τα δύο

21. Άρτια **23.** Άρτια

25. Περιττή **27.** Τίποτα από τα δύο

29. **(α)** Πεδίο ορισμού: το σύνολο των πραγματικών
(β) Πεδίο τιμών: $[-2, \infty)$

31. **(α)** Πεδίο ορισμού: $[-4, 4]$
(β) Πεδίο τιμών: $[0, 4]$

33. **(α)** Πεδίο ορισμού: το σύνολο των πραγματικών
(β) Πεδίο τιμών: $(-3, \infty)$

35. **(α)** Πεδίο ορισμού: το σύνολο των πραγματικών
(β) Πεδίο τιμών: $[-3, 1]$

37. **(α)** Πεδίο ορισμού: $(3, \infty)$
(β) Πεδίο τιμών: το σύνολο των πραγματικών

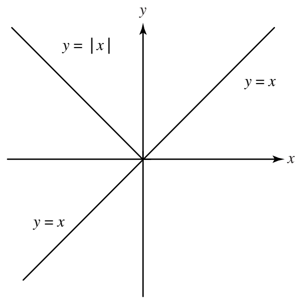
39. **(α)** Πεδίο ορισμού: $[-4, 4]$
(β) Πεδίο τιμών: $[0, 2]$

41. $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

43. **(α)** 1
(β) $\dfrac{1}{\sqrt{2{,}5}} = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$
(γ) $x, x \neq 0$
(δ) $\dfrac{1}{\sqrt{1/\sqrt{x+2} + 2}}$

45. **(α)** $(f \circ g)(x) = -x, x \geq -2, (g \circ f)(x) = \sqrt{4 - x^2}$
(β) Πεδίο ορισμού $(f \circ g)$: $[-2, \infty)$, πεδίο ορισμού $(g \circ f)$: $[-2, 2]$
(γ) Πεδίο τιμών $(f \circ g)$: $(-\infty, 2]$, πεδίο τιμών $(g \circ f)$: $[0, 2]$

47. Αντικαθιστούμε το τμήμα της καμπύλης για $x < 0$ με το κατοπτρικό είδωλο του τμήματος για $x > 0$ έτσι ώστε το τελικό γράφημα γίνεται συμμετρικό ως προς τον άξονα y.



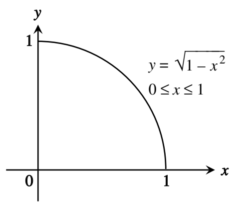
49. Η γραφική παράσταση δεν επηρεάζεται.

51. Προστίθεται το κατοπτρικό είδωλο του τμήματος για $x > 0$ έτσι ώστε το τελικό γράφημα γίνεται συμμετρικό ως προς τον άξονα y

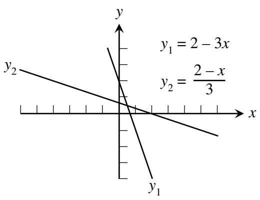
53. Κατοπτρίζεται το τμήμα της καμπύλης για $y < 0$ πάνω στον άξονα x

55. Κατοπτρίζεται το τμήμα της καμπύλης για $y < 0$ πάνω στον άξονα x

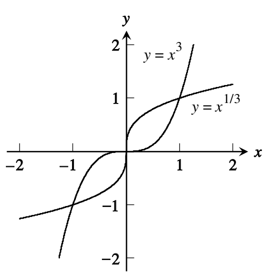
57. **(α)** Συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$



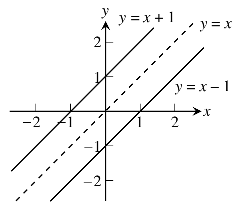
59. **(α)** $f^{-1}(x) = \dfrac{2 - x}{3}$
(β)



61. **(α)** $f(g(x)) = (\sqrt[3]{x})^3 = x, g(f(x)) = \sqrt[3]{x^3} = x$
(β)



63. **(α)** $f^{-1}(x) = x - 1$



(β) $f^{-1}(x) = x - b$. Το γράφημα της f^{-1} είναι μια ευθεία παράλληλη στο γράφημα της f. Τα γραφήματα των f και f^{-1} κείνται εκατέρωθεν της ευθείας $y = x$ από την οποία και ισαπέχουν.
(γ) Τα δύο γραφήματα είναι παράλληλα και κείνται εκατέρωθεν της ευθείας $y = x$ από την οποία και ισαπέχουν.

65. 2,718281828459

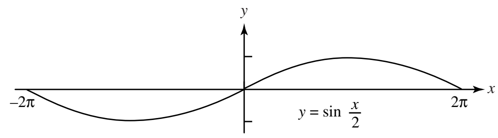
67. **(α)** 7,2
(β) $\dfrac{1}{x^2}$
(γ) $\dfrac{x}{y}$

69. **(α)** 1
(β) 1
(γ) $-x^2 - y^2$

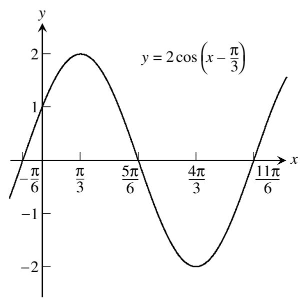
71. $\approx$ 0,6435 rad δηλ. 36,8699°

73. $\cos\theta = \dfrac{3}{7}, \sin\theta = \dfrac{\sqrt{40}}{7}, \tan\theta = \dfrac{\sqrt{40}}{3}, \sec\theta = \dfrac{7}{3},$
$\csc\theta = \dfrac{7}{\sqrt{40}}, \cot\theta = \dfrac{3}{\sqrt{40}}$

75. Περίοδος 4π



77.



79. **(α)** $a = 1 \cdot b = \sqrt{3}$
(β) $c = 4/\sqrt{3} \cdot a = 2/\sqrt{3}$

81. **(α)** $a = \dfrac{b}{\tan B}$ **(β)** $c = \dfrac{a}{\sin A}$

83. Εφόσον το $\sin(x)$ έχει περίοδο 2π, $(\sin(x + 2\pi))^3 = (\sin(x))^3$. Η συνάρτηση αυτή έχει περίοδο 2π. Η γραφική παράσταση μας πείθει ότι αυτή είναι η μικρότερη δυνατή περίοδος.

87. $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

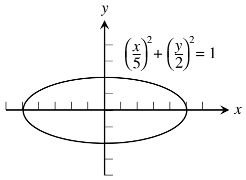
89. **(α)** $\dfrac{\pi}{6}$
(β) $-\dfrac{\pi}{4}$
(γ) $\dfrac{\pi}{3}$

91. **(α)** $\dfrac{\pi}{4}$
(β) $\dfrac{5\pi}{6}$
(γ) $\dfrac{\pi}{3}$

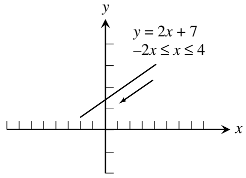
93. 2

95. $-\dfrac{1}{2}$ **97.** $\sqrt{4x^2 + 1}$ **99.** $\dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$

101. (α) Ορίζεται· υπάρχει γωνία εφαπτομένης 2.
(β) Δεν ορίζεται· δεν υπάρχει γωνία συνημιτόνου 2.
103. (α) Δεν ορίζεται· δεν υπάρχει γωνία τέμνουσας 0.
(β) Δεν ορίζεται· δεν υπάρχει γωνία ημιτόνου $\sqrt{2}$.
105. $\approx 16{,}98$ m **107. (β)** 4π
109. (α) $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$· όλη η καμπύλη
(β) Αρχικό σημείο: (5, 0), τελικό σημείο: (5, 0)



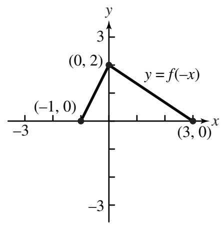
111. (α) $y = 2x + 7$· από (4, 15) έως $(-2, 3)$
(β) Αρχικό σημείο: (4, 15), τελικό σημείο: $(-2, 3)$



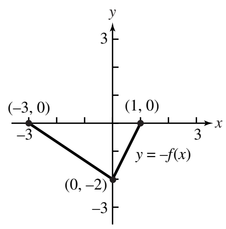
113. Πιθανή απάντηση: $x = -2 + 6t$, $y = 5 - 2t$, $0 \le t \le 1$
115. Πιθανή απάντηση: $x = 2 - 3t$, $y = 5 - 5t$, $0 \le t$

Επιπρόσθετες Ασκήσεις Κεφαλαίου 0, σελ. 80-83

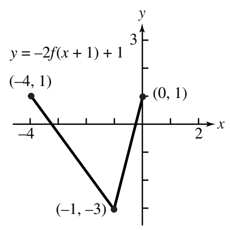
1. (α)



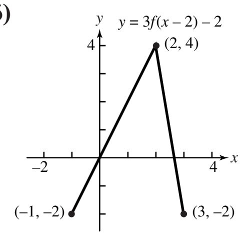
(β)



(γ)



(δ)



3. (α) $y = 100.000 - 10000x$, $0 \le x \le 10$
(β) Μετά από 4,5 έτη

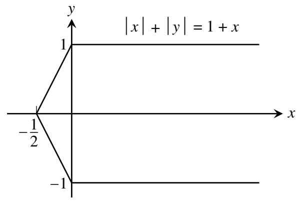
5. Μετά από $\dfrac{\ln\,(10/3)}{\ln\,1.08} \approx 15{,}6439$ έτη. (Αν η τράπεζα πληρώνει τον τόκο στο τέλος κάθε έτους, θα χρειαστούν 16 έτη.)

11. (α) Ναι
(β) Όχι πάντοτε. Αν η f είναι περιττή, τότε η h είναι περιττή.

13. Ναι. Για παράδειγμα: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ και $g(x) = \dfrac{1}{x}$, ή $f(x) = 2x$ και $g(x) = \dfrac{x}{2}$, ή $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$.

15. Αν η $f(x)$ είναι περιττή, τότε η $g(x) = f(x) - 2$ δεν είναι περιττή. Ούτε και η $g(x)$ είναι άρτια, εκτός αν $f(x) = 0$ για κάθε x. Αν η f είναι άρτια, τότε και η $g(x) = f(x) - 2$ είναι άρτια.

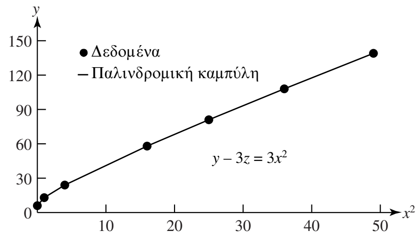
17.



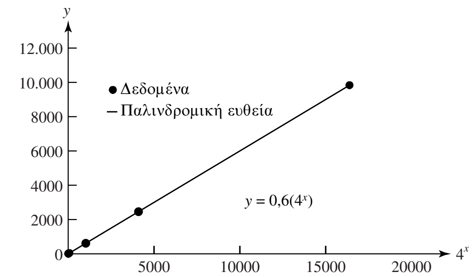
21. Αν η γραφική παράσταση της $f(x)$ ικανοποιεί το κριτήριο της οριζόντιας ευθείας, τότε και η $g(x) = -f(x)$ θα ικανοποιεί το κριτήριο, ως έχουσα το ίδιο γράφημα, απλώς κατοπτρισμένο ως προς τον άξονα x.

23. (α) Πεδίο ορισμού: το σύνολο των πραγματικών. Πεδίο τιμών: Αν $a > 0$, τότε (d, ∞)· αν $a < 0$, τότε $(-\infty, d)$.
(β) Πεδίο ορισμού: (c, ∞), πεδίο τιμών: το σύνολο των πραγματικών

25. (α) Η γραφική παράσταση δεν υποστηρίζει την υπόθεση $y \propto x^2$.



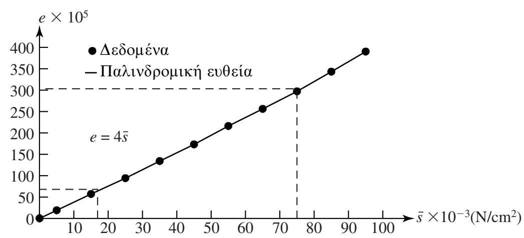
(β) Η γραφική παράσταση υποστηρίζει την υπόθεση $y \propto 4^x$. Η σταθερά αναλογίας μπορεί να εκτιμηθεί από την κλίση της παλινδρομικής ευθείας, που ισούται με 0,6· συνεπώς, $y = 0{,}6(4^x)$.



27. (α) Εφόσον η επιμήκυνση του ελατηρίου μηδενίζεται όταν η τάση είναι $5(10^{-3})(\text{N/cm}^2)$, τα δεδομένα θα πρέπει να τροποποιηθούν αφαιρώντας την ποσότητα αυτή από κάθε τιμή τάσης στον πίνακα. Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας, όπου $\bar{s} = s - 5(10^{-3})$.

Η κλίση της καμπύλης είναι $\dfrac{(297 - 57)(10^5)}{(75 - 15)(10^{-3})} = 4{,}00(10^8)$

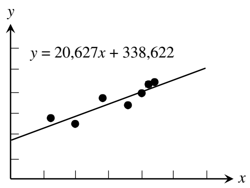
και το μοντέλο είναι
$e = 4(10^8)\bar{s}$ ή $e = 4(10^8)(s - 5(10^{-3}))$.



$\bar{s} \times 10^{-3}$	0	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
$e \times 10^5$	0	19	57	94	134	173	216	256	297	343	390

(β) Το μοντέλο προσαρμόζεται καλά στα δεδομένα.
(γ) $c = 780(10^5)$(cm/cm). Εφόσον η τιμή
$$s = 200(10^{-3})(\text{N/cm}^2)$$
πέφτει κατά πολύ έξω από το εύρος δεδομένων που χρησιμοποιήσαμε για το μοντέλο αυτό, δεν θα τρέφαμε τυφλή εμπιστοσύνη στην πρόβλεψη αυτή προτού κάνουμε περαιτέρω πειραματικές δοκιμές του ελατηρίου.

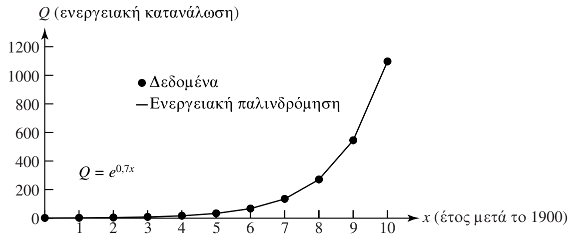
29. **(α)** $y = 20{,}627x + 338{,}622$



(β) Περίπου 957
(γ) Η κλίση ισούται με 20,627. Ο αριθμός αυτός αντιπροσωπεύει την κατά προσέγγιση ετήσια αύξηση του αριθμού των διδακτορικών διατριβών που εκπονήθηκαν από ισπανόφωνους Αμερικανούς κατ' έτος.

31. **(α)** $f(x) = 2{,}000268 \sin(2{,}999187x - 1{,}000966) + 3{,}999881$
(β) $f(x) = 2 \sin(3x - 1) + 4$

33. **(α)** $Q = 1{,}00(2{,}0138^x) = 1{,}00e^{0{,}7x}$



(β) Η κατανάλωση το 1996 ήταν 828,82. Ο ετήσιος ρυθμός αύξησης το έτος αυτό ήταν 7,25%.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ενότητα 1.1, σελ. 92-96

1. **(α)** 19 **(β)** 1

3. **(α)** $-\frac{4}{\pi}$ **(β)** $-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

5. Είναι δυνατόν, κατά τη διαδικασία της εκτύπωσης του βιβλίου, μερικές γραφικές παραστάσεις να έχουν μετατοπιστεί ως προς τους άξονες συντεταγμένων. Έτσι οι εκτιμήσεις σας μπορεί να μην συμπίπτουν απόλυτα με αυτές που παραθέτουμε εδώ.
(α)

PQ_1	PQ_2	PQ_3	PQ_4
43	46	49	50

Οι κατάλληλες μονάδες είναι μέτρα ανά δευτερόλεπτο.

(β) ≈ 50 m/sec δηλ. 180 km/h

7. Κάτω φράγμα: $a = 7{,}15$ m/sec, άνω φράγμα: $b = 8{,}8$ m/sec, $v(2) \approx \frac{a+b}{2} = 7{,}975$ m/sec

9. **(α)** Δεν υπάρχει. Καθώς το x τείνει στο 1 από δεξιά, η $g(x)$ τείνει στο 0. Καθώς το x τείνει στο 1 από αριστερά, η $g(x)$ τείνει στο 1. Δεν υπάρχει μοναδικός αριθμός L στον οποίο τείνουν απεριόριστα όλες οι τιμές της $g(x)$ καθώς $x \to 1$.
(β) 1
(γ) 0

11. **(α)** Αληθής **(β)** Αληθής **(γ)** Ψευδής **(δ)** Ψευδής **(ε)** Ψευδής **(στ)** Αληθής

13. Καθώς το x τείνει στο 0 από αριστερά, το $x/|x|$ τείνει στο -1. Καθώς το x τείνει στο 0 από δεξιά, το $x/|x|$ τείνει στο1. Δεν υπάρχει μοναδικός αριθμός L στον οποίο τείνουν απεριόριστα όλες οι τιμές της συναρτήσεως καθώς $x \to 0$.

15. Δεν μπορούμε να πούμε τίποτε.

17. Όχι

19. **(α)** $f(x) = (x^2 - 9)/(x + 3)$

x	$-3{,}1$	$-3{,}01$	$-3{,}001$	$-3{,}0001$	$-3{,}00001$	$-3{,}000001$
$f(x)$	$-6{,}1$	$-6{,}01$	$-6{,}001$	$-6{,}0001$	$-6{,}00001$	$-6{,}000001$

x	$-2{,}9$	$-2{,}99$	$-2{,}999$	$-2{,}9999$	$-2{,}99999$	$-2{,}999999$
$f(x)$	$-5{,}9$	$-5{,}99$	$-5{,}999$	$-5{,}9999$	$-5{,}99999$	$-5{,}999999$

(γ) $\lim_{x \to -3} f(x) = -6$

21. **(α)** $G(x) = (x + 6)/(x^2 + 4x - 12)$

x	$-5{,}9$	$-5{,}99$	$-5{,}999$
$G(x)$	$-0{,}126582$	$-0{,}1251564$	$-0{,}1250156$

x	$-5{,}9999$	$-5{,}99999$	$-5{,}999999$
$G(x)$	$-0{,}1250016$	$-0{,}12500016$	$-0{,}12500002$

x	$-6{,}1$	$-6{,}01$	$-6{,}001$
$G(x)$	$-0{,}123457$	$-0{,}1248439$	$-0{,}1249844$

x	$-6{,}0001$	$-6{,}00001$	$-6{,}000001$
$G(x)$	$-0{,}1249984$	$-0{,}12499984$	$-0{,}12499998$

(γ) $\lim_{x \to -6} G(x) = -\frac{1}{8} = -0{,}125$

23. **(α)** $g(\theta) = (\sin \theta)/\theta$

θ	0,1	0,01	0,001
$g(\theta)$	0,998334	0,999983	0,999999

θ	0,0001	0,00001	0,000001
$g(\theta)$	0,999999	0,999999	0,999999

θ	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$
$g(\theta)$	0,998334	0,999983	0,999999

θ	$-0{,}0001$	$-0{,}00001$	$-0{,}000001$
$g(\theta)$	0,999999	0,999999	0,999999

$\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = 1$

25.(α) $f(x) = x^{1/(1-x)}$

x	0,9	0,99	0,999
$f(x)$	0,348678	0,366032	0,367695

θ	0,9999	0,99999	0,999999
$g(\theta)$	0,367861	0,367878	0,367879

x	1,1	1,01	1,001
$f(x)$	0,385543	0,369711	0,368063

θ	1,0001	1,00001	1,000001
$g(\theta)$	0,367898	0,367881	0,367880

$\lim_{x\to 1} f(x) \approx 0{,}36788$

27. $\delta = 0{,}1$

29. $\delta = \dfrac{7}{16}$

31. $(3{,}99,\ 4{,}01)$, $\delta = 0{,}01$

33. $(-0{,}19,\ 0{,}21)$, $\delta = 0{,}19$

35. $\left(\dfrac{10}{3}, 5\right)$, $\delta = \dfrac{2}{3}$

37. [3,384, 3,387]. Για να είμαστε βέβαιοι, στρογγυλοποιήσαμε την τιμή του αριστερού άκρου προς τα πάνω, και την τιμή του δεξιού άκρου προς τα κάτω.

39. **(β)** Μία πιθανή απάντηση: $a = 1{,}75$, $b = 2{,}28$
(γ) Μία πιθανή απάντηση: $a = 1{,}99$, $b = 2{,}01$

41. **(α)** 14,7 m/sec
(β) 29,4 m/sec

43. **(α)**

x	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$
$f(x)$	$-0{,}054402$	$-0{,}005064$	$-0{,}000827$	$-0{,}000031$

(β)

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	$-0{,}054402$	$-0{,}005064$	$-0{,}000827$	$-0{,}000031$

Το όριο δείχνει να είναι το 0.

45. **(α)**

x	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$
$f(x)$	2,0567	2,2763	2,2999	2,3023

(β)

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	2,5893	2,3293	2,3052	2,3029

Το όριο δείχνει να είναι το 2,3.

Ενότητα 1.2, σελ. 105-108

1. **(α)** 3
(β) -2
(γ) Δεν υπάρχει το όριο
(δ) 1

3. **(α)** -4
(β) -4
(γ) -4
(δ) -4

5. **(α)** 4
(β) -3
(γ) Δεν υπάρχει το όριο
(δ) 4

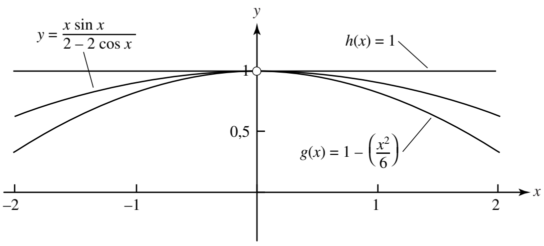
7. **(α)** Όριο πηλίκου
(β) Όρια διαφοράς και δύναμης
(γ) Όρια αθροίσματος και σταθερού πολλαπλασίου

9. **(α)** -10
(β) -20
(γ) -1
(δ) $\dfrac{5}{7}$

11. **(α)** -9
(β) -8
(γ) $\dfrac{1}{5}$
(δ) $\dfrac{3}{2}$

13. **(α)** -7 **(β)** $-\dfrac{1}{2}$ **(γ)** 4

15. **(α)** $\lim_{x\to 0}\left(1 - \dfrac{x^2}{6}\right) = 1 - \dfrac{0}{6} = 1$ και $\lim_{x\to 0} 1 = 1$·
λόγω του θεωρήματος σάντουιτς, $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{2 - 2\cos x} = 1$.
(β) Για $x \neq 0$, η $y = (x \sin x)/(2 - 2\cos x)$ κείται μεταξύ των άλλων δύο καμπυλών στο σχήμα, και τα γραφήματα συμπίπτουν καθώς $x \to 0$.



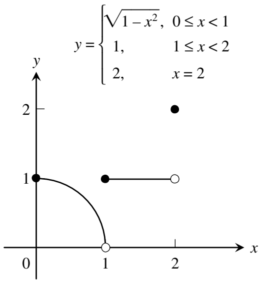
17. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2 + h) = 2$

19. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\left(\dfrac{1}{-2+h}\right) - \left(\dfrac{1}{-2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{-h}{h(4 - 2h)} = -\dfrac{1}{4}$

21. **(α)** Αληθής **(β)** Αληθής **(γ)** Ψευδής
(δ) Αληθής **(ε)** Αληθής **(στ)** Αληθής
(ζ) Ψευδής **(η)** Ψευδής **(θ)** Ψευδής
(ι) Ψευδής **(κ)** Αληθής **(λ)** Ψευδής

23. **(α)** Όχι **(β)** Ναι, 0 **(γ)** Όχι

25. **(α)** D: $0 \le x \le 2$, R: $0 < y \le 1$ και $y = 2$
(β) $(0, 1) \cup (1, 2)$ **(γ)** $x = 2$ **(δ)** $x = 0$



27. $\sqrt{3}$ **29.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

31. **(α)** 1 **(β)** -1

35. **(α)** 4 **(β)** -2

37. Ναι

39. $\delta = \epsilon^2$, $\lim\limits_{x\to5^+} \sqrt{x-5} = 0$ **41.** Ναι, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -3$

Ενότητα 1.3, σελ. 118-120

1. **(α)** π **(β)** π

3. **(α)** $-\dfrac{5}{3}$ **(β)** $-\dfrac{5}{3}$

5. $-\dfrac{1}{x} \le \dfrac{\sin 2x}{x} \le \dfrac{1}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin 2x}{x} = 0$ λόγω του θεωρήματος σάντουιτς

7. **(α)** $\dfrac{2}{5}$ **(β)** $\dfrac{2}{5}$

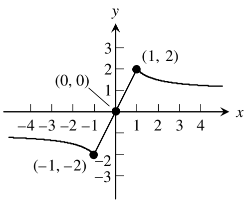
9. **(α)** $-\infty$ **(β)** ∞

11. **(α)** ∞ **(β)** $-\infty$

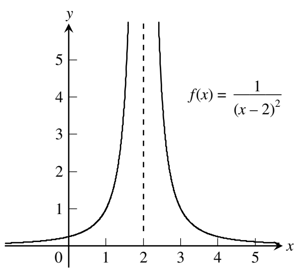
13. **(α)** $-\dfrac{2}{3}$ **(β)** $-\dfrac{2}{3}$

15. 0 **17.** 1 **19.** ∞

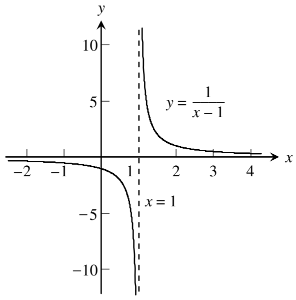
21. Μία πιθανή γραφική παράσταση.



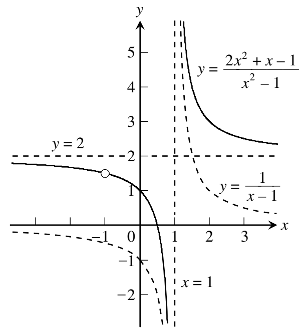
23. Μία πιθανή γραφική παράσταση.



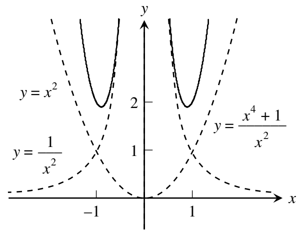
25. $y = \dfrac{1}{x-1}$



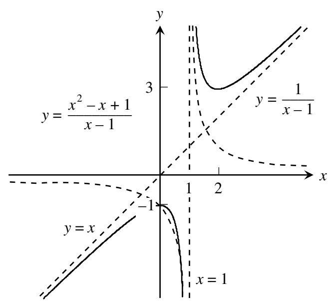
27. $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$



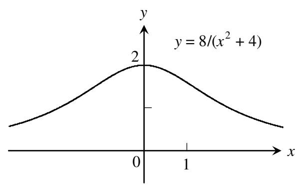
29. $y = \dfrac{x^4 + 1}{x^2} = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$



31. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \dfrac{1}{x-1}$



33. $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$



35. Γραφική παράσταση (α) **37.** Γραφική παράσταση (δ)

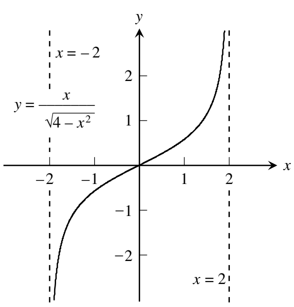
39. **(α)** e^x **(β)** $-2x$

41. **(α)** x **(β)** x

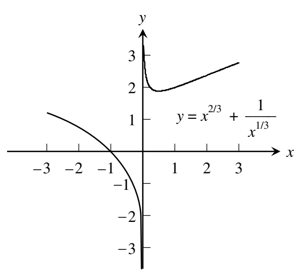
43. **(α)** $\dfrac{1}{2}$ **(β)** $\dfrac{1}{2}$

45. Το πολύ 2

47. $y = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$



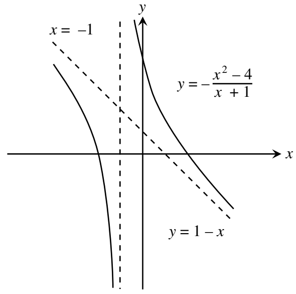
49. $y = x^{2/3} + \dfrac{1}{x^{1/3}}$



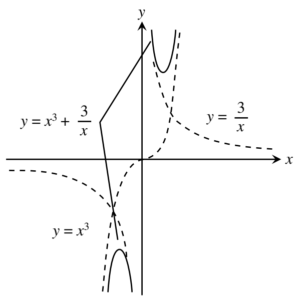
51. Στο ∞: ∞, στο $-\infty$: 0 **53.** Στο ∞: 0, στο $-\infty$: 0

55. 1 **57.** 3

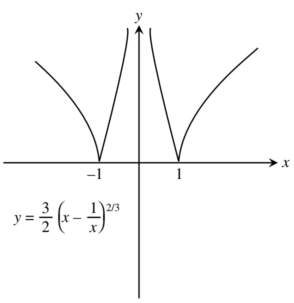
59. $y = -\dfrac{x^2 - 4}{x + 1} = 1 - x + \dfrac{3}{x + 1}$



61. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης ακολουθεί τον όρο που κυριαρχεί σε κάθε περιοχή.



63. **(α)** $y \to \infty$ (δείτε το παρατιθέμενο σχήμα)
(β) $y \to \infty$ (δείτε το παρατιθέμενο σχήμα)
(γ) Σημεία ανακάμψεως για $x = \pm 1$ (δείτε το ακόλουθο σχήμα)



Ενότητα 1.4, σελ. 128-130

1. Όχι· ασυνεχής στο $x = 2$· δεν ορίζεται στο $x = 2$

3. Συνεχής

5. **(α)** Ναι **(β)** Ναι **(γ)** Ναι **(δ)** Ναι

7. **(α)** Όχι **(β)** Όχι

9. 0

13. Ασυνεχής για $x = 2$

15. Ασυνεχής για $t = 3$ και για $t = 1$

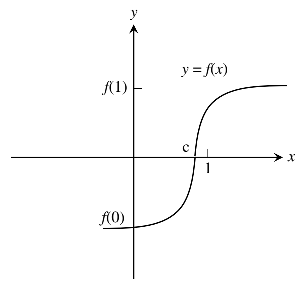
17. Ασυνεχής για $\theta = 0$

19. Συνεχής στο διάστημα $\left[-\dfrac{3}{2}, \infty\right)$

21. 0· συνεχής

23. 1· συνεχής

25. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f(0) < 0$, $f(1) > 0 \Rightarrow$ λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής η $f(x)$ θα παίρνει κάθε τιμή μεταξύ των $f(0)$ και $f(1) \Rightarrow$ η εξίσωση $f(x) = 0$ διαθέτει τουλάχιστον μια λύση μεταξύ $x = 0$ και $x = 1$.



27. Και τα πέντε ερωτήματα ζητούν το ίδιο πράγμα, εξαιτίας της ιδιότητας ενδιάμεσης τιμής συνεχών συναρτήσεων.

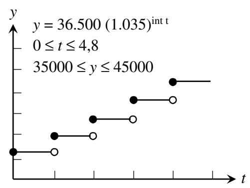
29. Υπάρχουν πολλές πιθανές εξηγήσεις. Για παράδειγμα, η $f(x) = \dfrac{\sin\ (x - 2)}{x - 2}$ είναι ασυνεχής στο $x = 2$ εφόσον δεν ορίζεται στο σημείο αυτό. Ωστόσο η ασυνέχεια μπορεί να αρθεί, διότι η f έχει όριο (ίσο με 1) καθώς $x \to 2$.

31. $r_1 = \dfrac{1 - \sqrt{21}}{2} \approx -1{,}791$, $r_2 = r_3 = r_4 = 0$, και

$r_5 = \dfrac{1 + \sqrt{21}}{2} \approx 2{,}791$

35. Ναι, εξαιτίας της ιδιότητας ενδιάμεσης τιμής

39. **(β)** Συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού $[0, 5)$ εκτός στα $t = 1, 2, 3, 4$



45. $x \approx 1{,}8794, -1{,}5321, -0{,}3473$ **47.** $x \approx 1{,}7549$

49. $x \approx 3{,}5156$

51. $x \approx 0{,}7391$

Ενότητα 1.5, σελ. 134-137

1. P_1: $m_1 = 1$, P_2: $m_2 = 5$ **3.** P_1: $m_1 = \dfrac{5}{2}$, P_2: $m_2 = -\dfrac{1}{2}$

5. $y = 2x + 5$ **7.** $y = 12x + 16$

9. $y + 1 = -3(x - 1)$ **11.** $y - 3 = -2(u - 3)$

13. $-\dfrac{1}{4}$ **15.** $(-2, -5)$

17. Στο $x = 0$, $y = -(x + 1)$· στο $x = 2$, $y = -(x - 3)$.

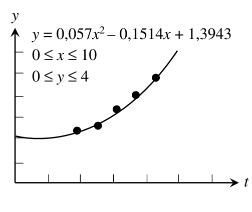
19. 19,6 m/sec **21.** 6π

23. 3,72 m/sec **25.** Ναι **27.** Ναι

29. **(α)** $\dfrac{1 - e^{-2}}{2} \approx 0{,}432$ **(β)** $\dfrac{e^3 - e}{2} \approx 8{,}684$

31. **(α)** $-\dfrac{4}{\pi} \approx -1{,}273$ **(β)** $-\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi} \approx -1{,}654$

33. **(α)** 0,3 δισεκατομμύρια δολάρια το έτος
(β) 0,5 δισεκατομμύρια δολάρια το έτος
(γ) $y = 0{,}057x^2 - 0{,}1514x + 1{,}3943$



(δ) 1994 έως 1995: 0,31 δισεκατομμύρια δολάρια το έτος, 1995 έως 1997: 0,53 δισεκατομμύρια δολάρια το έτος
(ε) 0,65 δισεκατομμύρια δολάρια το έτος

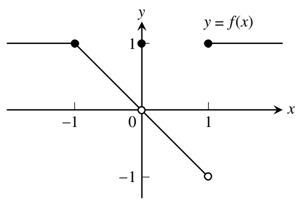
35. **(α)** Πουθενά **37.** **(α)** Στο $x = 0$
39. **(α)** Πουθενά **41.** **(α)** Στο $x = 1$
43. **(α)** Στο $x = 0$

Ασκήσεις κεφαλαίου 1, σελ. 137-139

1. Στο $x = -1$: $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f(x) = 1$, άρα $\lim_{x\to-1} f(x) = 1 = f(-1)$· συνεχής στο $x = -1$

Στο $x = 0$: $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = 0$, άρα $\lim_{x\to0} f(x) = 0$. Ωστόσο, $f(0) \neq 0$, άρα η f είναι ασυνεχής στο $x = 0$. Η ασυνέχεια μπορεί να αρθεί αν ορίσουμε εκ νέου την τιμή $f(0)$) ως 0.

Στο $x = 1$: $\lim_{x\to1^-} f(x) = -1$ και $\lim_{x\to1^+} f(x) = 1$, άρα το $\lim_{x\to1} f(x)$ δεν υπάρχει. Η συνάρτηση είναι ασυνεχής στο $x = 1$, και η ασυνέχεια δεν είναι αιρόμενη.



3. **(α)** -21 **(β)** 49 **(γ)** 0 **(δ)** 1
(ε) 1 **(στ)** 7 **(ζ)** -7 **(η)** $-\frac{1}{7}$
5. 4
7. **(α)** $(-\infty, +\infty)$ **(β)** $[0, \infty)$
(γ) $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$ **(δ)** $(0, \infty)$
9. **(α)** Δεν υπάρχει **(β)** 0
11. $\frac{1}{2}$ **13.** $2x$ **15.** $-\frac{1}{4}$ **17.** $\frac{2}{5}$
19. 0 **21.** $-\infty$ **23.** 0 **25.** 1
27. 0 **29.** **(β)** 1,324717957

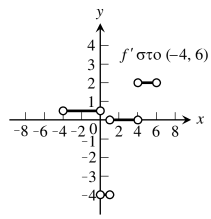
Επιπρόσθετες Ασκήσεις Κεφαλαίου 1, σελ. 139-141

3. 0· χρειαστήκαμε το αριστερό όριο διότι η συνάρτηση δεν ορίζεται για $v > c$.
5. $15 \le t \le 25$· εντός 5°C
7. **(α)** $\lim_{a\to0} r_+(a) = 0{,}5$, $\lim_{a\to-1^+} r_+(a) = 1$
(β) Το $\lim_{a\to0} r_-(a)$ δεν υπάρχει, $\lim_{a\to-1^+} r_-(a) = 1$
9. **(α)** Αληθής **(β)** Ψευδής
(γ) Αληθής **(δ)** Ψευδής

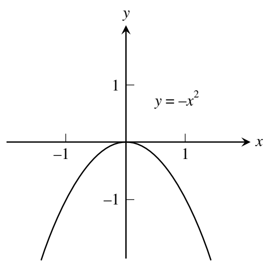
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

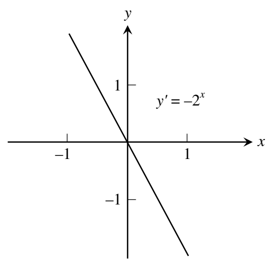
Ενότητα 2.1, σελ. 152-155

1. $-2x, 6, 0$ **3.** $3t^2 - 2t, 5$
5. $\frac{3}{2\sqrt{3\theta}}, \sqrt{3}$ **7.** $2x + 1, 2$
9. $4x^2, 8x$
11. $y' = 2x^3 - 3x - 1 \Rightarrow y'' = 6x^2 - 3 \Rightarrow y''' = 12x \Rightarrow y^{(4)} = 12 \Rightarrow y^{(n)} = 0$ για κάθε $n \ge 5$
13. **(α)** $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4$, $y - 1 = 8(x - 2)$
(β) $[-4, \infty)$
(γ) Η εξίσωση μιας τέτοιας εφαπτομένης βρέθηκε ήδη στο ερώτημα (α) για $x = 2$. Η εξίσωση της εφαπτομένης την καμπύλης στο σημείο $(-2, 1)$ είναι $y - 1 = 8(x - (-2))$.
15. (β) **17.** (δ)
19. **(α)** Η f' δεν ορίζεται για $x = 0, 1, 4$. Στα σημεία αυτά, οι αριστερές και οι δεξιές παράγωγοι δεν είναι ίσες.
(β)

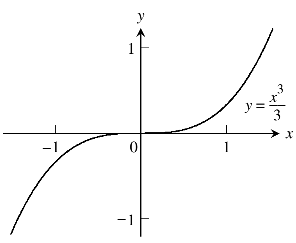


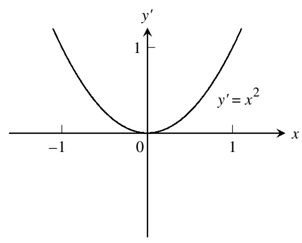
21. $\lim_{h\to0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = 0$, $\lim_{h\to0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = 1 \Rightarrow$ η παράγωγος $f'(0)$ δεν υπάρχει
23. **(α)** Η συνάρτηση είναι διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της $-2 \le x \le 3$.
(β) Πουθενά **(γ)** Πουθενά
25. **(α)** Για $-1 \le x < 0$ και $0 < x \le 2$
(β) Στο $x = 0$ **(γ)** Πουθενά
27. **(α)** $y' = -2x$
(β)





(γ) $x < 0, x = 0, x > 0$
(δ) $-\infty < x < 0, 0 < x < \infty$
29. **(α)** $y' = x^2$
(β)





(γ) $x \neq 0, x = 0$, πουθενά
(δ) $-\infty < x < \infty$, πουθενά